J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
Sect. IA, Math.
34 (1987), 709-740.

Sur les échelles associées aux fonctions spéciales et l'équation de Toda

Dédié au Professeur Itiro Tamura pour son soixantième anniversaire

Par Kazuo OKAMOTO

Introduction.

Soit V l'espace de toutes les fonctions holomorphes sur le revêtement universel de $\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$. Considérons pour tout n entier les deux opérateurs différentiels définis sur V:

$$H_n=-\frac{d}{dt}+\frac{\nu+n}{t}, \tag{0.1}$$

$$B_n=\frac{d}{dt}+\frac{\nu+n}{t}, \tag{0.1$'$}$$

ν désignant un nombre complexe. Soit V_n un sousespace vectoriel de V consistant en éléments ϕ_n de V tels que

$$B_{n+1}H_n\phi_n=\phi_n\,.$$

Cette condition est équivalente à

$$H_{n-1}B_n\phi_n=\phi_n\,,$$

parce que nous avons:

$$\begin{aligned}B_{n+1}H_n-1&=H_{n-1}B_n-1\\&=-L(\nu+n)\,,\end{aligned}$$

où

$$L(\nu)=\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{d}{dt}+1-\frac{\nu^2}{t^2}\,.$$

Toute fonction ϕ_n de V_n satisfait à l'équation différentielle de Bessel:

$$L(\nu+n)\phi_n=0\,. \tag{0.2$_n$}$$

D'ailleurs, un vecteur ϕ_{n+1} (resp. ϕ_{n-1}) défini par

$$\phi_{n+1}=H_n\phi_n \quad (\text{resp. } \phi_{n-1}=B_n\phi_n) \tag{0.3}$$

est une solution de l'équation $(0.2)_{n+1}$ (resp. $(0.2)_{n-1}$). Pour le cas où ϕ_n est la fonction de Bessel :

$$\boldsymbol{J}_{\nu+n}(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+n}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+n+m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m},$$

Γ étant la fonction Γ d'Euler, la relation (0.3) est appelée celle de contiguïté des fonctions de Bessel ([4]). Nous avons ainsi la suite des sousespaces vectoriels

$$\mathcal{V}=\{V_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\},$$

en partant de l'ensemble

$$\mathcal{F}=\{(H_n, B_n)\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$$

des opérateurs (0.1). La donnée

$$\mathcal{E}(V)=(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

sera appelée l'*échelle* associée aux fonctions cylindriques. On appellera une *section* de $\mathcal{E}=\mathcal{E}(V)$ une suite $\Phi=\{\phi_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ de vecteurs satisfaisant à (0.3).

Considérons de plus l'expression

$$\phi_{n-1}\phi_{n+1}=B_n\phi_nH_n\phi_n+\phi_nL(\nu+n)\phi_n,$$

qui est une conséquence immédiate de (0.2) et (0.3). Elle peut s'écrire :

$$\phi_{n-1}\phi_{n+1}=\phi_n\frac{d^2}{dt^2}\phi_n-\left(\frac{d}{dt}\phi_n\right)^2+\frac{1}{t}\phi_n\frac{d}{dt}\phi_n+\phi_n^2.$$

D'ailleurs il est facile de vérifier que

PROPOSITION 1. *Les fonctions*

$$\psi_n=P_n\phi_n \qquad (n\in\boldsymbol{Z}) \tag{0.4}$$

satisfont à l'équation

$$X^2\log\psi_n=\frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2}, \tag{0.5}$$

ou on pose

$$P_n=\exp\left(\frac{1}{4}t^2+(\nu+n)^2\log t\right), \tag{0.6}$$

$$X=t\frac{d}{dt}.$$

L'équation (0.5) est appelée l'*équation de Toda*. Notons que (0.6) vérifient encore l'équation (0.5). La relation (0.4) entre les deux solutions de (0.5) donne une *transformation de Bäcklund* de l'équation de Toda. Des transformations de Bäcklund pour une *solution en séparation de variables* de (0.5) ont été étudiées par Y. Kametaka [5].

