J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
Sect. IA, Math.
36 (1989), 703–716.

Confluence et résurgence

Dédié au Professeur T. Kimura, pour son 60-ème anniversaire

Par Jean-Pierre RAMIS

J'avais depuis longtemps remarqué l'analogie entre les formules donnant *la représentation de monodromie des équations hypergéométriques* calculées dans la base "usuelle" (fonctions de Kummer) à l'origine [Gou], [Kl], [Poo], [Er] [Kat],...) et celles donnant les *multiplicateurs de Stokes* à l'infini *des équations hypergéométriques confluentes*, sous la forme de Kummer ([JLP], [Ol], [MR]). Une explication "superficielle" est le fait que toutes ces formules dérivent d'intégrales de Barnes-Mellin, ce qui justifie la présence de *produits de fonctions* Γ, mais il paraissait plus éclairant *de dériver les secondes des premières* via la *confluence*. Il y a, à mon avis, deux[1] façons "naturelles" de le faire. Je décris ici la plus simple (qui est dans l'esprit de [Gar], et [Mar]) obtenue en *interdisant* au "*paramètre de confluence*" b de prendre des *valeurs réelles*.[2] L'autre à l'opposé, consiste à faire prendre à b une *suite de valeurs réelles* (sur laquelle $e^{2i\pi b}$ reste *constant*) et à utiliser l'interprétation des multiplicateurs de Stokes comme "monodromie le long de lacets dans un voisinage infinitésimal de la singularité essentielle" détaillée dans [MR] (le choix de la suite, ou de $e^{2i\pi b}$ sur le cercle unité correspondant à un "paramètre aléatoire" pour cette monodromie). Mais dans le cas non linéaire, et pour $b \in \boldsymbol{Q}$, interviennent des problèmes de petits diviseurs, et (même dans le cas linéaire) il apparaît "très près du réel" des singularités pour des formules de développement en série (telles celles écrites ci-dessous): pour toutes ces raisons je me propose de revenir ultérieurement sur cette deuxième approche.

La différence entre les deux méthodes provient du très simple phénomène suivant: si l'on considère la *monodromie* de $(1-t/b)^{-b}=t^{-b}(1/t-1/b)^{b}$ autour de b ou ∞ sur la sphère de Riemann on trouve $e^{\pm 2i\pi b}$: cette monodromie est "*violemment explosive*" ou "*violemment contractante*"

[1] qu'il est possible d'unifier [cf. p. 12, infra].

[2] On impose en fait $\operatorname{Arg} b$ fixe et $\neq 0 \pmod{\pi}$.

selon le signe[3] de $\operatorname{Im} b$ dans la *première approche* (ce comportement changeant "brusquement" quand b traverse l'axe réel...); elle est de module un et *constante* dans la *deuxième approche.*

Le but de cet article est de décrire l'"*exemple de base*" d'une théorie *qui reste à faire* (tout comme l'étude par Riemann [R] de l'équation hypergéométrique s'est révélée la base de la Théorie des équations de Fuchs et de la correspondance de Riemann-Hilbert). (D'où une description encore "heuristique" de formules qui elles sont précises...)

I. Formules de connexion pour l'équation hypergéométrique

L'opérateur hypergéométrique s'écrit:

$$D_{a,b,c}=\delta(\delta+c-1)-z(\delta+a)(\delta+b), \qquad \text{avec } \delta=z\frac{d}{dz} \ (a, b, c\in \boldsymbol{C}). \tag{1.1}$$

On a *trois points singuliers* $0, 1, \infty\in P^1(\boldsymbol{C})$; ils sont *réguliers*.
On extrait des 24 relations de Kummer (on se place dans la suite dans le cas "générique": pas de "solution logarithmique") des systèmes fondamentaux de solutions. (Ces solutions sont des *vecteurs propres* pour *l'opérateur de monodromie* autour de la singularité correspondante, normalisés en relation avec le *choix d'une coordonnée locale*, "uniformisante"). On notera que ce choix est *le seul possible* tel que la fonction hypergéométrique ${}_2F_1(\cdot,\cdot;\cdot;\cdot)$ fasse figurer le paramètre b *à un seul endroit.* (Ceci est *essentiel* et lié au choix ultérieur de b comme *paramètre de confluence*)
On note, comme à l'ordinaire

$$ {}_2F_1(a, b; c; z)=\sum_{n\geq 0}\frac{\langle a\rangle_n\langle b\rangle_n}{\langle c\rangle_n n!}z^n.$$

En 0:

$$\Sigma_0=(w_1, w_2), \text{ où } w_1(z)={}_2F_1(a, b; c; z) \text{ et } w_2(z)=z^{1-c}{}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z) \tag{1.2}$$

En 1:

(1.3) $\Sigma_1=(\omega_3, \omega_4)$, où

$$\omega_3(z)=z^{-a}{}_2F_1\left(a, a+1-c; a+b+1-c; 1-\frac{1}{z}\right) \text{ et}$$

[3] Et le sens des lacets...

$$\omega_4(z)=z^{a-c}(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left(c-a,\,1-a;\,c+1-a-b;\,1-\frac{1}{z}\right).$$

En ∞:

(1.4) $\Sigma_\infty=(w_5, w_6)$, où

$$w_5(z)=z^{-a}e^{i\pi a}{}_2F_1\left(a,\,a+1-c;\,a+1-b;\,1-\frac{1}{z}\right) \text{ et}$$

$$w_6(z)=z^{a-c}e^{i\pi(c-a)}(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left(1-a,\,c-a;\,b+1-a;\,\frac{1}{z}\right).$$

Pour ces formules et celles qui suivent on se reportera à [Lu] (ou [Poo]).

