J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
Sect. IA, Math.
38 (1991), 211-223.

Biconfluence et groupe de Galois

Dedicated to Professor T. Kimura for his sixtieth birthday

par Anne DUVAL

Résumé: On décrit, pour une équation hypergéométrique "bi-confluente" (équivalente à une équation de Bessel modifiée) un procédé permettant d'obtenir la matrice de Stokes par confluence à partir d'une équation hypergéométrique admettant des transformations quadratiques.

Abstract: We describe a way to get the Stokes'matrix of a "bi-confluent" hypergeometric equation (equivalent to a modified Bessel equation) by confluence from a hypergeometric equation with quadratic transformations.

Classification A.M.S. (M.O.S.): 12 H 05-13 N 05-33 A 35-34 A 20

Key Words: Equations hypergéométriques, confluence, transformations quadratiques, groupes de Galois différentiels, matrice de Stokes.

Reprenant les idées exposées par J.-P. Ramis dans "Confluence et résurgence" ([Ra 1]), nous décrivons un scénario permettant d'obtenir les composants du groupe de Galois de l'équation hypergéométrique "biconfluente".

$$\tilde{D}_c=\delta(\delta+c-1)-z \qquad \left(\delta=z\frac{d}{dz}\right)$$

par *confluence* à partir du groupe de monodromie d'une équation hypergéométrique choisie de sorte qu'elle possède des *transformations quadratiques*.

L'équation $\tilde{D}_c$ est équivalente à une équation de Bessel et le phénomène de Stokes y est bien connu ([BV], par ex.). Le *groupe de Stokes* est engendré par une unique matrice S_0 et ses transformées sous l'action de la monodromie formelle (cas $\sigma=2$ de [D-M]). Nous montrons que la matrice S_0 peut s'obtenir comme limite, lorsque le paramètre de confluence tend vers l'infini dans un demi-plan, de la matrice de connexion entre les solutions, convenablement normalisées, au voisinage du point ∞ et au voisinage du point singulier mobile. En utilisant un système fondamental convenable de solutions au voisinage de 0 il est aussi possible d'obtenir les solutions sectorielles à l'infini, à développement asymptotique prescrit, comme limites de solutions de l'équation hypergéométrique.

On constate enfin que, comme dans le cas confluent, le produit des matrices de monodromie autour de l'infini et autour du point singulier mobile est constant et coïncide avec la matrice de *monodromie formelle* à l'infini de $\tilde{D}_c$; nous n'avons malheureusement pas d'explication de ce fait.

Nous commençons par rappeler, sous la forme qui nous sera utile, les résultats classiques concernant l'équation hypergéométrique, puis l'équation $\tilde{D}_c$.

I. L'équation hypergéométrique $D_{b,b+1/2;c}$.

On part de l'équation hypergéométrique

$$D_{b,b+1/2;c}=\delta(\delta+c-1)-z(\delta+b)\left(\delta+b+\frac{1}{2}\right) \qquad \left(\delta=z\frac{d}{dz}\right)$$

où on suppose $b\in \boldsymbol{C}-\frac{1}{2}\boldsymbol{Z}$, $c\in \boldsymbol{C}-\boldsymbol{Z}$, $b-c\in \boldsymbol{C}-\frac{1}{2}\boldsymbol{Z}$.

Pour $a, b, c\in \boldsymbol{C}$ ($c\notin \boldsymbol{Z}$), on note

$${}_2F_1(a, b; c; z)=\sum_{n\geq 0}\frac{\langle a\rangle_n\langle b\rangle_n}{\langle c\rangle_n}\frac{z^n}{n!}$$

où $\langle a\rangle_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$ $(n>0)$ et $\langle a\rangle_0=1$.