Un autre exemple d'échelles concernent les deux opérateurs :

$$H_n = -\frac{d}{dt} + t\,, \tag{0.7}$$

$$B_n = \frac{1}{\nu+n}\,\frac{d}{dt}\,, \tag{0.7$'$}$$

où on suppose que ν *ne soit pas entier*. Soit V l'espace de toutes les fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{C}$. Nous obtenons donc une échelle $\mathcal{E}=\mathcal{E}(V)$ telle que chacun des sousespaces V_n soit caractérisé par l'équation différentielle de Weber-Hermite :

$$L(\nu+n) = \frac{d^2}{dt^2} - t\frac{d}{dt} + \nu + n\,.$$

Toute section $\Phi=\{\phi_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ de $\mathcal{E}$ satisfait à

$$\phi_n \frac{d^2}{dt^2}\phi_n - \left(\frac{d}{dt}\phi_n\right)^2 = (\nu+n)(\phi_{n-1}\phi_{n+1} - \phi_n^2)\,,$$

de sorte que l'on obtient l'équation

$$X^2 \log \psi_n = (\nu+n)\frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2}\,, \tag{0.8}$$

où

$$\psi_n = P_n \phi_n\,, \tag{0.9}$$

$$P_n = \exp\left(\frac{1}{2}(\nu+n)t^2\right) \tag{0.10}$$

et

$$X = \frac{d}{dt}\,. \tag{0.11}$$

Notons que $\{P_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ donné par (0.10) vérifie encore (0.8).

Soit $\Psi=\{\psi_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ une solution quelconque de (0.8). Puis pour tout entier k et pour un nombre complexe ν *non* entier, on définit une constante $\theta(\nu\,;k)$ par ceci :

$$\theta(\nu\,;k)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+2)\cdots\Gamma(\nu+k)}, & k\geqq 1,\\ 1\qquad, & k=0,\\ \Gamma(\nu)\Gamma(\nu-1)\cdots\Gamma(\nu+k+1)\ , & k\leqq -1.\end{cases}\tag{0.12}$$

Alors si l'on remplace ψ_n par $\theta(\nu\,;n)\psi_n$, (0.8) se réduit à l'équation de Toda (0.5) avec (0.11).

Ajoutons quelques mots pour le cas $\nu=0$ dans (0.7). On voit d'après (0.10) que l'ensemble $\{\theta(0\,;n)P_n\,;\ n\geqq 0\}$ de fonctions vérifie:

$$\psi_0=1\tag{0.13}$$

$$X^2\log\psi_n=\frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2}\qquad(n\geqq 1).\tag{0.13)$'$}$$

En outre, nous avons d'après la transformation de Bäcklund (0.9) l'autre solution de cette équation:

$$\psi_n=\theta(0\,;n)P_n\mathfrak{H}_n(t)\qquad(n\geqq 0),\tag{0.14}$$

où $\mathfrak{H}_n(t)$ sont les polynômes d'Hermite.

Considérons en général un ensemble $\Psi_+=\{\psi_n\,;\ n\geqq 0\}$ de fonctions quelconques satisfaisant à (0.13). La proposition suivante a été remarquée déjà dans [1].

PROPOSITION 2. *Tout Ψ_+ est écrit sous la forme*

$$\psi_1=h,$$

$$\psi_n=\det\begin{vmatrix} h & Xh & \cdots & X^{n-1}h\\ Xh & X^2h & \cdots & X^nh\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ X^{n-1}h & X^nh & \cdots & X^{2n-2}h\end{vmatrix}\qquad(n\geqq 2),\tag{0.15}$$

où h est une fonction que l'on peut donner à la manière arbitraire.

Par exemple, la solution (0.14) est donnée par (0.15) avec

$$h=t\exp\left(\frac{1}{2}t^2\right).$$

Nous pouvons obtenir une expression similaire pour chaque système des polynômes orthogonaux classiques: ceux de Legendre, Gegenbauer, Laguerre etc. Une vérification de (0.15) est faite sans peine à l'aide du théorème de Sylvester ([2]). On appellera (0.13) l'équation de Toda *tronquée* et (0.15) la *formule de Darboux* pour (0.13).

Le but de l'article present est d'étudier en détail des échelles associées aux fonctions hypergéométriques de Gauss et celles associées aux fonctions hypergéométriques confluentes de Kummer. A dessein de faire cela nous allons d'abord développer la théorie générale d'échelles d'une variable dans la première moitie de ce mémoire.