Dans la suite de ce paragraphe on considère les déterminations des w_i ($i=1,\cdots,6$) dans le demi-plan supérieur "du premier feuillet" de la surface de Riemann revêtement universel de $P^1(C)-\{0,1,\infty\}$, pointé en 2: $\arg z\in\,]0,\pi]$, $\arg(1-z)\in\,]-\pi,0[$. On passe d'un système fondamental de solutions de $D_{a,b,c}y=0$ à un autre (sur un ouvert simplement connexe) par une matrice de $GL(2;C)$ (fonction des paramètres a,b,c), la "matrice de connexion". On écrit, pour des raisons évidentes, Σ_i ($i=0,1,\infty$) comme vecteur-ligne et on multiplie *à droite* par la matrice de connexion.

$$\begin{aligned}
&\Sigma_0=\Sigma_\infty M_{0,\infty}; \quad \Sigma_\infty=\Sigma_0 M_{\infty,0}\\
(1.5)\qquad &\Sigma_0=\Sigma_1 M_{0,1}; \quad \Sigma_1=\Sigma_0 M_{1,0}\\
&\Sigma_1=\Sigma_\infty M_{1,\infty}; \quad \Sigma_\infty=\Sigma_1 M_{\infty,1}
\end{aligned}$$

avec

$${}^tM_{0,\infty}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} & \dfrac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}\\[2ex] \dfrac{\Gamma(b-a)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)}e^{i\pi(1-c)} & \dfrac{\Gamma(a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)}e^{i\pi(1-c)}\end{pmatrix};$$

$${}^tM_{0,1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a-b)} & \dfrac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c)}\\[2ex] \dfrac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} & \dfrac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}\end{pmatrix};$$

$${}^tM_{1,\infty}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(b-a)\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(1+b-c)\Gamma(b)}e^{-i\pi a} & \dfrac{\Gamma(a-b)\Gamma(c+1-a-b))}{\Gamma(a)\Gamma(1+a-c)}e^{-i\pi b}\\[2ex] \dfrac{\Gamma(b-a)\Gamma(c+1-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)}e^{i\pi(b-c)} & \dfrac{\Gamma(a-b)\Gamma(c+1-a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c-b)}e^{i\pi(a-c)}\end{pmatrix};$$

$$
{}^{t}M_{\infty,0}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)} & \dfrac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} \\ \dfrac{\Gamma(1+b-a)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)} & \dfrac{\Gamma(1+b-a)\Gamma(c-1)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} \end{pmatrix};
$$

$$
{}^{t}M_{1,0}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(b+1-c)\Gamma(a+1-c)} & \dfrac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ \dfrac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} & \dfrac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \end{pmatrix};
$$

$$
{}^{t}M_{\infty,1}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c-b)}e^{i\pi a} & \dfrac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(a)}e^{i\pi(c-b)} \\ \dfrac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-b)}e^{i\pi b} & \dfrac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(1+b-c)\Gamma(b)}e^{i\pi(c-a)} \end{pmatrix}.
$$

On a évidemment

$$
\begin{aligned} &M_{0,\infty}M_{\infty,0}=M_{0,1}M_{1,0}=M_{1,\infty}M_{\infty,1}=I \\ \text{et}\qquad &M_{0,\infty}=M_{1,\infty}M_{0,1}. \end{aligned}
$$

II. Formules de connexion pour l'équation hypergéométrique confluente

L'équation hypergéométrique confluente s'écrit:

(2.1) $$\tilde{D}_{a,c}=\delta(\delta+c-1)-t(\delta+a),\qquad \text{avec } \delta=t\frac{d}{dt}\quad (a, c\in \boldsymbol{C}).$$

On a *deux points singuliers* $0, \infty\in P^1(\boldsymbol{C}): 0$ est *régulier*, ∞ est *irrégulier*. (Ici aussi on se place dans le "cas générique": pas de "solution logarithmique").