Pour $i=1, \cdots, 6$ notons w_i la fonction extraite de la liste de Kummer ([Lu], p. 67 par exemple),

$$w_1(z)={}_2F_1\left(b,\ b+\frac{1}{2};\ c;\ z\right)$$

$$w_2(z)=z^{1-c}{}_2F_1\left(1-b-c,\ \frac{1}{2}-b-c;\ 2-c;\ z\right)$$

$$w_3(z)=z^{-b}{}_2F_1\left(b,\ b+1-c;\ 2b+\frac{3}{2}-c;\ 1-\frac{1}{z}\right)$$

$$w_4(z)=z^{b+1/2-c}(1-z)^{c-2b-1/2}{}_2F_1\left(c-2b-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-b-c;\ c-2b+\frac{1}{2};\ 1-\frac{1}{z}\right)$$

$$w_5(z)=e^{i\pi b}z^{-b}{}_2F_1\left(b,\ b+1-c;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{z}\right)$$

$$w_6(z)=ie^{i\pi b}z^{-b-1/2}{}_2F_1\left(b+\frac{1}{2},\ b+\frac{3}{2}-c;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{z}\right).$$

Sur tout ouvert simplement connexe de la surface de Riemann $\tilde{X}$, revêtement universel de $P^1(C)-\{0, 1, \infty\}$ pointé en a, réel supérieur à 1, les prolongements analytiques de ces fonctions (notés de la même façon) définissent trois systèmes fondamentaux de solutions:

$$\Sigma_0=(w_1(z), w_2(z)), \Sigma_1(z)=(w_3(z), w_4(z)), \Sigma_\infty(z)=(w_5(z), w_6(z)).$$

Pour $\alpha, \beta \in \{0, 1, \infty\}$, on définit les *matrices de connexion* $M_{\alpha,\beta} \in GL(2, C)$ par $\Sigma_\alpha(z)=\Sigma_\beta(z)M_{\alpha,\beta}$.

On a ([Lu] ou [Ra 1])

$$M_{0,\infty}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(c)}{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma(c-b)} & \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-c)e^{i\pi(1-c)}}{\Gamma(1-b)\Gamma\left(b-c+\frac{3}{2}\right)} \\ \dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma\left(c-b-\frac{1}{2}\right)} & \dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-c)e^{i\pi(1-c)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-b\right)\Gamma(1+b-c)} \end{pmatrix}$$

$$M_{0,1}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma\left(c-2b-\frac{1}{2}\right)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma\left(c-b-\frac{1}{2}\right)} & \dfrac{\Gamma\left(c-2b-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-b)\Gamma\left(\frac{1}{2}-b\right)} \\ \dfrac{\Gamma\left(2b-c+\frac{1}{2}\right)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)} & \dfrac{\Gamma\left(2b-c+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-c)}{\Gamma(b+1-c)\Gamma\left(b-c+\frac{3}{2}\right)} \end{pmatrix}$$

$$M_{1,\infty}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2b-c+\frac{3}{2}\right)e^{i\pi b}}{\Gamma\left(b-c+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)} & \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(c-2b+\frac{1}{2}\right)e^{i\pi(b+1/2-c)}}{\Gamma(1-b)\Gamma(c-b)} \\ \dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2b-c+\frac{3}{2}\right)e^{-i\pi(b+1/2)}}{\Gamma(1+b-c)\Gamma(b)} & \dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(c-2b+\frac{1}{2}\right)e^{i\pi(b-c)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-b\right)\Gamma\left(c-b-\frac{1}{2}\right)} \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont liées par la relation

$$M_{0,\infty}=M_{1,\infty}M_{0,1}.$$

Pour $z \in \tilde{X}$ et $\alpha \in \boldsymbol{R}$, on prend $\arg(ze^{i\alpha}) = \arg z + \alpha$. On définit les *matrices de monodromie* autour de 0, resp. 1, resp. ∞ par les formules:

$$\Sigma_0(ze^{-2i\pi}) = \Sigma_0(z)\mathcal{M}_0 \qquad (0<|z|<1)$$
$$(\text{resp. } \Sigma_1(1-(1-z)e^{-2i\pi}) = \Sigma_1(z)\mathcal{M}_1 \qquad (0<|1-z|<1))$$
$$(\text{resp. } \Sigma_\infty(ze^{2i\pi}) = \Sigma_\infty(z)\mathcal{M}_\infty \qquad (\inf(|z|, |1-z|)>1)).$$