Soient Ω un domaine de $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$, $\tilde{\Omega}$ le revêtement universel de Ω et $V=V(\Omega)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions méromorphes sur $\tilde{\Omega}$: un élément de V est une fonction multiforme sur Ω. On se donne une suite $\mathcal{V}=\{V_n\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\}$ de sousespaces vectoriels V_n de V et un ensemble $\mathcal{F}=\{(H_n, B_n)\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\}$ de couples de transformations linéaires de V telles que pour tout n,

$$H_n(V_n)\subset V_{n+1}, \quad B_n(V_n)\subset V_{n-1}.$$

DÉFINITION 1. Une *échelle* de V est la donnée

$$\mathcal{E}(V)=(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

telle que, pour tout n, la restriction de $H_{n-1}B_n$ à V_n et celle de $B_{n+1}H_n$ à V_n soient à la fois la transformation identique de V_n. On appellera $\mathcal{F}$ la *factorisation* de $\mathcal{E}=\mathcal{E}(V)$; V_n est un *échelon* de $\mathcal{E}$. Comme H_n (resp. B_n) est un isomorphisme de V_n sur V_{n+1} (resp. V_{n-1}), tous les échelons de $\mathcal{E}$ ont la même dimension.

DÉFINITION 2. Les ensembles des transformations linéaires de V:

$$\mathcal{M}=\{M_n=B_{n+1}H_n-1\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\},$$

$$\mathcal{M}'=\{M'_n=H_{n-1}B_n-1\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\},$$

sont appelés les *montants* de $\mathcal{E}$, où on regarde 1 comme la transformation identique de V définie par la multiplication de l'unite.

Pour tout n, V_n est inclu dans l'intersection des deux sousespaces de V: $\operatorname{Ker} M_n$ et $\operatorname{Ker} M'_n$. Nous supposons dans la suite que:

A1 $\operatorname{Ker} M_n=\operatorname{Ker} M'_n=V_n$,
A2 *aucune des transformations* $B_{n+1}H_n$, $H_{n-1}B_n$ *de* V *ne soit égale à* 1.

DÉFINITION 3. Une *section* de $\mathcal{E}$ est une chaine $\Phi=\{\phi_n\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\}$ de vecteurs ϕ_n de V_n telle que pour tout n

$$\phi_{n+1}=H_n\phi_n, \quad \phi_{n\ 1}=B_n\phi_n.$$

Toute section Φ est engendrée par un élément quelconque de la chaîne ; on admet sans diminuer la généralité que Φ soit engendrée par un vecteur ϕ_0 de l'échelon V_0.

Soient X une dérivation sur V et $\{(r_n, s_{n+1})\,;\, n\in \boldsymbol{Z}\}$ un ensemble de couples de fonctions de V. Considérons une échelle $\mathcal{E}=\mathcal{E}(V)$ dont la factorisation est de la forme :

$$H_n = X + s_{n+1}, \tag{0.16}$$

$$B_n = -r_n^{-1}X. \tag{0.17}$$

On déduit de l'hypothèse **A1** le système des équations différentielles nonlinéaires :

$$Xr_n = r_n(s_n - s_{n+1}), \tag{0.18}$$

$$Xs_{n+1} = r_n - r_{n+1}. \tag{0.19}$$

Tout échelon V_n de $\mathcal{E}$ se compose de solutions de l'équation linéaire :

$$L_n\phi_n = 0, \tag{0.20}$$

$$L_n = X^2 + s_{n+1}X + r_n. \tag{0.21}$$

DÉFINITION 4. L'ensemble $\mathcal{L}=\{L_n\,;\, n\in \boldsymbol{Z}\}$ des opérateurs (0.21) vérifiant (0.18)-(0.19) est appelé une *suite de Laplace*. On dira que l'échelle $\mathcal{E}$ est *associée* à $\mathcal{L}$.

On obtient de (0.18)-(0.19) le système :

$$X^2 \log r_n = r_{n-1} + r_{n+1} - 2r_n,$$

qui est apparu pour la première fois dans l'oeuvre de G. Darboux : voir [1]. On l'appelle encore l'*équation de Toda*. En effet, la proposition suivante que nous pouvons établir facilement est connue ([7]).

PROPOSITION 3. *Etant donnée une solution $P=\{P_n\,;\, n\in \boldsymbol{Z}\}$ de l'équation de Toda*

$$X^2 \log \psi_n = \frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2}, \tag{0.22}$$

les fonctions

$$r_n = X^2 \log P_n, \quad s_{n+1} = X \log \frac{P_n}{P_{n+1}},$$

satisfont au système (0.18)-(0.19).

Nous obtenons ainsi d'une solution P de l'équation de Toda une échelle $\mathcal{E}$ associée à une suite de Laplace $\mathcal{L}$. Soit $\Phi=\{\phi_n\,;\, n\in \boldsymbol{Z}\}$ une section de $\mathcal{E}$. En tenant compte de (0.16)-(0.17), on a la contrainte

$$\frac{\phi_{n-1}\phi_{n+1}}{\phi_n^2}=r_n^{-1}X^2\log\phi_n+1\,, \tag{0.23}$$

d'où la proposition ([5]) :

PROPOSITION 4. *Un ensemble* $\Psi=\{\psi_n\,;\, n\in\boldsymbol{Z}\}$ *de fonctions défini par* $\psi_n=P_n\phi_n$ *est encore une solution de* (0.22).