On écrit les formules classiques pour les solutions à l'origine et à l'infini. A l'origine on prend des vecteurs propres pour l'opérateur de monodromie autour de 0: ces solutions sont convergentes et définissent des fonctions holomorphes sur la surface de Riemann du logarithme (la première est holomorphe sur $\boldsymbol{C}^*$):

(2.2) $$\tilde{\Sigma}_0=(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2),\ \text{où}\ \tilde{\omega}_1={}_1F_1(a; c; t)=\sum_{n\geq 0}\frac{\langle a\rangle_n}{\langle c\rangle_n n!}t^n$$
$$\tilde{\omega}_2=t^{1-c}{}_1F_1(1+a-c; 2-c; t).$$

A l'infini on écrit d'abord des solutions *formelles*, vecteurs propres pour la "*monodromie formelle*" autour de ∞: ces solutions sont en général divergentes mais toujours Borel-sommables (1-sommables au sens de [Ra 2]) dans toutes les directions issues de ∞, sauf peut-être les deux directions $\boldsymbol{R}^+$, $\boldsymbol{R}^-$, portées par l'axe réel. Ces sommations se "recollent" respectivement en *deux* sommations (au choix près des déterminations de t^{-a} et t^{a-c}) et fournissent *deux* systèmes fondamentaux de solutions sur la surface de Riemann du logarithme:

$$\hat{\Sigma}_\infty=(\hat{U},\hat{V}),\ \text{où}\ \hat{U}(t)=t^{-a}{}_2F_0(a,1+a-c;-t^{-1}) \tag{2.3}$$
$$\hat{V}(t)=e^t t^{a-c}{}_2F_0(c-a,1-a;t^{-1}).$$

Les solutions "naturelles" obtenues par resommation peuvent se calculer de diverses manières (il suffit en particulier de trouver des solutions admettant *le même développement asymptotique*, c'est à dire $\hat{U}$ ou V, sur un secteur ouvert de sommet l'infini et d'ouverture $>\pi$: ces solutions coïncident alors avec les sommes). Les deux méthodes classiques sont à partir de la transformation de Laplace (cf. [Ol]) ou de Mellin. Cette dernière fournit la solution ϕ par une formule de Barnes-Mellin [Lu], [Tri]:

$$\phi(a,c;t)=\frac{1}{2i\pi}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(-s)\Gamma(1-c-s)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}t^s ds. \tag{2.4}$$

On vérifie que $\phi(a,c;t)\sim\hat{U}$ sur $\left]-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, tandis que

$$e^{i\pi(a-c)}e^t\phi(c-a,c;te^{-i\pi})\sim\hat{V}\qquad\text{sur}\ \left]\frac{-\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right[.$$

Donc $\phi(a,c;t)=U(t)$ somme de $\hat{U}(t)$ dans toute direction $\in\,]-\pi,\pi[$, et $e^{i\pi(a-c)}e^t\phi(c-a,c;te^{-i\pi})=V(t)$ somme de $\hat{V}(t)$ dans toute direction $\in\,]0,2\pi[$. (Notation: $\operatorname{Arg} te^{i\alpha}=\operatorname{Arg} t+\alpha$.) Ces fonctions s'expriment à partir de $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ par:

$$\begin{pmatrix}U(t)\\V(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)} & \dfrac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}\\[2ex] \dfrac{\Gamma(-c)}{\Gamma(1-a)} & -\dfrac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)}e^{i\pi a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\omega}_1\\\tilde{\omega}_2\end{pmatrix}.$$

On utilise les trois secteurs ouverts d'ouverture π:

$$v_1=\left]-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad v_2=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\quad\text{et}\quad v_3=\left]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right[.$$

On a sur chacun de ces secteurs un système fondamental de solutions de $\tilde{D}_{a,c}y=0$, asymptotique au système fondamental de solutions formelles

$$\hat{\Sigma}_\infty,\ \tilde{\Sigma}_{v_1}=(U(t),\ e^{2i\pi(c-a)}V(te^{2i\pi})),\qquad \tilde{\Sigma}_{v_2}=(U(t),\ V(t)),$$
$$\tilde{\Sigma}_{v_3}=(e^{-2i\pi a}U(te^{-2i\pi}),\ V(t)).$$

Ces systèmes fondamentaux de solutions sont les sommes de Borel de $\hat{\Sigma}_\infty$ respectivement dans les directions $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$. Les comparaisons de ces "sommes naturelles" fournissent les matrices de Stokes (au sens de [Ra 2], un peu différent des conventions traditionnelles):

$$\tilde{\Sigma}_{v_0}=\tilde{\Sigma}_{v_1}S_0 \quad \text{et} \quad \tilde{\Sigma}_{v_1}=\tilde{\Sigma}_{v_2}S_\pi \tag{2.6}$$

(S_α est la matrice de Stokes dans la direction α). On a par ailleurs des matrices de connexion (cf. [Lu], p. 121-122):

$$\tilde{\Sigma}_0=\tilde{\Sigma}_{v_i}\tilde{M}_i \qquad (i=1,2,3)$$

avec

$${}^t\tilde{M}_1=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}e^{-i\pi a} & \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \\ -e^{-i\pi(a-c)}\dfrac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)} & \dfrac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+a-c)} \end{pmatrix}$$

$${}^t\tilde{M}_2=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}e^{i\pi a} & \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \\ -\dfrac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)}e^{i\pi(a-c)} & \dfrac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+a-c)} \end{pmatrix}$$

$${}^t\tilde{M}_3=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}e^{i\pi a} & \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^{2i\pi(c-a)} \\ -\dfrac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a-c)}e^{i\pi(a-c)} & \dfrac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+a-c)}e^{-2i\pi a} \end{pmatrix}.$$