Ces matrices appartiennent à $GL(2, \boldsymbol{C})$ sont diagonales (les bases Σ_α, $\alpha \in \{0, 1, \infty\}$ ont été choisies pour être *vecteurs propres* de la monodromie en α) et ont pour valeur respective

$$\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\pi c} \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e^{-2i\pi(c-2b)} \end{pmatrix}$$
$$\text{et} \qquad \mathcal{M}_\infty = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi b} & 0 \\ 0 & -e^{-2i\pi b} \end{pmatrix}.$$

Le choix des paramètres de l'équation hypergéométrique est fait pour permettre l'utilisation des formules quadratiques de Goursat ([G]). Dans les 2 lemmes suivants les déterminations de $\arg z$ et $\arg(1-z)$ sont fixées conformément à la définition choisie de X: sur le premier feuillet du demi-plan supérieur, on a: $\arg z \in]0, \pi[$ et $\arg(1-z) \in]\pi, 0[$.

LEMME 1.1 ([Lu] p. 92 ou [E] p. 110). *Pour $a \in \boldsymbol{C}$ et $c \in \boldsymbol{C}-\boldsymbol{Z}$, $z \in \tilde{X}$ tel que $|z|<1$ et $|z(1-z)|<\frac{1}{4}$,*

$$ {}_2F_1(a, 1-a; c; z) = (1-z)^{c-1}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}(c-a), \frac{1}{2}(c+a-1); c; 4z(1-z)\right).$$

LEMME 1.2 ([E], p. 111). *Pour $a, b \in \boldsymbol{C}$ tels que $a+b \notin \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}$ et $z \in \tilde{X}$ tel que $|z|<1$ et $|1 \pm z^{1/2}|<1$,*

$$\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}{}_2F_1\left(a, b; \frac{1}{2}; z\right)$$
$$= {}_2F_1\left(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1+z^{1/2})\right) + {}_2F_1\left(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1-z^{1/2})\right)$$

$$\frac{2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+b-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)} z^{1/2}{}_2F_1\left(a, b; \frac{3}{2}; z\right)$$

$$= {}_2F_1\left(2a-1, 2b-1; a+b-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1-z^{1/2})\right)$$

$$- {}_2F_1\left(2a-1, 2b-1; a+b-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1-z^{1/2})\right).$$

II. L'équation biconfluente $\tilde{D}_c$.

L'équation $\tilde{D}_c = \delta(\delta+c-1)-t$ $(c \in C-Z)$ a 2 *points singuliers*: 0 qui est *régulier*, ∞ qui est *irrégulier* et dont le polygone de Newton ([Ra 2]) a un unique côté de pente $\frac{1}{2}$.

Remarquons que si $w(t)$ est une solution de $\tilde{D}_c w = 0$, la fonction $y(t) = t^{c-1} w\left(\frac{t^2}{4}\right)$ est solution de l'équation de *Bessel modifiée* $B_{c-1} y = 0$ où, pour $\nu \in C$, B_ν est l'opérateur $B_\nu = t^2 \frac{d^2}{dt^2} + t\frac{d}{dt} - (t^2+\nu^2)$.

A l'aide de cette remarque, ou par une étude directe ([DM] avec $p=0$, $q=2$), on obtient facilement les résultats qui suivent. L'équation $\tilde{D}_c$ admet le système fondamental de solutions holomorphes sur la surface de Riemann du logarithme

$$\tilde{\Sigma}_0(t) = (\tilde{w}_1(t), \tilde{w}_2(t)) \qquad \text{où}$$

$\tilde{w}_1(t) = {}_0F_1(c, t) = \Sigma_{n\geq 0} \frac{t^n}{\langle c \rangle_n n!}$ (qui est en fait une fonction entière dans C)
$\tilde{w}_2(t) = t^{1-c}{}_0F_1(2-c; t)$
(Ici encore les déterminations de t^λ sont choisies de sorte que t soit réel pour t réel >0).