La correspondance entre les deux solutions P et Ψ est une transformation de Bäcklund pour (0.22). En définitive nous avons l'autre échelle $\mathcal{E}'$ associée à une suite de Laplace $\mathcal{L}'=\{L'_n\,;\, n\in\boldsymbol{Z}\}$ telle que

$$L'_n=X^2+s'_{n+1}X+r'_n\,,$$
$$r'_n=X^2\log\psi_n\,,\quad s'_{n+1}=X\log\frac{\psi_n}{\psi_{n+1}}\,.$$

$\mathcal{E}'$ est une échelle installée au niveau plus élevé que celui de $\mathcal{E}$. En répétant ces procédés successivement dans la mesure du possible, on doit posséder une suite hiérarchique d'échelles de divers niveaux. D'ailleurs pour fabriquer une échelle associée aux fonctions spéciales classiques, il nous suffit d'en envisager seulement au premier niveau : voir la section 7. Dans ce mémoire, nous n'étudions pas un tel problème concernant une hièrarchie d'échelle, bien qu'il soit également intéressant.

Soit $V=V(\Omega)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions holomorphes sur le revêtement universel $\tilde{\Omega}$ de $\Omega=\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})\backslash\{0,\infty\}$. En désignant par t une variable dans Ω, on considère tout élément de V comme une fonction de t, multiforme sur Ω. Soit $V(a,c)$ le sousespace de V consistant en toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$L(a,c)\phi=0\,,$$
$$L(a,c)=t\frac{d^2}{dt^2}+(c-t)\frac{d}{dt}-a\,, \tag{0.24}$$

l'équation hypergéométrique confluente de Kummer. On suppose qu'aucune des constantes a, c, $a-c$ ne soit entière. Afin de construire des échelles associées aux fonctions hypergéométriques confluentes, nous nous donnons les deux couples $(H^{(i)}, B^{(i)})=(H^{(i)}(a,c), B^{(i)}(a,c))$ $(i=1,2)$ des opérateurs :

$$H^{(1)}=\frac{1}{a}\left(t\frac{d}{dt}+a\right), \tag{0.25}$$

$$B^{(1)}=\frac{1}{c-a}\left(t\frac{d}{dt}+c-a-t\right), \tag{0.26}$$

$$H^{(2)}=-\frac{c}{c-a}\left(\frac{d}{dt}-1\right), \tag{0.27}$$

$$B^{(2)}=\frac{1}{c-1}\left(t\frac{d}{dt}+c-1\right). \tag{0.28}$$

Il est facile de voir que $H^{(1)}$ (resp. $B^{(1)}, H^{(2)}, B^{(2)}$) est un isomorphisme de $V(a, c)$ sur $V(a+1, c)$ (resp. $V(a-1, c)$, $V(a, c+1)$, $V(a, c-1)$).
Définissons $\mathcal{F}_{CH}^{(i)}=\{(H_n^{(i)}, B_n^{(i)})\ ;\ n\in \boldsymbol{Z}\}$ $(i=1, 2)$ par

$$(H_n^{(1)}, B_n^{(1)})=(H^{(1)}(a+n, c), B^{(1)}(a+n, c)),$$

$$(H_n^{(2)}, B_n^{(2)})=(H^{(2)}(a, c+n), B^{(2)}(a, c+n)),$$

et puis $\mathcal{V}_{CH}^{(i)}=\{V_n^{(i)}\ ;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ $(i=1, 2)$ par

$$V_n^{(1)}=V(a+n, c),$$

$$V_n^{(2)}=V(a, c+n).$$

Ecrivons $\mathcal{E}_{CH}^{(i)}=(\mathcal{V}_{CH}^{(i)}, \mathcal{F}_{CH}^{(i)})$.