III. Confluence

3.1. Confluence "formelle"

Dans $D_{a,b,c}$ on fait le changement de variables $z=t/b$. On a $z(d/dz)=t(d/dt)$ et $D_{a,c}^{(b)}=\delta(\delta+c-1)-(t/b)(\delta+a)(\delta+b)$ $(\delta=t(d/dt))$. L'opérateur en t obtenu a évidemment trois points singuliers en $0, b, \infty\in P^1(C)$ (toujours réguliers). Si $b\to+\infty$ on obtient "formellement" $D_{a,c}^{(b)}\to\tilde{D}_{a,c}$.

Nous allons regarder ce qui se passe sur des solutions convenables en $0, b, \infty$ (déduites des formules (1.2), (1.3), (1.4)) et constater qu'elles admettent "formellement" des limites quand $b \to \infty$. (Ceci est lié au choix que nous avons fait plus haut parmi les solutions de Kummer.) Notons que si l'étude de ce qui se passe en 0 est très classique, il ne semble pas en être de même de l'étude "en" b et ∞ (que je n'ai pas trouvée dans la littérature). L'étape ultérieure sera l'étude de la convergence des solutions (et pas seulement de leur convergence formelle) et des informations que l'on peut en tirer.

Quand $b \to \infty$, w_1 converge terme à terme vers ${}_1F_1(a; c; t)$. Posons $W_2 = b^{1-c} w_2$; W_2 converge "terme à terme" vers $t^{1-c}{}_1F_1(a-c+1; 2-c; t)$. On constate en fait immédiatement que la convergence est bien mieux que formelle: convergence uniforme sur tout compact de $\boldsymbol{C}$ pour W_1 et tout compact du revêtement universel de $\boldsymbol{C}^*$ pour W_2. Notons que W_2 a été choisi pour que $W_2(t) \sim t^{1-c}$ au voisinage de 0.

On pose: $\Sigma_0^{(b)} = (W_1, W_2)$, $\Sigma_b^{(b)} = (W_3, W_4)$, $\Sigma_\infty^{(b)} = (W_5, W_6)$, avec

$$\Sigma_0^{(b)} = \Sigma_0 N_0, \quad \Sigma_b^{(b)} = \Sigma_1 N_b, \quad \Sigma_\infty^{(b)} = \Sigma_\infty N_\infty; \tag{3.1.1}$$

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{1-c} \end{pmatrix}, \; N_b = \begin{pmatrix} b^{-a} & 0 \\ 0 & b^{a-c} \end{pmatrix}, \; N_\infty = \begin{pmatrix} e^{-i\pi a} b^{-a} & 0 \\ 0 & e^{i\pi(a-c)} b^{a-c} \end{pmatrix}.$$

Les "renormalisations" N_0, N_b, N_∞ (fonctions du "paramètre de confluence b") sont choisies pour que soit vrai ce qui suit (cela implique des comportements du type $W \sim u^\alpha$ au voisinage de chaque singularité $0, b, \infty$ pour un choix "naturel" convenable d'uniformisante, pour chaque composante W de chaque $\Sigma_i^{(b)}$; $i = 0, 1, \infty$). Cela cache en fait un choix de "forme normale" pour la confluence (comme dans [Mar] pour le cas des difféomorphismes), et de matrices holomorphes (au voisinage de b, ∞) de "réduction à la forme normale" tangentes à l'identité (en b, ∞).

PROPOSITION 3.1.1. *Avec les notations ci-dessous:*

$\Sigma^{(b)}$ tend "terme à terme" vers $\tilde{\Sigma}_0$,
$\Sigma_b^{(b)}$ tend "terme à terme" vers $\hat{\Sigma}_\infty$,
$\Sigma_\infty^{(b)}$ tend "terme à terme" vers $\hat{\Sigma}_\infty$, quand $b \to \infty$.

Les vérifications sont faciles, il est intéressant d'en faire une preuve pour voir comment apparait l'exponentielle (qui va jouer un rôle fondamental dans le paysage). Considérons

$$W_4(t)=b^{a-c}w_4\left(a,b;c;\frac{t}{b}\right)W_4(a,b;c;t)$$

$$W_4(t)=t^{a-c}\left(1-\frac{t}{b}\right)^{-b}\left(1-\frac{t}{b}\right)^{c-a}{}_2F_1\left(c-a,1-a;c+1-a-b;1-\frac{b}{t}\right).$$

Quand $b\to\infty$, $(1-t/b)^{-b}\to e^t$ (en un sens à préciser...), $(1-t/b)^{c-a}\to 1$ et ${}_2F_1(c-a,1-a;c+1-a-b;1-b/t)$ tend "terme à terme" vers ${}_2F_0(c-a, 1-a;t^{-1})$.

