J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
Sect. IA, Math.
36 (1989), 665-680.

Equations différentielles algébriques: Remarques et problèmes

En l'honneur du Professeur Kimura pour son 60ème anniversaire

Par D. CERVEAU

Introduction

Soit X un champ de vecteurs polynomial sur l'espace $\boldsymbol{C}^n$; X correspond à un système dynamique:

$$\dot{x}_i = X_i(x), \qquad i=1, \cdots, n \tag{1}$$

induisant un feuilletage en courbes $\mathcal{F}_X$ de l'espace $\boldsymbol{C}^n$ privé de l'ensemble singulier de X. La description des $\mathcal{F}_X$ pour X général suscite de nombreuses publications tant théoriques que numériques. Une méthode souvent utilisée, celle des petits paramètres, consiste à étudier les déformations $X_\varepsilon = X_0 + \varepsilon X_1 + \cdots$ de champs X_0 dont on connait parfaitement la structure des trajectoires; dans la pratique les champs X_0 considérés possèdent des intégrales premières, disons constructibles au sens où l'on est capable de les exprimer au moyen de fonctions usuelles: intégrales rationnelles ou logarithmiques ($\sum \lambda_i \operatorname{Log} f_i$, f_i polynômes) etc. Dans la littérature ces champs recoivent le qualificatif d'intégrables ou de complètement intégrables. Alors qu'en mécanique (ou géométrie symplectique) cette notion est parfaitement claire, dans maintes publications où l'on traite d'équations (1) non hamiltoniennes elle est parfois bien floue et la terminologie varie d'un auteur à l'autre!

Nous proposons ici trois notions d'intégrabilité:

-*La complète intégrabilité* qui est l'existence de $n-1$ intégrales rationnelles indépendantes. Le théorème 1 ([G]) assure qu'elle équivaut au fait que les feuilles de $\mathcal{F}_X$ soient d'adhérence des courbes algébriques.

-*L'intégrabilité* (ordinaire) c'est lorsque $\mathcal{F}_X$ apparait comme intersection de $n-1$ feuilletages algébriques; c'est une notion plus faible. Par exemple en dimension 3 un champ de vecteurs ayant suffisamment de séparatrices ou bien est intégrable ou bien possède une intégrale première rationnelle (théorème 2).

-*La super intégrabilité* est une notion intermédiaire: c'est lorsque le champ X est contenu dans un faisceau linéaire de feuilletages (en dimension 3). Bien que non générique comme toute notion d'intégrabilité, elle apparait très souvent dans les problèmes liés à la classification des feuilletages algébriques de codimension un; elle est intimement liée à la théorie des webs.

Lorsque le nombre de séparatrices est insuffisant pour assurer l'intégrabilité, mais supérieur à $n+1$ on peut obtenir des renseignements sur la structure géométrique des feuilles de $\mathcal{F}_X$; en général elles sont revêtues par le disque hyperbolique (théorèmes 7 et 8).

On s'intéresse ensuite aux feuilletages algébriques de codimension un. Comme il est dit ci-dessus et bien que cela n'apparaisse pas ici faute de place, les techniques de classification des feuilletages algébriques de codimension un font souvent appel aux notions d'intégrabilité de champs tangents suffisamment bien choisis. Il en est ainsi par exemple de la classification des feuilletages quadratiques de $\boldsymbol{C}^n$ [C, M] ou de certains feuilletages de translation.

Enfin nous proposons une liste de problèmes que nous estimons importants. Tous les feuilletages considérés présentent éventuellement des singularités.

I. Champs de vecteurs algébriques: Différents types d'intégrabilité

Soit X un champ de vecteurs polynomial sur l'espace affine $\boldsymbol{C}^n$; à X on associe un feuilletage noté $\mathcal{F}_X$ (respectivement $\overline{\mathcal{F}}_X$) de $\boldsymbol{C}^n$ (resp. $\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}(n)$) singulier sur un ensemble de codimension au moins deux. Disons que X est *complètement intégrable* s'il existe $n-1$ fractions rationnelles $R_1, \cdots, R_{n-1}$ algébriquement indépendantes, i.e. $dR_1\wedge\cdots\wedge dR_{n-1}\not\equiv 0$, telles que $X(R_i)=0$ pour $i=1, \cdots, n-1$. Le champ X est *intégrable* s'il existe $n-1$ formes de Pfaff ω_i intégrables au sens de Frobenius i.e. $\omega_i\wedge d\omega_i=0$, telles que $\omega_i(X)=0$ et

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{n-1}\not\equiv 0.$$

Si X est intégrable le feuilletage $\mathcal{F}_X$ est l'intersection des $n-1$ feuilletages de codimension un $\mathcal{F}_{\omega_i}$ et si X est *complètement intégrable* la fermeture (au sens ordinaire) d'une feuille générique de $\mathcal{F}_X$ est une courbe algébrique (composante connexe de la fibre générique de $R=(R_1, \cdots, R_{n-1})$).