La *monodromie* de $\tilde{D}_c$ est donnée dans cette base par la matrice $\tilde{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M}_0$.

L'équation $\tilde{D}_c$ admet le système fondamental de *solutions formelles* (à l'∞) $\hat{\Sigma}_\infty(t) = (\hat{U}(t), \hat{V}(t))$ où

$$\hat{U}(t) = e^{-2t^{1/2}} t^{1/4-c/2} {}_2F_0\left(c-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-c; -\frac{1}{4t^{1/2}}\right)$$

$$= e^{-2t^{1/2}} t^{1/4-c/2} \sum_{n\geq 0} \frac{\left\langle c-\frac{1}{2}\right\rangle_n \left\langle \frac{3}{2}-c\right\rangle_n}{n!} \left(-\frac{1}{4t^{1/2}}\right)^n$$

$$\hat{V}(t) = e^{2t^{1/2}} t^{1/4-c/2} {}_2F_0\left(c-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-c; +\frac{1}{4t^{1/2}}\right).$$

Dans cette base, la *monodromie formelle* s'exprime par la matrice définie par $\hat{\Sigma}_\infty(te^{2i\pi}) = \hat{\Sigma}_\infty(t)\hat{\mathcal{M}}_\infty$. On a

$$\hat{\mathcal{M}}_\infty = \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\pi c} \\ ie^{-i\pi c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que cette fois la solution formelle "naturelle" à l'∞ n'est pas constituée de vecteurs propres pour la monodromie formelle: c'est la présence de la ramification $t^{1/2}$ qui induit ce phénomène, lié à l'action du groupe de Galois algébrique de cette ramification.

La série formelle ${}_2F_0\left(c-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-c; \pm\frac{1}{4t^{1/2}}\right)$ est *divergente* (sauf lorsqu'elle s'arrête i.e. si $c \in \frac{1}{2}\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}$) mais définit une série 1-sommable ([Ra 3]) en la variable u définie par $u^2 = t$. Toute solution de $\tilde{D}_c$ admettant $\hat{\Sigma}_\infty$ pour développement asymptotique gevrey en u, dans un secteur de sommet ∞, d'ouverture strictement supérieure à π dans le plan des u, donc à 2π dans le plan des t, est une "somme" ([Ra 1]) de cette solution formelle.

Les résultats suivants, cités par Luke ([Lu]), remontent à G. J. Meijer.

LEMME 2.1. *La fonction définie pour* $\arg t \in]-\pi, \pi[$ *par*

$$G_0(t) = G^{2,0}_{0,2}(t \mid 0, 1-c) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Gamma(-s)\Gamma(1-c-s)t^s ds$$

où $\gamma \in \boldsymbol{R}$ *vérifie* $\gamma < \inf(0, 1-\operatorname{Re} c)$, *est une solution de* $\tilde{D}_c$ *dont le prolongement analytique à la surface de Riemann de logarithme admet* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\hat{U}(t)$ *pour développement asymptotique dans le secteur* $\arg t \in]-3\pi, 3\pi[$.

Les différentes déterminations de G_0 *satisfont la relation suivante, pour* $\arg t \in]\pi, 3\pi[$,

$$G_0(t) = (1 + e^{-2i\pi c})G_0(te^{-2i\pi}) - e^{-2i\pi c}G_0(te^{-4i\pi}).$$

A partir de ce lemme, il est facile de "sommer" $\hat{\Sigma}_\infty$ dans chacun des deux secteurs de sommet ∞:

$$\theta_1=\{t|\arg t\in]-3\pi,\pi[\}$$
$$\theta_2=\{t|\arg t\in]-\pi,3\pi[\}.$$

La somme de $\hat{\Sigma}_\infty$ dans θ_1, i.e. dans la direction $-\pi$ est

$$\tilde{\Sigma}_1(t)=\left(\frac{G_0(t)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},\ -i\frac{e^{i\pi c}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}G_0(te^{2i\pi})\right).$$

La somme de $\hat{\Sigma}_\infty$ dans θ_2, i.e. dans la direction $+\pi$ est:

$$\tilde{\Sigma}_2(t)=\left(\frac{G_0(t)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},\ i\frac{e^{-i\pi c}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}G_0(te^{-2i\pi})\right).$$

La comparaison de ces deux sommes donne la *matrice de Stokes* S_0 (dans la direction 0) définie (comme dans Ramis [Ra 1]) par $\tilde{\Sigma}_1=\tilde{\Sigma}_2(t)S_0$; $t\in\theta_1\cap\theta_2$.