3.2. Confluence et phénomène de Stokes

Nous allons maintenant montrer que les convergences *formelles* de la Proposition 3.1.1 correspondent à des "*vraies* convergences" (convergence uniforme sur tout compact sur des domaines convenables). Nous utiliserons pour cela le fait qu'il en est bien ainsi pour $\Sigma_0^{(b)}$ et l'existence de limites pour des matrices déduites des matrices de connexion $M_{\infty,0}$ et $M_{1,0}$ (que nous comparerons à (2.7)). Nous en déduirons l'existence de limites pour des matrices déduites de $M_{b,\infty}$ qui coïncident avec les matrices de Stokes S_0 et S_π. Nous retrouverons ces résultats par des calculs directs.

Ecrivons d'abord les formules de connexion pour $D_{a,c}^{(b)}$:

$$\text{(3.2.1)}\qquad \begin{aligned}\Sigma_0^{(b)}&=\Sigma_\infty^{(b)}M_{0,\infty}^{(b)},\\ \Sigma_0^{(b)}&=\Sigma_b^{(b)}M_{0,b}^{(b)},\\ \Sigma_b^{(b)}&=\Sigma_\infty^{(b)}M_{b,\infty}^{(b)},\\ M_{b,\infty}^{(b)}&=M_{0,\infty}^{(b)}(M_{0,b}^{(b)})^{-1}\end{aligned}$$

$$\text{(3.2.2)}\qquad M_{0,\infty}^{(b)}=N_\infty^{-1}M_{0,\infty}N_0=\begin{pmatrix}e^{i\pi a}b^a & 0\\ 0 & e^{i\pi(c-a)}b^{(c-a)}\end{pmatrix}M_{0,\infty}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & b^{1-c}\end{pmatrix}$$

$$M_{0,\infty}^{(b)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}e^{i\pi a}b^a & -\dfrac{\Gamma(b-a)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)}e^{i\pi(a-c)}b^{a+1-c}\\ \dfrac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}e^{i\pi(c-a)}b^{c-a} & -\dfrac{\Gamma(a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)}e^{-i\pi a}b^{1-a}\end{pmatrix};$$

$$\text{(3.2.3)}\qquad M_{0,b}^{(b)}=N_b^{-1}M_{0,1}N_0=\begin{pmatrix}b^a & 0\\ 0 & b^{c-a}\end{pmatrix}M_{0,1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & b^{1-c}\end{pmatrix}$$

$$M_{0,b}^{(b)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}b^a & \dfrac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}b^{a+1-c}\\ \dfrac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(a)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}b^{c-a} & \dfrac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}b^{1-b}\end{pmatrix}$$

(3.2.4)

$$M_{b,\infty}^{(b)}=N_\infty^{-1}M_{b,\infty}N_b=\begin{pmatrix} e^{i\pi a}b^a & 0 \\ 0 & e^{i\pi(c-a)}b^{c-a}\end{pmatrix}M_{1,\infty}\begin{pmatrix} b^{-a} & 0 \\ 0 & b^{a-c}\end{pmatrix}$$

$$M_{b,\infty}^{(b)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(b-a)\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(1+b-c)\Gamma(b)} & \dfrac{\Gamma(b-a)\Gamma(c+1-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)}b^{2a-c}e^{i\pi(a+b-c)} \\ \dfrac{\Gamma(a-b)\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(a)}b^{c-2a}e^{i\pi(c-a-b)} & \dfrac{\Gamma(a-b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c-b)} \end{pmatrix}.$$

Nous supposons maintenant que $b\to\infty$, $\operatorname{Arg} b$ restant fixe et $\neq 0$ (mod. π).

LEMME 3.2.1. *Pour* $\operatorname{Arg} b\in\,]-\pi,\pi[$, *on a*

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\Gamma(b+\gamma)}{\Gamma(b)b^\gamma}=1 \qquad (\gamma\in C \textit{ étant fixé}).$$

Si $\operatorname{Arg} b\in\,]-\pi,0[$ on écrit $-b=e^{i\pi}b$, et si $\operatorname{Arg} b\in\,]0,\pi[$, on écrit $-b=be^{-i\pi}$ $(-b=be^{\varepsilon i\pi})$.