Nous avions conjecturé que cette dernière propriété était caractéristique des champs complètement intégrables. C'est effectivement le cas comme le prouve X. Gomez-Mont dans [G]:

THÉORÈME 1. *Soit X un champ polynomial dans C^n; sont équivalents*:
(i) *X est complètement intégrable*
(ii) *l'adhérence de la feuille générique de $\mathcal{F}_X$ est une courbe algébrique.*

Soit maintenant $(P=0)$ une hypersurface algébrique de C^n, P irréductible. Disons que $(P=0)$ est une séparatrice de X si $P=0$ est invariant par le feuilletage $\mathcal{F}_X$; ceci signifie que $X(P)$ est divisible par P:

$$X(P)=P\cdot\eta_P,\quad \eta_P \text{ polynôme.}$$

Remarquons que si X est de degré $N+1$ on a visiblement $d^0\eta_P \leq d^0X-1=N$. On peut alors adapter la démarche de Jouanolou ([J]): si $\nu(N,n)$ est la dimension de l'espace des polynômes à n variables de degré N et si X a au moins $\nu(N,n)+1$ séparatrices $(P_i=0)$ on trouvera une relation non triviale $\sum\lambda_i.\eta_{P_i}=0$, $\lambda_i\in C$. On obtient alors $\sum\lambda_i\frac{X(P_i)}{P_i}=0$, qui signifie que la fonction multivaluée $\sum\lambda_i \operatorname{Log} P_i$ est intégrale première du champ X. Notons que la fonction multiforme $\sum\lambda_i \operatorname{Log} P_i$ définit un feuilletage algébrique, d'équation $P_1\cdots P_p.\sum\lambda_i\frac{dP_i}{P_i}$.

Plaçons nous maintenant en dimension $n=3$ et supposons que X possède au moins $\nu'=\nu(N,3)+2$ séparatrices $P_i=0$; on dispose alors de deux ν'-uplets $(\lambda_1,\cdots,\lambda_{\nu'})$ C-indépendants tels que:

$$0=\sum\lambda_i\frac{X(P_i)}{P_i}=\sum\mu_i\frac{X(P_i)}{P_i}.$$

Considérons les formes fermées $\omega_\lambda=\sum\lambda_i\frac{dP_i}{P_i}$ et $\omega_\mu=\sum\mu_i\frac{dP_i}{P_i}$;

a) si $\omega_\lambda\wedge\omega_\mu\equiv 0$, il existe une fraction rationnelle $R_{\lambda,\mu}$ non constante telle que $\omega_\lambda=R_{\lambda,\mu}\cdot\omega_\mu$. Par différenciation on obtient $dR_{\lambda,\mu}\wedge\omega_\mu=0$ et par suite $R_{\lambda,\mu}$ est une intégrale première rationnelle de X.

b) si $\omega_\lambda\wedge\omega_\mu\not\equiv 0$, le champ X est intégrable.

On peut encore raffiner ce qui précède lorsque le champ X possède $\nu''\geq\nu(N,3)+3$ séparatrices. On trouvera en effet trois formes fermées ω_λ, $\omega_{\mu'}$, $\omega_{\mu''}$ C-indépendantes.

a′) Si l'un des $\omega_\lambda\wedge\omega_{\mu'}$, $\omega_\lambda\wedge\omega_{\mu''}$ ou $\omega_{\mu'}\wedge\omega_{\mu''}$ est identiquement nul on est dans une situation analogue à précédemment.

b′) Si $\omega_\lambda\wedge\omega_{\mu'}$ et $\omega_\lambda\wedge\omega_{\mu''}$ sont non nuls et si α_X désigne la deux forme duale de X: $\alpha_X=i_X dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$, on dispose de fractions rationnelles h' et h'' telles que:

$$\omega_\lambda\wedge\omega_{\mu'}=h'\cdot\alpha_X$$
$$\omega_\lambda\wedge\omega_{\mu''}=h''\cdot\alpha_X.$$

Par différenciation on obtient:

$$0=\frac{dh'}{h'}\wedge\alpha_X+d\alpha_X=\frac{dh''}{h''}\wedge\alpha_X+d\alpha_X$$

et par suite le quotient $H=h'/h''$ satisfait à $X(H)=0$. Il se pourrait que H soit constant, mais ceci conduirait à une situation de type a′). On obtient le:

THÉORÈME 2. *Soit X un champ algébrique de degré $N+1$ sur $\boldsymbol{C}^3$ ayant ν séparatrices algébriques.*

(i) *Si $\nu\geq\nu(N,3)+2$, X est ou bien intégrable ou bien possède une intégrale première rationnelle (non constante).*

(ii) *Si $\nu\geq\nu(N,3)+3$, X possède une intégrale première rationnelle (non constante).*

Appliquons ce qui précède aux champs de vecteurs de $\boldsymbol{C}^3$ dont toutes les courbes intégrales sont planes:

THÉORÈME 3. *Soit X un champ de vecteurs polynomial de $\boldsymbol{C}^3$ dont toutes les trajectoires sont planes. Alors X possède une intégrale première rationnelle. Plus précisément X est ou bien complètement intégrable, ou bien tangent à un feuilletage linéaire du type $z=$cste ou $y/x=$cste.*

PREUVE. Si la trajectoire générique de X est une courbe algébrique alors X est complètement intégrable; sinon soit γ une feuille générale de $\mathcal{F}_X$ et M_γ le plan osculateur à γ, $\gamma\subset M_\gamma$; comme X est tangent à M_γ le long de γ qui est transcendante, X est tangent à M_γ. Par conséquent X possède une infinité de séparatrices planes et donc une intégrale première R rationnelle non constante. Visiblement la fibre de R passant par γ est M_γ, sinon γ serait algébrique. On termine en remarquant qu'un feuilletage par plans affines est du type $z=$cste ou $y/x=$cste.