Un calcul immédiat à partir de la formule du lemme 2.1 donne la valeur de S_0.

$$S_0=\begin{pmatrix}1 & -2i\cos\pi c\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

L'expression des G-fonctions de Meijer en termes de fonctions hypergéométriques ([Lu], p. 145 par exemple) s'écrit ici

$$G_0(t)=\Gamma(1-c)\tilde{w}_1(t)+\Gamma(c-1)\tilde{w}_2(t).$$

Cette relation permet de calculer les matrices de *connexion centrale* $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$ définies par $\tilde{\Sigma}_0(t)=\tilde{\Sigma}_i(t)\tilde{M}_i$, $t\in\theta_i$, $i=1,2$.

On trouve

$$\tilde{M}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(c)e^{-i\pi(c-1/2)}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} & \dfrac{\Gamma(2-c)e^{+i\pi(c+1/2)}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\\[2ex] \dfrac{\Gamma(c)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} & \dfrac{\Gamma(2-c)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}_2=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(c)e^{-i\pi(c-1/2)}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} & \dfrac{\Gamma(2-c)e^{+i\pi(c+1/2)}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \dfrac{\Gamma(c)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} & \dfrac{\Gamma(2-c)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien sûr que $S_0\tilde{M}_1=\tilde{M}_2$.

III. Confluence.

Le changement de variable $z=\frac{t}{b^2}$ transforme $D_{b,b+1/2;c}$ en l'opérateur $D_c^{(b)}=\delta(\delta+c-1)-\frac{t}{b^2}(\delta+b)\left(\delta+b+\frac{1}{2}\right)$ qui, quand $b\to\infty$, "tend formellement" vers $\tilde{D}_c$.

L'étude de la convergence "formelle" des solutions va d'abord donner des normalisations en les trois points singuliers de $D_c^{(b)}$: $0, b^2$ et ∞.

Le résultat suivant est classique.

LEMME 3.1. *Uniformément sur tout compact de* $\mathbf{C}$

$$\lim_{b\mapsto\infty} w_1\left(\frac{t}{b^2}\right)=\tilde{w}_1(t).$$

Uniformément sur tout compact de la surface de Riemann du logarithme,

$$\lim_{b\to\infty} b^{2(1-c)}w_2\left(\frac{t}{b^2}\right)=\tilde{w}_2(t).$$

On normalise alors en 0 *en posant*

$$\Sigma_0^{(b)}(t)=\Sigma_0\left(\frac{t}{b^2}\right)N_0 \qquad \text{où } N_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & b^{2(1-c)}\end{pmatrix}.$$

LEMME 3.2. *Quand* $b\to\infty$, $\left(\frac{b}{2}\right)^{1/2-c}2^{-2b}w_3\left(\frac{t}{b^2}\right)$ *tend "terme à terme" vers* $\hat{U}(t)$ *et* $(2b)^{1/2-c}2^{2b}w_4\left(\frac{t}{b^2}\right)$ *tend "terme à terme" vers* $\hat{V}(t)$.