THÉORÈME 3.2.2. (i) *Si* $\operatorname{Arg} b\in\,]-\pi,0[$ *est fixé*:

$$\lim_{b\to\infty} M_{0,\infty}^{(b)}=\tilde{M}_2$$
$$\lim_{b\to\infty} M_{0,b}^{(b)}=\tilde{M}_1$$
$$\lim_{b\to\infty} M_{b,\infty}^{(b)}=\tilde{M}_2\tilde{M}_1^{-1}=S_0.$$

(ii) *Si* $\operatorname{Arg} b\in\,]0,\pi[$ *est fixé*:

$$\lim_{b\to\infty} M_{0,\infty}^{(b)}=\tilde{M}_3$$
$$\lim_{b\to\infty} M_{0,\infty}^{(b)}=\tilde{M}_2$$
$$\lim_{b\to\infty} M_{b,\infty}^{(b)}=\tilde{M}_3\tilde{M}_2^{-1}=S_\pi.$$

De ce résultat et de $\tilde{\Sigma}_0=\lim_{b\to\infty}\Sigma_0^{(b)}$ (limite uniforme sur tout compact de la surface de Riemann du logarithme), on déduit le:

COROLLAIRE 3.2.3. (i) *Si* $\operatorname{Arg} b\in\,]-\pi,0[$ *est fixé*:

$$\lim_{b\to\infty}\Sigma_b^{(b)}=\tilde{\Sigma}_1;\qquad \lim_{b\to\infty}\Sigma_\infty^{(b)}=\tilde{\Sigma}_2.$$

(ii) *Si* $\operatorname{Arg} b\in\,]0,\pi[$ *est fixé*

$$\lim_{b\to\infty}\Sigma_b^{(b)}=\tilde{\Sigma}_2;\qquad \lim_{b\to\infty}\Sigma_\infty^{(b)}=\tilde{\Sigma}_3.$$

Dans les deux cas il s'agit de la convergence uniforme sur tout compact de la surface de Riemann du logarithme. Notons

$$M_{b,\infty}^{(b)}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \qquad (m_{ij}=m_{ij}(a;b;c)).$$

Quand $b\to\infty$, $m_{11}\to 1$, et $m_{22}\to 1$. Par ailleurs:

$$\begin{aligned} m_{12} &\sim -2i\pi \frac{e^{i\pi(a-c)}e^{\varepsilon i\pi(c-a)}}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} \frac{1}{1-e^{-2i\pi b}} \\ m_{21} &\sim -2i\pi \frac{e^{i\pi(c-a)}e^{\varepsilon i\pi a}}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(a)} \frac{1}{e^{2i\pi b}-1} \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

D'où:

PROPOSITION 3.2.4. (i) *Si* $\operatorname{Arg} b\in\,]-\pi,0[$ *est fixé*:

$$\begin{aligned} m_{12} &\sim \quad 2i\pi \frac{1}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} \in \boldsymbol{C} \\ m_{21} &\sim -2i\pi \frac{e^{i\pi c}}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(a)} e^{-2i\pi b} \quad (\textit{exponentiellement petit}); \end{aligned}$$

quand $b\to\infty$.

(ii) *Si* $\operatorname{Arg} b\in\,]0,\pi[$ *est fixé*:

$$\begin{aligned} m_{12} &\sim 2i\pi \frac{e^{2i\pi(a-c)}}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} e^{2i\pi b} \quad (\textit{exponentiellement petit}); \\ m_{21} &\sim 2i\pi \frac{e^{i\pi(c-2a)}}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(a)} \in \boldsymbol{C} \end{aligned}$$

quand $b\to\infty$.

On retrouve évidemment l'expression des matrices de Stokes: (cf. [O1], [JLP], [MR]):

PROPOSITION 3.2.5. "*Les*" *multiplicateurs de Stokes à l'infini de* $D_{a,c}$ *sont donnés par*

$$S_\pi=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad S_0=\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec

$$\lambda = 2i\pi \frac{e^{i\pi(c-2a)}}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(a)}, \quad \mu = 2i\pi \frac{1}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)}.$$

La monodromie de $D_{a,c}^{(b)}$ autour de la singularité $t=b$ est donnée, dans le base $\Sigma_b^{(b)}$, par la matrice

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\pi(c-a-b)} \end{pmatrix}. \tag{3.2.6}$$

La monodromie autour de $t=\infty$ est donnée dans la base $\Sigma_\infty^{(b)}$, par la même matrice. Supposons $\operatorname{Arg} b \in]-\pi, 0[$ et notons

$$M_{b,\infty}^{\prime(b)} = \hat{T} M_{b,\infty}^{(b)} \hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} m'_{11} & m'_{12} \\ m'_{21} & m'_{22} \end{pmatrix}.$$

Quand $b \to \infty$, $m'_{11} \to 1$ et $m'_{22} \to 1$. Par ailleurs:

$$m'_{21} \sim -2i\pi \frac{e^{2i\pi(2a-c)}}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(a)} = \lambda',$$

tandis que m'_{21} est exponentiellement petit, quand $b \to \infty$. On retrouve la matrice de Stokes S_π en conjuguant la limite de $M_{b,\infty}^{\prime(b)}$ par la monodromie formelle autour de ∞ de l'équation hypergéométrique confluente.

Ceci permet de *calculer les multiplicateurs de Stokes* en utilisant *une seule limite* (ici $\operatorname{Arg} b \in]-\pi, 0[$).