PROPOSITION 4. *Soit X un champ algébrique sur C^3 intégrable ne possèdant que des singularités isolées. Alors X possède une séparatrice.*

PREUVE. Soient ω_i, $i=1, 2$, $\omega_i \wedge d\omega_i = \omega_i(X) = 0$, $\operatorname{cod} S(\omega_i) \geq 2$; la deux forme $\omega_1 \wedge \omega_2$ s'annule nécessairement sur une hypersurface Σ sinon X aurait des singularités en codimension 2; Σ est lieu des tangences de $\mathcal{F}_{\omega_1}$ et $\mathcal{F}_{\omega_2}$; comme $\operatorname{cod} S(X) \geq 3$, Σ est clairement invariant par X et donc est une union de séparatrices.

Problème 1. Etablir le théorème 2 en dimension supérieure à 4.

Problème 2. On voit apparaître dans ce qui précède la famille des plans osculateurs aux trajectoires; à un champ X algébrique dans C^3 dont la trajectoire générique n'est pas une droite, on peut associer un champ de 2-plans algébriques $M(X)$ (i.e. noyau d'une forme de Pfaff algébrique): si m est un point générique $M(X)_m$ est le plan osculateur en m à la feuille passant par m. Par exemple si X est un champ de vecteurs affine on vérifie facilement que le champ de plans $M(X)$ est intégrable et définit un feuilletage de codimension un possèdant une intégrale première de type Liouville $\sum \lambda_i \frac{dP_i}{P_i} + R$, P_i et R rationnels. On demande la classification des champs X sur C^3 de petit degré tels que $M(X)$ soit intégrable. Remarquant que les trajectoires de X sont lignes asymptotiques des feuilles de $\mathcal{F}_{M(X)}$, on notera que $\mathcal{F}_{M(X)}$ ne peut présenter de singularités de type Morse.

Introduisons maintenant une nouvelle notion toujours en dimension trois; disons que X est *super-intégrable* si X est tangent à trois feuilletages algébriques de codimension un $\mathcal{F}_{\omega_i}$, $i=1, 2, 3$, distincts. (Par exemple un champ de vecteurs linéaire diagonal $\sum \lambda_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$ est super-intégrable).

Visiblement il existe une fraction rationnelle R telle que:

$$\omega_3 \wedge (\omega_1 + R\omega_2) = 0.$$

Il est clair que $\omega_1 + R\omega_2$ est intégrable si et seulement si R satisfait l'équation différentielle linéaire:

$$dR \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 + R(\omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1) = 0. \tag{1}$$

Par suite $\omega_1 + tR\omega_2$, $t \in C$, est intégrable, ce qui définit un faisceau linéaire de feuilletages contenant X. Quitte à changer de ω_i on supposera que $R=1$ et que le faisceau est donné par $\omega_t=t\omega_1+(1-t)\omega_2$, avec $\operatorname{cod} S(\omega_t)\geq 2$ pour $t=1, 2$, $S(\omega_t)$ désignant l'ensemble singulier de ω_t.

PROPOSITION 5. *Supposons qu'il existe un feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ contenant X et ne faisant pas partie du faisceau $\mathcal{F}_{\omega_t}$. Alors X possède une intégrale première rationnelle.*

PREUVE. Avec les conventions précédentes on a:

$$\omega_1\wedge d\omega_2+\omega_2\wedge d\omega_1=0.$$

Il existe r rationnelle tell que $(\omega_1+r\omega_2)\wedge\omega=0$; visiblement r est non constante et vérifie $\omega_1\wedge\omega_2\wedge dr=0$.

Si X est super-intégrable et si $z=$cste est une famille générique de plans parallèles les restrictions $\bar{\omega}_{i,z}$, $i=1, 2, 3$, des ω_i à ces plans définissent une famille de webs (cf. [Ch], [N]); cette famille est localement triviale près d'un point m où $\mathcal{F}_X$ est transverse à la fibration $z=$cste. Désignons par $K(x, y, z_0)dx\wedge dy$ l'invariant d'holonomie du web au point (x, y) dans le plan $z=z_0$; le calcul explicite de K (cf. [N]) montre que K est une fraction rationnelle et le fait que $\mathcal{F}_X$ trivialise localement se traduit par:

$$\bar{X}(K)+K\operatorname{div}\bar{X}=0 \tag{2}$$

$$\text{où } \bar{X}=\frac{X}{X_3} \text{ avec } X=X_1\frac{\partial}{\partial x}+X_2\frac{\partial}{\partial y}+X_3\frac{\partial}{\partial z}.$$

Si $\bar{K}=X_3\cdot K$ on obtient:

$$X(\bar{K})+\bar{K}\operatorname{div}X=0. \tag{3}$$

Nous allons envisager deux éventualités suivant que $\bar{K}$ est nul ou non.

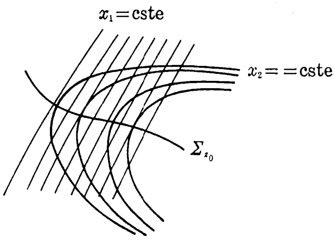
a) $\bar{K}$ est non nul. C'est évidemment le cas le plus pauvre. Chaque composante de $\bar{K}=0$ est une séparatrice de X; si α_X est la deux forme duale de X, $\bar{K}\alpha_X$ est fermée. Notamment si $P_i=0$ sont les pôles de $\bar{K}$ on trouvera des constantes $\lambda_{i,j}$ et une 1-forme Θ rationnelle à pôles sur les $P_i=0$ tels que

$$\bar{K}\cdot\alpha_X=\sum\lambda_{i,j}\frac{dP_i}{P_i}\wedge\frac{dP_j}{P_j}+d\Theta.$$

b) *$\bar{K}$ est identiquement nul.* En tout point régulier le web est hexagonal. Ceci signifie que si en m, $\bar{\omega}_{1,z_0}$ et $\bar{\omega}_{2,z_0}$ sont indépendants il existe un système de coordonnées (u, v) tel que la fonction $tu+(1-t)v$ soit intégrale première de $\bar{\omega}_{t,z_0}$. Un calcul élémentaire permet de constater que si (u', v') est un second système de coordonnées comme ci-dessus alors (u', v') diffère de (u, v) d'une constante additive. Les différentielles $tdu+(1-t)dv$ ne dépendent donc pas du choix de (u, v) et par conséquent se recollent sur la section plane $z=z_0$ privée des points de colinéarités $\Sigma_{z_0}=\{(x, y),\ \bar{\omega}_{1,z_0}\wedge\bar{\omega}_{2,z_0}(x, z, z_0)=0\}$ en des formes fermées $\bar{\omega}_{t,z_0}$.