■ Le lemme 1.1 appliqué à $z=\frac{1}{2}(1-bt^{-1/2})$ permet d'écrire

$$w_3\left(\frac{t}{b^2}\right)=b^{2b}t^{-b}\left[\frac{1}{2}(1+bt^{-1/2})\right]^{c-2b-1/2}{}_2F_1\left(\frac{3}{2}-c,\ c-\frac{1}{2};\ 2b+\frac{3}{2}-c;\ z\right).$$

Donc

$$\left(\frac{b}{2}\right)^{1/2-c}2^{-2b}w_3\left(\frac{t}{b^2}\right)$$
$$=t^{1/4-c/2}\left(1+\frac{t^{1/2}}{b}\right)^{-2b+c-1/2}{}_2F_1\left(\frac{3}{2}-c,\ c-\frac{1}{2};\ 2b+\frac{3}{2}-c;\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{t^{1/2}}\right)\right).$$

Or $\left(1+\frac{t^{1/2}}{b}\right)^{-2b+c-1/2}\to e^{-2t^{1/2}}$ quand $b\to\infty$ et ${}_2F_1\left(\frac{3}{2}-c,\ c-\frac{1}{2};\ 2b+\frac{3}{2}-c;\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{t^{1/2}}\right)\right)$ "converge terme à terme" vers la série divergente ${}_2F_0\left(\frac{3}{2}-c,\ c-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4t^{1/2}}\right)$ d'où le premier résultat. De même, on a:

$$w_4\left(\frac{t}{b^2}\right)=b^{-2b+2c-1}t^{b+1/2-c}\left(1-\frac{t}{b^2}\right)^{c-2b-1/2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{t^{1/2}}\right)\right]^{2b-c+1/2}F(t)$$

où $F(t)={}_2F_1\left(\frac{3}{2}-c,\ c-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{t^{1/2}}\right)\right)$.

D'où

$$(2b)^{1/2-c}2^{2b}w_4\left(\frac{t}{b^2}\right)=t^{1/4-c/2}\left(1+\frac{t^{1/2}}{b}\right)^{2b-c+1/2}\left(1-\frac{t}{b^2}\right)^{c-2b-1/2}F(t)$$

et quand $b\to\infty$:

$$\left(1+\frac{t^{1/2}}{b}\right)^{2b-c+1/2}\longrightarrow e^{2t^{1/2}}$$
$$\left(1-\frac{t}{b^2}\right)^{c-2b-1/2}\longrightarrow 1$$
$$F(t)\longrightarrow{}_2F_0\left(\frac{3}{2}-c,\ c-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4t^{1/2}}\right)\qquad\text{(terme à terme)}.$$ ■

On normalise en b^2 en posant $\Sigma_{b^2}^{(b)}(t)=\Sigma_1\left(\frac{t}{b^2}\right)N_{b^2}$ où

$$N_{b^2}=\begin{pmatrix}\left(\frac{b}{2}\right)^{1/2-c}2^{-2b} & 0\\ 0 & (2b)^{1/2-c}2^{2b}\end{pmatrix}.$$

La normalisation à l'infini n'est plus diagonale (ce phénomène est lié au fait que $\hat{U}$ et $\hat{V}$ ne sont pas vecteurs propres pour la monodromie formelle).

On pose $\Sigma_\infty^{(b)}(t)=\Sigma_\infty\left(\frac{t}{b^2}\right)N_\infty$ où la matrice N_∞^{-1} est donnée par

$$N_\infty^{-1}=\frac{2^{2b-1/2-c}b^{c-1/2}}{\Gamma\left(2b+\frac{3}{2}-c\right)}\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{3}{2}-c\right)e^{i\pi b}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} & i\dfrac{\Gamma(b)\Gamma(b+1-c)e^{i\pi b}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\\ -i\dfrac{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{3}{2}-c\right)e^{i\pi(c-b)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} & -\dfrac{\Gamma(b)\Gamma(b+1-c)e^{i\pi(c-b)}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\end{pmatrix}.$$

LEMME 3.3. *Quand $b\to\infty$, $\Sigma_\infty^{(b)}(t)$ converge terme à terme vers $\hat{\Sigma}_\infty(t)$.*