Il y aurait lieu de reprendre, dans les directions dégagées dans l'étude précédente, l'article de Garnier [Ga]. (Les "matrices de scattering" qu'il construit et dont il extrait par passage à la limite ses "invariants analytiques" de l'équation confluée doivent redonner à la limite le phénomène de Stokes comme dans notre exemple.) Le lecteur vérifiera également que la description du phénomène de Stokes faite ci-dessus à partir de la confluence correspond à celle de J. Martinet pour les difféomorphismes dans [Ma].

Enfin il est intéressant d'étudier le comportement de la monodromie de l'équation $D_{a,c}^{(b)} y = 0$ dans une "*base mixte*" (W_3, W_6) (ou (W_4, W_5)) et de se rattacher au "deuxième point de vue" évoqué dans l'introduction (cf. note[1], page 1).

3.3. Confluence et résurgence

Soit D une équation différentielle linéaire à coefficients holomorphes à l'infini, à singularité irrégulière en ∞. On décrit la *résurgence* de D à l'infini à partir du *phénomène de Stokes* de la façon suivante (MR]): soient K (resp. $\hat{K}$) les corps différentiels des germes de fonction méromorphes (resp. méromorphes formelles) à l'infini. On a une injection naturelle

$$\mathrm{Gal}_{\hat{K}}(D) \hookrightarrow \mathrm{Gal}_K(D)$$

et les multiplicateurs de Stokes de D s'interprètent comme des éléments $S \in \mathrm{Gal}_K(D)$. Par ailleurs $\mathrm{Gal}_{\hat{K}}(D)$ contient un *tore* (algébrique), le *tore exponentiel* T (cf. [Ra 1], [Ra 3]). Les opérateurs $\dot{\Delta}^+(D)$ (cf. [E]) s'obtiennent par *"analyse de Fourier"* de S sous *l'action adjointe*[4] de T, tandis que les opérateurs $\dot{\Delta}(D)$ s'obtiennent par analyse de Fourier du *générateur infinitésimal* $\operatorname{Log} S$.

Nous allons montrer sur l'exemple de l'hypergéométrique confluente comment ce discours "résiste à la bifurcation". Nous supposerons dans la suite que $\operatorname{Arg} b \in]-\pi, 0[$ est fixé *"suffisamment générique"* par rapport à a et c. Dans ces conditions les opérateurs de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\pi b} \end{pmatrix}$ respectivement dans les bases $\Sigma_b^{(b)}$ et $\Sigma_\infty^{(b)}$ définissent des éléments τ_b et τ_∞ du groupe de Galois différentiel $\mathrm{Gal}_{C(z)}(D_{a,c}^{(b)})$. Les adhérences de Zariski des sous-groupes engendrés respectivement par τ_b et τ_∞ sont des *tores* T_b et T_∞ (isomorphes à C^*). Quand $b \to \infty$ ces *tores ont pour limites des "copies" du tore exponentiel de* $D_{a,c}^{(b)}$ *obtenues par resommation.*

On a évidemment

$$T_b = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} / u \in C^* \right\} \quad \text{et}$$
$$T_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} / u \in C^* \right\}$$

respectivement dans les bases $\Sigma_b^{(b)}$ et $\Sigma_\infty^{(b)}$. Ainsi il est naturel d'*"analyser"* la *"matrice de scattering"* $M_{b,\infty}^{(b)}$ sous l'*action adjointe du tore* T_∞ ($M_{b,\infty}^{(b)}$ est considérée comme la matrice d'un automorphisme du C-espace vectoriel des solutions de $D_{a,c}^{(b)}$ en ∞ sur un secteur convenable et T_∞ opère sur ces solutions). On obtient

$$M_{b,\infty}^{(b)}(u) = u^{-1}\begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.1}$$

que l'on écrit:

---

[4] En général d'un quotient de T dépendant de la *direction dans laquelle est pris le multiplicateur de Stokes S.*

(3.3.2) $$M^{(b)}_{b,\infty}(u)=u^{-1}\dot{\Delta}^{+}_{-1}(D^{(b)}_{a,c})+\dot{\Delta}^{+}_{0}(D^{(b)}_{a,c})+u\dot{\Delta}^{+}_{1}(D^{(b)}_{a,c}).$$

Par ailleurs "*l'analyse*" de la *matrice de Stokes* S_0 sous *l'action adjointe* "du" *tore exponentiel* donne:

(3.3.3) $$S_0(u)=I+u\begin{pmatrix}0 & 0\\ \lambda & 0\end{pmatrix}=I+u\dot{\Delta}^{+}_{1}(D_{a,c}).$$