LEMME 1. *Soit $m_0=(x_0, y_0)$ un point de Σ_{z_0}, m_0 non singulier pour $\bar{\omega}_{1,z_0}$ et $\bar{\omega}_{2,z_0}$. Si le germe $\Sigma_{z_0,m}$ ne coïncide pas avec la feuille de $\bar{\omega}_{1,z_0}$ (et à fortiori de $\bar{\omega}_{2,z_0}$), du et dv s'étendent en m_0.*

PREUVE. Soit U un petit disque en m_0, $U^*=U-\Sigma_{z_0}$. Si U est assez petit $\bar{\omega}_{1,z_0}$ et $\bar{\omega}_{2,z_0}$ possèdent sur U des intégrales premières submersives x_1 et x_2 tangentes le long de Σ_{z_0}, $x_i(m_0)=0$.



Pour $(x, y)\in U^*$ on a:

$$du=l_1(x_1)dx_1$$
$$dv=l_2(x_2)dx_2$$

où visiblement l_1 et l_2 sont définis holomorphes sur $x_1(U)$ et $x_2(U)$. On peut donc prolonger du et dv par les formules ci-dessus.

Si Σ (respectivement $\bar{\Sigma}$) désigne les points de contact de $\mathcal{F}_{\omega_1}$ et $\mathcal{F}_{\omega_2}$ dans $\boldsymbol{C}^3$ (respectivement dans $\boldsymbol{PC}(3)$), on va, en utilisant le champ X, "épaissir" la construction précédente et produire des 1-formes fermées $\Omega_t=t\Omega_1+(1-t)\Omega_2$ holomorphes sur $\boldsymbol{C}^3-\Sigma$, annulant X et recollant les $\bar{\omega}_{t,z}$, i.e.:

$$\Omega_t\Big|_{z=z_0}=\bar{\omega}_{t,z_0}.$$

Si $\operatorname{cod}\Sigma\geq 2$ les Ω_t s'étendent par Hartogs à $\boldsymbol{C}^3$ et si $\operatorname{cod}\bar{\Sigma}\geq 2$ elles s'étendent *polynomialement*; comme Ω_t est colinéaire à ω_t dans ce dernier cas, X sera complètement intégrable (polynomialement).

Supposons maintenant $\operatorname{cod} \Sigma=1$ et désignons par $P_1 \cdots P_p=0$ l'équation réduite de l'adhérence des points où Σ est précisément de codimension un. Clairement les Ω_t s'étendent à $\boldsymbol{C}^3-(P_1 \cdots P_p=0)$ et il existe des constantes λ_j, $\mu_j \in \boldsymbol{C}$ et H_1, $H_2 \in \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^3-(P_1 \cdots P_p=0))$ telles que

$$\Omega_t=\Sigma(t\lambda_j+(1-t)|\mu_j)\frac{dP_j}{P_j}+d(tH_1+(1-t)H_2).$$

On obtient finallement le:

THÉORÈME 6. *Soit X un champ algébrique super intégrable dans $\boldsymbol{C}^3$. On est dans l'une des situations suivantes*:

a) *Il existe $\bar{K}$ rationnelle telle que la deux forme duale de $\bar{K}\cdot X$ soit fermée.*

b) *X possède deux intégrales premières $\sum\lambda_i \operatorname{Log} P_i+H_1$, et $\sum\mu_i \operatorname{Log} P_i+H_2$ indépendantes, P_i polynômes, $H_j \in \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^3-(P_1 \cdots P_p=0))$.*

Nous allons pour terminer ce paragraphe donner un critère numérique assurant qu'en général les H_i sont rationnels. Pour cela nous allons définir un invariant de contact du web $\bar{\omega}_{t,z_0}$. Soit $m_0 \in \Sigma_{z_0}$; si l'on est dans les hypothèses du lemme 1 nous dirons que m_0 est une singularité générique du rang. Supposons que $\bar{\omega}_{1,z_0}$ et $\bar{\omega}_{2,z_0}$ ne s'annulent pas sur m_0; dire que m_0 est une singularité non générique signifie que Σ_{z_0} coïncide localement avec la feuille de ω_1 (et ω_2) passant par m; on peut alors trouver des coordonnées x et y holomorphes s'annulant en m_0 telles que x soit intégrale première de ω_1; ω_2 possède une intégrale première submersive $f(x, y)$ du type $f(x, y)=x(1+\alpha(x, y))$ avec α holomorphe non constante, $\alpha(o)=0$. L'ensemble singulier Σ_{z_0} est ici dans les coordonnées (x, y) l'axe $x=0$. Disons que m_0 est une *singularité régulière du* rang si $\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}(o, o)\neq 0$; le lemme suivant est intéressant en lui-même pour la classification globale des webs algébriques hexagonaux sur $\boldsymbol{C}^2$ ou $\boldsymbol{PC}(2)$.