■ Notons $N_\infty^{-1}=\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}$ et posons

$$U_b(t)=\left(1+\frac{t^{1/2}}{b}\right)^{-2b-1/2+c}t^{1/4-c/2}{}_2F_1\left(c-\frac{1}{2},\frac{3}{2}-c;\ 2b+\frac{3}{2}-c;\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{t^{1/2}}\right)\right),$$

$$V_b(t)=\left(1+\frac{t^{1/2}}{b}\right)^{-2b-1/2+c}t^{1/4-c/2}{}_2F_1\left(c-\frac{1}{2},\frac{3}{2}-c;\ 2b+\frac{3}{2}-c;\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{t^{1/2}}\right)\right).$$

Alors $U_b(t)$ (resp. $V_b(t)$) tend terme à terme vers $\hat{U}(t)$ (resp. $\hat{V}(t)$). La première formule du lemme 1.2 permet d'écrire

$$w_5\left(\frac{t}{b^2}\right)=e^{i\pi b}t^{-b}b^{2b}\frac{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{3}{2}-c\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2b+\frac{3}{2}-c\right)}$$
$$\times\left[{}_2F_1\left(2b,2b+2-2c;\ 2b+\frac{3}{2}-c;\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{t^{1/2}}\right)\right)\right.$$
$$\left.+{}_2F_1\left(2b,2b+2-2c;\ 2b+\frac{3}{2}-c;\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{t^{1/2}}\right)\right)\right]$$

$$=AU_b(t)+BV_b(t),$$

en utilisant la classique formule ${}_2F_1(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c;z)$.

De même la deuxième formule du lemme 1.2 donne

$$w_6\left(\frac{t}{b^2}\right)=CU_b(t)+DV_b(t). \qquad \blacksquare$$

Les matrices de connexion entre les solutions $\Sigma_\alpha^{(b)}$ $(\alpha\in\{0,b^2,\infty\})$, définies par $\Sigma_\alpha^{(b)}(t)=\Sigma_\beta^{(b)}(t)M_{\alpha,\beta}^{(b)}$ $(\alpha,\beta\in\{0,b^2,\infty\})$ sont liées à celles de $D_{b,b+1/2;c}$ par les relations $M_{\alpha,\beta}^{(b)}=N_\beta^{-1}M_{\alpha/b^2,\beta/b^2}N_\alpha$.

La formule de duplication $\Gamma(2x)=2^{2x-1}\dfrac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ $(x\in C)$ permet d'écrire ces matrices sous la forme suivante:

$$M_{0,b^2}^{(b)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma\left(c-2b-\frac{1}{2}\right)\Gamma(c)(2b)^{c-1/2}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2c-2b-1)} & \dfrac{\Gamma\left(c-2b-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-c)(2b)^{3/2-c}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-2b)}\\[2ex] \dfrac{\Gamma\left(2b+\frac{1}{2}-c\right)\Gamma(c)(2b)^{c-1/2}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2b)} & \dfrac{\Gamma\left(2b+\frac{1}{2}-c\right)\Gamma(2-c)(2b)^{3/2-c}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2b+2-2c)}\end{pmatrix}$$

$$M_{0,\infty}^{(b)}=\begin{pmatrix}-i\dfrac{\Gamma(2b+2-2c)\Gamma(c)(2b)^{c-1/2}e^{i\pi c}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2b+\frac{3}{2}-c\right)} & -i\dfrac{\Gamma(2b)\Gamma(2-c)(2b)^{3/2-c}e^{-i\pi c}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2b+\frac{3}{2}-c\right)}\\[2ex] \dfrac{\Gamma(2b+2-2c)\Gamma(c)(2b)^{c-1/2}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2b+\frac{3}{2}-c\right)} & \dfrac{\Gamma(2b)\Gamma(2-c)(2b)^{3/2-c}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2b+\frac{3}{2}-c\right)}\end{pmatrix}$$

$$M_{b^2,\infty}^{(b)}=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{i}{\pi}\cos\pi c e^{i\pi(2b-c)}\dfrac{\Gamma\left(c+\frac{1}{2}-2b\right)\Gamma(2b)\Gamma(2b+2-c)}{\Gamma\left(2b+\frac{3}{2}-c\right)}\\[2ex] 0 & \dfrac{\Gamma(2b)\Gamma(2b+2-2c)}{\Gamma\left(2b+\frac{3}{2}-c\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+2b-c\right)}\end{pmatrix}$$