Ainsi (3.3.1) apparaît comme "*déformation*" (paramétrée par $b=1/\varepsilon$) de (3.3.3): l'action de $\dot{\Delta}^{+}_{0}$ est "*exponentiellement proche*" de l'identité tandis que celle de $\dot{\Delta}^{+}_{-1}$ est "*exponentiellement petite*" (pour ε "*infiniment petit*"). Notons que les opérateurs $\dot{\Delta}^{+}_{n}$ correspondent à la "*polarisation*" $\boldsymbol{R}^{+}$; on obtiendrait des opérateurs correspondant à la *polarisation* $\boldsymbol{R}^{-}$ par conjuguaison par l'opérateur (*Galoisien*) de matrice $\hat{T}$ (cf. (3.2.8): $e^{2i\pi b}$ est exponentiellement grand, tandis que $e^{-2i\pi b}$ est exponentiellement petit et la conjuguaison "*extrait*" l'information donnée par $\dot{\Delta}^{+}_{-1}$ tout en "*effaçant*" celle donnée par $\dot{\Delta}^{+}_{1}$ ($\dot{\Delta}^{+}_{0}$ reste invariant). Finalement on constate que, si la *représentation de monodromie* associée à $D^{(b)}_{a,c}$ (qui est son "*classifiant*") *ne passe pas à la limite* quand $b\to\infty$ (à cause du comportement de $e^{2i\pi b}$), il est par contre possible de "*recoder*" cette représentation en une représentation d'une "*déformation*" du π_1-sauvage (au sens de [Ra 4]), qui elle *admet pour limite* le "classifiant" de l'*équation limite*" $D_{a,c}$ (confluée). Ce recodage est lié au choix d'une "*forme normale*" (comparer les constructions décrites ci-dessus à celles de [Mar] pour les difféomorphismes). Dans des cas plus généraux on peut faire les constructions précédentes en *restant dans le groupe de Galois différentiel* $\mathrm{Gal}(D^{(b)}_{a,c})$: en particulier la "matrice de scattering" s'interprète comme élément de ce groupe. Ceci est lié a des théorèmes de réduction pour les fibrés à connexion méromorphe sur lesquels je reviendrai ailleurs). Ici c'est évident puisque $\mathrm{Gal}(D^{(b)}_{a,c})$ est génériquement $GL(2;\boldsymbol{C})$ (cf. [MR]). On peut se demander si l'on peut rester dans le cadre d'une "*déformation iso-Galoisienne*" de l'équation confluée. On peut également étendre la théorie à des cas non linéaires (noeuds-cols...); ceci fait l'objet d'un travail en préparation avec Jean Martinet.

Il me reste à remercier Anne Duval et Jean Martinet pour de nombreuses conversations sur les thèmes évoqués ci-dessus. La première a eu la patience de revoir (et corriger...) un "premier état" des calculs et d'en extraire la présentation[5] (plus pédagogique je l'espère!) donnée ci-dessus.

[5] Lettre de fevrier 1988.

Bibliographie

[E] Ecalle, J., Les fonctions résurgentes, Publ. Math. Orsay, Univ. Paris XI, Orsay, 1981.

[Er] Erdélyi, A., Higher transcendental functions, Vol. I. Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New-York, 1953.

[Gar] Garnier, R., Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires, J. Math. Pures Appl. (8) **2** (1919), 99-198.

[Gou] Goursat, E., Leçons sur les Séries Hypergéométriques I, Propriétés Générales de l'Equation d'Euler et de Gauss, Hermann, Paris, 1936.

[JLP] Jurkat, W., Lutz, D. A. and A. Peyerimhoff, Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations I, J. Math. Anal. Appl. **53** (1976), 438-470.

[Kat] Katz, N., Algebraic solutions of differential equations; p-curvature and the Hodge filtration, Invent. Math. **18** (1972), 1-118.

[Kl] Klein, F., Vorlesungen über die Hypergeometrische Funktion, Springer, Berlin, 1933.

[Lu] Luke, Y. L., The Special Functions and Their Approximations, Vol. 1, Math. Sci. Engrg. vol. 53, Academic Press, New York-London, 1969.

[Mar] Martinet, J., Remarques sur la bifurcation noeud-col dans le domaine complexe, Astérisque **150-151** (1987), 131-149.

[MR] Martinet, J. et J. P. Ramis, Théorie de Galois différentielle et resommation, Proceedings of "Cade 1", Academic Press, to appear.

[Ol] Olver, F. W., Introduction to Asymptotics and Special Functions, Academic Press, New York-London, 1974.

[Poo] Poole, E. G. C., Introduction to the Theory of Linear Differential Equations, Dover Publications, New York, 1960.

[Ra 1] Ramis, J. P., Phénomène de Stokes et filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot, C. R. Acad. Sci. Paris **301** (1985), 165-167.

[Ra 2] Ramis, J. P., Phénomène de Stokes et resommation, C. R. Acad. Sci. Paris **301** (1985), 99-102.

[Ra 3] Ramis, J. P., Filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une équation différentielle irrégulière, preprint, Instituto de Matematica Pura a Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro **45** (1985), 38 pages.

[Ra 4] Ramis, J. P., Irregular connections, savage π_1 and confluence, Proceediongs of a Conference at Katata, Japan 1987, Taniguchi Foundation, 1988.

[R] Riemann, B., Gesammelte mathematische Werke.

[Tri] Tricomi, F. G., Funzioni Ipergeometriche Confluenti, Edizioni Cremonese, Rome, 1954.

(Reçu le 15 mars, 1989)

I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cédex
France