LEMME 2. *Si le web $\bar{\omega}_{i,z_0}$ hexagonal $i=1, 2, 3$ est à singularité régulière en m_0 les différentielles $tdu+(1-t)dv$ s'étendent méromorphiquement au voisinage de m_0.*

PREUVE. Soient x, y et f comme précédemment; il existe des fonctions holomorphes uniformes définies sur un disque épointé $D(o, \rho)-\{0\}$ de $\boldsymbol{C}$ telles que:

$$du = l(x) \cdot dx$$
$$dv = L(f(x, y))df.$$

Soient A_1 et A_2 des unités telles que $\varpi_{1,z_0} = A_1 dx$, $\varpi_{2,z_0} = A_2 df$. L'égalité:

$$\begin{aligned} 0 &= \varpi_{t,z_0} \wedge d(tu + (1-t)v) \\ &= (tA_1 dx + (1-t)A_2 df) \wedge (d(tl(x)dx + (1-t)L(f(x, y))df)) \end{aligned}$$

se traduit par la suivante:

$$[A_1(x, y)L(f) - A_2(x, y)l(x)]\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Si $A(x, y) = A_1(x, y)/A_2(x, y)$ on obtient:

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y)L(f) + A(x, y)L'(f)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Comme $f = x(1+\alpha)$ est une coordonnée, L vérifie une équation linéaire de type Fuchs puisque $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$ unité. Par conséquent L est à croissance modérée et donc méromorphe. Il en est de même pour l. D'où le résultat.

Le lemme 2 permettra d'affirmer que les H_i du théorème 6 sont rationnels si les contacts de $\bar{\mathcal{F}}_{\omega_i}$ et $\bar{\mathcal{F}}_{\omega_2}$ sont génériquement réguliers le long de $\bar{\Sigma}$ (ce qui signifie que l'on aura aux points généraux de contact des modèles locaux du type $x = \text{cste}$ et $x(1+\alpha) = \text{cste}$, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial y} \neq 0$).

Avant de terminer ce paragraphe signalons que dans [S-W] on donne une méthode intéressante pour trouver des intégrales premières de champs algébriques de petit degré.

II. Solutions unicursales, separatrices et uniformisation

Soit X un champ algébrique de $\boldsymbol{C}^n$; par feuille de $\mathcal{F}_X$ (resp. $\bar{\mathcal{F}}_X$) on entendra une feuille du feuilletage régulier induit par X sur $\boldsymbol{C}^n - S(\mathcal{F}_X)$, avec comme précédemment $\operatorname{cod} S(\mathcal{F}_X) \geq 2$, (resp. $\boldsymbol{PC}(n) - S(\bar{\mathcal{F}}_X)$).

Soit $\mathcal{L}$ une feuille de $\mathcal{F}_X$; disons que $\mathcal{L}$ est unicursale s'il existe une application entière $\varphi: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^n$ non constante telle que $\varphi(\boldsymbol{C}) \subset \mathcal{L}$. Par exemple si X_0 est un champ linéaire les feuilles de $\mathcal{F}_{X_0}$ sont unicursales. On a le:

THÉORÈME 7. *Soit X un champ algébrique de $\boldsymbol{C}^n$ possèdant au moins $n+1$ séparatrices. Si $\mathcal{F}_X$ possède une feuille unicursale alors $\mathcal{L}$ est contenue dans une hypersurface algébrique $H_{\mathcal{L}}$; de plus si $n=3$ et si $\bar{\mathcal{L}}$ n'est pas une courbe algébrique alors $H_{\mathcal{L}}$ est une séparatrice de X.*

PREUVE. Elle résulte d'une version du théorème de Picard en dimension supérieure à un, basée sur un théorème de Borel [Bo] concernant les sommes d'exponentielles:

Si $\varphi : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^n$ est une application entière qui évite $n+1$ hypersurfaces algébriques alors l'image de φ est contenue dans une hypersurface algébrique [L] [Ni].

COROLLAIRE 8. *Soit X un champ algébrique de $\boldsymbol{C}^3$ possèdant un nombre fini de séparatrices $H_1, \cdots, H_s$ avec $s \geq 4$. Soit $m \in \boldsymbol{C}^3 - U(H_i=0)$, $\mathcal{L}_m$ la feuille passant par m. Le revêtement universel de $\mathcal{L}_m$ est le disque de Poincaré.*

REMARQUE. On a des énoncés analogues dans $\boldsymbol{PC}(n)$, mais on doit supposer que $\bar{\mathcal{F}}_X$ a au moins $n+2$ séparatrices algébriques.

Problème 3. Soit X un champ polynomial possèdant $(2n+1)$ hyperplans H_i en position générale comme séparatrices. Le complément Z de ces hyperplans est hyperbolique au sens de Kobayashi; notamment chaque feuille $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}_X$ non contenue dans UH_i est hyperbolique; $\mathcal{L}$ est-elle complète en général? Dans quel cas la famille $\{\varphi_{\mathcal{L}}\}_{\mathcal{L} \subset \boldsymbol{C}^n - UH_i}$ des uniformisantes, $\varphi_{\mathcal{L}} : D \to \mathcal{L} \subset Z$ est-elle une famille normale?

On obtient des résultats plus précis pour certains types de séparatrices; par exemple.