A l'aide de la formule des compléments et de l'équivalent classique $\Gamma(x+\gamma)\simeq\Gamma(x)x^{\gamma}$ ($x\to\infty$ avec $\arg x\in]-\pi,+\pi[$), on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 3.4. *Si* $\arg b\in]-\pi,0[$ *est fixé alors* $\lim_{b\to\infty}M^{(b)}_{0,b^2}=\tilde{M}_1$, $\lim_{b\to\infty}M^{(b)}_{0,\infty}=\tilde{M}_2$ *et* $\lim_{b\to\infty}M^{(b)}_{b^2,\infty}=S_0$.

Bien sûr, cette dernière limite peut aussi se déduire des deux précédentes puisque

$$M^{(b)}_{0,\infty}=M^{(b)}_{0,\infty}M^{(b)}_{b^2,0}=M^{(b)}_{0,\infty}(M^{(b)}_{0,b^2})^{-1}\longrightarrow\tilde{M}_2\tilde{M}_1^{-1}=S_0.$$

On peut alors déduire de cette proposition et du lemme 3.1 la "vraie" convergence de solutions bien choisies de $D^{(b)}_c$ vers les deux "sommes" de $\hat{\Sigma}_\infty$ considérées précédemment.

PROPOSITION 3.5. *Pour* $\arg b\in]-\pi,0[$ *fixé, on a, uniformément sur tout compact de la surface de Riemann du logarithme*:

$$\lim_{b\to\infty}\Sigma^{(b)}_{b^2}(t)=\tilde{\Sigma}_1(t)\quad et\quad \lim_{b\to\infty}\Sigma^{(b)}_{\infty}(t)=\tilde{\Sigma}_2(t).$$

Enfin, il est facile de calculer les matrices de monodromie de $D^{(b)}_c$ dans les bases $\Sigma^{(b)}_\alpha$ ($\alpha\in\{0,b^2,\infty\}$). En notant $\mathcal{M}^{(b)}_\alpha$ ces matrices, on a:

$$\mathcal{M}^{(b)}_0=\mathcal{M}_0,\ \mathcal{M}^{(b)}_{b^2}=\mathcal{M}_1\ \text{ et }\ \mathcal{M}^{(b)}_\infty=N_\infty^{-1}\mathcal{M}_\infty N_\infty$$

$$\text{i.e.}\quad \mathcal{M}^{(b)}_\infty=\begin{pmatrix}0 & ie^{-i\pi c}\\ -ie^{i\pi(4b-c)} & 0\end{pmatrix}.$$

On constate donc, comme annoncé, que le produit $\mathcal{M}^{(b)}_{b^2}\mathcal{M}^{(b)}_\infty$ est indépendant de b et coïncide avec la matrice de monodromie formelle à l'infini $\hat{\mathcal{M}}_\infty$ de $\tilde{D}_c$.

Bibliographie

[BV] Babbitt, D. and V. Varadarajan, Local isoformal deformation theory for meromorphic differential equations near an irregular singularity.

[DM] Duval, A. et C. Mitschi, Matrices de Stokes et groupe de Galois des équations hypergéométriques confluentes généralisées, Pacific J. Math.

[E] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.

[G] Goursat, E., Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique, Ann. Sc. ENS (2) **10** (1881), 3-142.

[Lu] Luke, Y., The Special Functions and Their Approximations, Vol. 1, Academic

Press, New York-London, 1969.

[Ra 1] Ramis, J. P., Confluence et résurgence, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **36** (1989), 703–716.

[Ra 2] Ramis, J. P., Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Mem. Amer. Math. Soc. **296** (1984).

[Ra 3] Ramis, J. P., Phénomène de Stokes et resommation, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), 99-102.

(Reçu le 15 octbre, 1990)

Université des Sciences et Techniques de
Lille Flandres Artois
U. F. R. de Mathématiques Pures et Appliquées
59655 — Villeneuve d'Ascq Cedex
France