THÉORÈME 9. *Soit $\mathcal{F}_X$ un champ algébrique sur $\boldsymbol{C}^3$ possèdant une variété de Fermat de d^0d comme séparatrice. Si $d>12$ et si $\mathcal{L}$ est une feuille de $\mathcal{F}_X$ unicursale alors $\bar{\mathcal{L}}$ est une courbe algébrique.*

PREUVE. Elle se déduit immédiatement de résultats de Green (cf. [L], p. 205, th. 4.1 et p. 211, th. 4.3).

REMARQUE. On peut adapter les résultats 7, 9 aux feuilletages de codimension un.

III. Feuilletages algébriques de codimension un

Si ω est une 1-forme polynomiale sur C^n, $\omega=\sum a_i dx_i$, le degré de ω, $d^0\omega$, est le maximum des degrés des a_i. L'ensemble $\mathcal{F}(n, d)$ des 1-formes de degré d sur C^n vérifiant la condition d'intégrabilité de Frobenius $\omega\wedge d\omega=0$ est une variété algébrique obtenue comme une intersection de quadriques. On note $P\mathcal{F}(n, d)$ l'espace $\mathcal{F}(n, d)/\sim$ où $\sim$ est définie par $\omega\sim\omega'$ si et seulement si $\omega=\lambda\omega'$, $\lambda\in C^*$. On connait quelques composantes irréductibles des $P\mathcal{F}(n, d)$ ([C–M]) mais la décomposition totale, avec description des feuilletages correspondant aux points génériques de chaque composante, n'est actuellement connue que pour les $P\mathcal{F}(2, d)$, $P\mathcal{F}(n, 0)$, $P\mathcal{F}(n, 1)$, $P\mathcal{F}(n, 2)$ (cf. [C–M]). La description de $P\mathcal{F}(3, 3)$ n'est pas triviale: on doit analyser l'intersection de 56 quadriques dans un espace de dimension 60 ! On peut montrer à l'aide d'un ordinateur que chaque composante de la variété $P\mathcal{F}(3, 3)$ est unirationnelle; toutefois le calcul ne permet pas de détecter les composantes irréductibles (redondances dans les équations).

Problème 4. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $P\mathcal{F}(3, 3)$.

Problème 5. Montrer que les composantes de $P\mathcal{F}(n, d)$ sont unirationnelles; c'est vrai pour toutes les composantes connues actuellement.

Il y a un autre fait remarquable: chaque composante Z de $P\mathcal{F}(n, d)$ *connue* est règlée au sens où l'intersection de l'espace tangent affine $T_\omega Z$ avec Z en un point générique ω contient au moins une droite (on considère $P\mathcal{F}(n, d)$ plongé naturellement dans l'espace des 1-formes de degré d). Plaçons-nous en dimension $n=3$; si une composante Z est règlée au point ω_1, Z contiendra une droite de feuilletages $\omega_t=t\omega_1+(1-t)\omega_2$. Le champ de vecteur X définissant l'intersection $\mathcal{F}_{\omega_1}\cap\mathcal{F}_{\omega_2}$ est alors super intégrable et l'analyse du théorème 6 permet d'obtenir des renseignements de nature globale via des propriétés se lisant localement (nullité ou non d'un invariant d'holonomie). Toutes les composantes de $P\mathcal{F}(n, d)$ sont-elles règlées?

Nous allons maintenant nous restreindre à un cas très spécial de feuilletages algébriques celui des feuilletages de Ricatti.

IV. Equations de Ricatti

Le résultat qui suit est bien classique; les solutions de l'équation de Ricatti:

(1) $y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$, a, b, c fonctions entières,

sont des fonctions méromorphes. En effet (1) détermine un feuilletage de l'espace $C\times PC(1)$ transverse à la fibration $\{x\}\times PC(1)$; comme C est simplement connexe les solutions de (1) sont des fonctions holomorphes de C dans $PC(1)$.

Si l'on suppose maintenant que les a, b, c sont des fractions rationnelles la situation est plus compliquée: (1) détermine un feuilletage $\mathcal{F}_{(1)}$ de $(C-U\{x_i\})\times PC(1)$ transverse à la fibration $\{x\}\times PC(1)$, les x_i étant les pôles des a, b, c. Les droites $x=x_i$ sont des séparatrices de $\mathcal{F}_{(1)}$ et si les singularités de $\overline{\mathcal{F}}_{(1)}$ ne sont pas trop dégénérées (*), $\overline{\mathcal{F}}_{(1)}$ est essentiellement caractérisé par son groupe d'holonomie $g_{(1)}$ qui est un sous groupe de Klein. Par exemple (toujours avec une hypothèse de type (*) et a, b, c rationnels) on a:

-les solutions de (1) sont rationnelles si et seulement si $g_{(1)}$ est trivial

-toutes les feuilles de $\overline{\mathcal{F}}_{(1)}$ sont algébriques (i.e. $\overline{\mathcal{F}}_{(1)}$ possède une intégrale première rationnelle) si et seulement si $g_{(1)}$ est fini.

On peut montrer [L-N] que tout sous groupe de Klein $g_{(1)}$ de type fini est groupe d'holonomie d'une équation de type (1) à coefficients rationnels; on dispose donc pour la description de ces équations de toute la théorie des groupes de Klein (Ahlfors, Sullivan, Kruskal...) mais aussi d'importants résultats d'algèbre comme le fameux théorème de Tits suivant:

THÉORÈME [T]: *Soit G un sous groupe de $GL(n)$; alors:*
(i) *ou bien G contient un sous groupe résoluble d'indice fini*
(ii) *ou bien G contient un sous groupe libre de rang deux.*

Si par exemple $g_{(1)}$ est résoluble alors (1) possèdera une solution uniforme (rationnelle si une hypothèse de type (*) est satisfaite) et l'équation de Ricatti se réduira à une équation "linéaire avec second membre".

Considérons maintenant des équations de Ricatti sur $PC(2)\times PC(1)$ c'est à dire des feuilletages algébriques de codimension un transverse à

(*) Par exemple toutes les singularités de $\overline{\mathcal{F}}_{(1)}$ sont réduites ([M-M]) de rang maximum.

la fibration en droites $\{(x, y)\}\times PC(1)$ en dehors de $\Gamma\times PC(1)$ où Γ est une courbe algébrique de la base $PC(2)$. De tels feuilletages sont définis dans une carte affine (x, y, z) par des formes de type:

$$\omega_R = C(x, y)dz + z^2\omega_0 + z\omega_1 + \omega_2$$

où les ω_i sont des 1-formes polynomiales de deux variables: $\omega_i = a_i(x, y)dx + b_i(x, y)dy$; C est un polynôme s'annulant précisément sur la courbe Γ. On obtient un feuilletage régulier de $(PC(2)-\Gamma)\times PC(1)$ transverse à la fibration verticale et on dispose encore du groupe d'holonomie g, représentation de $\Pi_1(PC(2)-\Gamma)$ dans le groupe de Moebius des transformations de la droite projective. Si Γ est une courbe lisse, g sera un groupe fini et (en général) les feuilles de $\overline{\mathcal{F}}_{\omega_R}$ seront algébriques: $\overline{\mathcal{F}}_{\omega_R}$ possèdera une intégrale première rationnelle. Si Γ n'a que des singularités ordinaires, g sera abélien ([D]). Sauf cas exceptionnel g possèdera deux points fixes. Ces deux points fixes correspondront à deux solutions uniformes $z=\varphi_i(x, y)$, $i=1, 2$ qui seront, modulo des hypothèses de régularité des singularités, rationnelles. La procédure d'intégration sera celle des équations de Ricatti possèdant deux solutions particulières: elle se réduira à une quadrature $dz=\Omega_0=A(x, y)dx+B(x, y)dy$ où Ω_0 est une 1-forme fermée rationnelle et par suite ω_R possèdera une intégral première de type Liouville.

Lorsque Γ présentera des singularités plus compliquées, les groupes d'holonomie g seront eux aussi plus complexes, pour dégénérer, lorsque Γ sera constituées de droites "parallèles", finalement sur la situation de la dimension deux.

Problème 6. Soit $P\mathcal{F}(3, d)_R$ le sous espace de $P\mathcal{F}(3, d)$ constitué des équations de Ricatti: il s'agit des équations de Pfaff affinement équivalentes à une équation de type ω_R. Donner la décomposition en composantes irréductibles de $P\mathcal{F}(3, d)_R$. Dans $P\mathcal{F}(3, d)$ les feuilletages triviaux (ceux qui s'obtiennent comme un produit d'un feuilletage de $\boldsymbol{C}^2$ par $\boldsymbol{C}$) constituent une composante de $P\mathcal{F}(3, d)$; en résulte que les équations ω_R qui se réduisent à une équation de Ricatti ordinaire sur $PC(1)\times PC(1)$ constituent une composante $P\mathcal{F}(3, d)_R$.

V. Equations différentielles algébriques ayant des solutions "spéciales"

Dans les traités anciens on aborde la théorie des surfaces (et des équations aux dérivées partielles) via l'étude très détaillée de "surfaces particulières", surfaces règlées, surfaces développables, surfaces à courbure constante, surface minima etc.... Toutes ces surfaces étant en fait associées à des équations aux dérivées partielles naturelles. Cette démarche n'a été que peu suivie dans l'étude des feuilletages de codimension un où l'on s'attache plus à la description de phénomènes généraux qu'à l'observation de cas particuliers. Par exemple la littérature consacrée aux feuilletages minimaux n'est pas considérable alors qu'il s'agit d'un problème naturel. Ainsi la généralisation du théorème de Bernstein [Be] aux feuilletages (réguliers) de $\boldsymbol{R}^3$ n'est que très récente [M].

THÉORÈME (Meek). *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier de $\boldsymbol{R}^3$ en surfaces minimales; alors $\mathcal{F}$ est un feuilletage en plans parallèles.*

Toutefois on peut produire d'autres feuilletages minimaux de $\boldsymbol{R}^3$ mais avec *singularités*:

-La 1-forme $\omega_1=\cos x\cdot\cos y dz-\cos x\cdot\sin y dy-\cos y \sin x dx$ définit un feuilletage analytique de $\boldsymbol{R}^3$ en surfaces de Scherk ; ce feuilletage n'est pas algébrique.

-La 1-forme $\omega_2=(x^2+y^2)dz+(ydx-xdy)$ définit sur $\boldsymbol{R}^3$ un feuilletage en hélicoïdes. Les singularités sont sur l'axe oz ; ce feuilletage est algébrique de degré deux.

Problème 7. Classifier les feuilletages *minimaux et algébriques* en dimension trois. Les surfaces minimales font partie d'une classe plus grande que sont les *surfaces de translation* (Monge); une surface S est de translation si elle possède en tout point régulier une paramétrisation du type $(s, t)\rightarrow\varphi(s)+\Psi(t)$; on dit que S est une surface de *double translation* si en chaque point régulier S possède deux paramétrisations $\varphi(s)+\Psi(t)$ indépendantes. Un feuilletage algébrique de $\boldsymbol{C}^3$, $PC(3)$ ou $\boldsymbol{R}^3$ sera dit de double translation si chaque feuille est de double translation. Voici quelques exemples:

-La surface $z=x^2+y^2+ax+by+c$ est visiblement de double translation par suite les formes $\omega_3=dz-d(x^2+y^2+ax+by)$ et $\omega_4=(x^2+y^2+ax+by)dz-zd(x^2+y^2+ax+by)$ définissent des feuilletages de double translation.

-La surface $xyz=ax+by+cz$ qu'étudie Poincaré dans [P] est aussi de double translation. Elle permet de construire les feuilletages de double translation définis par:

$$\omega_5 = zd(xyz - ax - by) - (xyz - ax - by)dz$$
$$\omega_6 = (ax + by + cz)dxyz - (xyz)d(ax + by + cz).$$

Utilisant la caractérisation des surfaces de double translation comme diviseur thêta dans la Jacobienne d'une courbe de degré 4 [S-D] il semble raisonnable de s'attaquer au:

Problème 8. Classifier les feuilletages algébriques de $\boldsymbol{C}^3$ qui sont de double translation.

La classification des feuilletages de simple translation semble moins aisée. Toutefois on peut décrire assez facilement les feuilletages algébriques dont les feuilles sont localement du type (*) $z = p(x) + q(y)$ (i.e. annulent l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, ceci aux points où le feuilletage est transverse à la projection $(x, y, z) \to (x, y)$). On distingue trois types de tels feuilletages:

1) ceux donnés par les niveaux d'une fraction rationnelle vérifiant (*); chaque niveau est obtenu par "addition" de deux courbes algébriques planes.

2) ceux donnés par les niveaux de fonctions de type Liouville:

$$F(x, y, z) = z + \sum \lambda_i \operatorname{Log}(x - x_i) + \sum \mu_j \operatorname{Log}(y - y_j) + \alpha(x) + \beta(y)$$

$$\lambda_i,\ \mu_j \in \boldsymbol{C},\ \alpha \text{ et } \beta \text{ rationnelles},\ x_i,\ y_j \in \boldsymbol{C}.$$

3) ceux obtenus comme pull-back d'un feuilletage algébrique de $\boldsymbol{C}^2$ par une application rationnelle de la forme suivante (à affinité près):

$$(x, y, z) \to (x, z + f(y)).$$

Dans les cas 2 et 3 on peut produire facilement des exemples avec feuilles denses.

Ces résultats s'obtiennent en examinant la taille du corps des intégrales premières rationnelles de certains champs de vecteurs tangents aux feuilletages. Ceci suggère d'examiner le problème plus général.

Problème 9. Etudier les feuilletages algébriques dont les feuilles locales $z = f(x, y)$ sont solutions d'une équation aux dérivées partielles de type Monge-Ampère. Par exemple quels sont les feuilletages algébriques de $\boldsymbol{C}^3$ ou $\boldsymbol{R}^3$ dont les feuilles locales $z = f(x, y)$ sont solutions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} -$

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2=1$ (**); on sait depuis Jörgen que les seules fonctions $f: \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}$ de classe C^2 satisfaisant (**) sont des polynômes quadratiques. Y-a-t-il dans le contexte des feuilletages algébriques un théorème de rigidité analogue ?

Bibliographie

[Be] Bernstein, S., Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles de type elliptique, Comm. Soc. Math. Krakov **15** (1915-1917), 38-45.

[Bo] Borel, E., Sur les zéros des fonctions entières, Acta Math. **20** (1987), 357-396.

[C] Cerveau, D., Feuilletages règlés, C. R. Acad. Sci. Paris sér. I **307** (1988), 33-36.

[C-M] Cerveau, D. et F. Maghous, Feuilletages algébriques de $\boldsymbol{C}^n$, C. R. Acad. Sci. Paris sér. I **303** (1986), 643-645.

[Ch] Chern, S. S., Web geometry, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), 1-8.

[D] Deligne, P., Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien, Séminaire Bourbaki, vol. 1979-80, nov. 79, Lecture Notes in Math. vol. 842, Springer, Berlin-New York, 1981, 1-10.

[G] Gomez-Mont, X., Integrals for holomorphic foliations with singularities having all leaves compact, Preprint U. N. Mexico.

[J] Jouanolou, J. P., Equations de Pfaff algébriques, Lecture Notes in Math. vol. 708, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[L] Lang, S., Introduction to complex hyperbolic spaces, Springer, 1987.

[L-N] Lins-Neto, A., Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two, J. Differential Geom. **26** (1987), 1-31.

[M-M] Mattei, J. F. et R. Moussu, Holonomie et intégrales premières, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), 469-523.

[M] Meek, W., III, The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature, J. Differential Geom. **27** (1988), 539-552.

[N] Nakai, I., Topology of complex webs of codimension one and geometry of projective space curves, Topology **26** (1987), 475-504.

[Ni] Nishino, T., Le théorème de Borel et le théorème de Picard, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **299** (1984), 667-668.

[P] Poincaré, H., Œuvres t. IV, p. 384-472—Œuvres t. VI, p. 13-37. Gauthier Villars, Paris, 1950.

[S-D] Saint Donat, B., Variétés de translation et théorème de Torelli, C. R. Acad. Sci. Paris **2801** (1975), 1611-1612.

[S-W] Strelcyn, J. M. and S. Wojciechowski, A method of finding integrals for three dimensional dynamical systems, Phys. Lett. A **133** (1988), 207-212.

[T] Tits, J., Free subgroups in linear groups, J. Algebra **20** (1972), 250-270.

(Reçu le 27 février, 1989)

IRMAR
Campus de Beaulieu
35 042-Rennes Cedex-France