PROPOSITION 5. *$\mathcal{E}_{CH}^{(i)}$ $(i=1, 2)$ sont des échelles associées aux fonctions hypergéométriques confluentes. Toute section $\Phi^{(1)}=\{\phi_n^{(1)}\ ;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ de $\mathcal{E}^{(1)}$ vérifie*

$$t^2\frac{d^2}{dt^2}\log\phi_n^{(1)}+a(n)=a(n)\frac{\phi_{n-1}^{(1)}\phi_{n+1}^{(1)}}{(\phi_n^{(1)})^2}, \tag{0.29}$$

tandis que $\Phi^{(2)}=\{\phi_n^{(2)}\ ;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ de $\mathcal{E}^{(2)}$ satisfait à

$$\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}\log\phi_n^{(2)}+c+n-a-1=c(n)\frac{\phi_{n-1}^{(2)}\phi_{n+1}^{(2)}}{(\phi_n^{(2)})^2}, \tag{0.30}$$

où

$$a(n)=(a+n)(a+n-c),$$

$$c(n)=\frac{(c+n-1)(c+n-a)}{c+n}.$$

Nous faisons maintenant un pas dans des investigations sur l'équation différentielle hypergéométrique de Gauss:

$$(0.31) \qquad L(a, b, c)\phi = 0\,,$$

$$(0.32) \qquad L(a, b, c) = t(1-t)\frac{d^2}{dt^2} + (c-(a+b+1)t)\frac{d}{dt} - ab\,.$$

Une échelle associée aux fonctions hypergéometriques concerne un espace $V = V(\Omega)$ de fonctions multiformes définies sur $\Omega = \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})\backslash\{0, 1, \infty\}$. On désigne par $V(a, b, c)$ le sousespace de V qui se compose de toutes les solutions de (0.31). La totalité des relations de contiguite des fonctions hypergéométriques a été déterminée par C. F. Gauss. On peut la retrouver à la manière plus systématique au moyen de la méthode de factorisation ([3], [6]). En supposant que

$$a, b, c, c-a, c-b \notin \boldsymbol{Z}\,,$$

nous en extrayons les deux couples $(H^{(i)}, B^{(i)}) = (H^{(i)}(a, b, c), B^{(i)}(a, b, c))$:

$$(0.33) \qquad H^{(1)} = \frac{1}{a}\left(t\frac{d}{dt} + a\right),$$

$$(0.34) \qquad B^{(1)} = \frac{1}{a-c}\left(t(t-1)\frac{d}{dt} + a - c + bt\right),$$

$$(0.35) \qquad H^{(2)} = \frac{c}{(c-a)(c-b)}\left((1-t)\frac{d}{dt} + c - a - b\right),$$

$$(0.36) \qquad B^{(2)} = \frac{1}{c-1}\left(t\frac{d}{dt} + c - 1\right).$$

Posons :

$$(H_n^{(1)}, B_n^{(1)}) = (H^{(1)}(a+n, b, c), B^{(1)}(a+n, b, c))\,,$$

$$(H_n^{(2)}, B_n^{(2)}) = (H^{(2)}(a, b, c+n), B^{(2)}(a, b, c+n))\,,$$

puis

$$V_n^{(1)} = V(a+n, b, c)\,,$$

$$V_n^{(2)} = V(a, b, c+n)\,,$$

et ensuite pour $i = 1, 2$,

$$\mathcal{F}_H^{(i)} = \{(H_n^{(i)}, B_n^{(i)})\ ;\ n \in \boldsymbol{Z}\}\,,$$

$$\mathcal{V}_H^{(i)} = \{V_H^{(i)}\ ;\ n \in \boldsymbol{Z}\}\,,$$

$$\mathcal{E}_H^{(i)} = (\mathcal{V}_H^{(i)}, \mathcal{F}_H^{(i)})\,.$$

PROPOSITION 6. *$\mathcal{E}_H^{(i)}$ sont des échelles associées à* (0.32). *Soient $\Phi^{(i)} = \{\phi_n^{(i)}\ ;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$ des sections de $\mathcal{E}_H^{(i)}$ respectivement. Elles vérifient*

$$(0.37)\qquad t^2\frac{d}{dt}(1-t)\frac{d}{dt}\log\phi_n^{(1)}+a(n)=a(n)\frac{\phi_{n-1}^{(1)}\phi_{n+1}^{(1)}}{(\phi_n^{(1)})^2},$$

$$(0.38)\qquad -\frac{d}{dt}t(t-1)\frac{d}{dt}\log\phi_n^{(2)}+d(n)=c(n)\frac{\phi_{n-1}^{(2)}\phi_{n+1}^{(2)}}{(\phi_n^{(2)})^2},$$

où

$$a(n)=(a+n)(a+n-c),$$

$$c(n)=-\frac{c+n-1}{c+n}(c+n-a)(c+n-b),$$

$$d(n)=-(c+n-a)(c+n-b)+c+n-a-b.$$

Puisque $L(a, b, c)$ reste invariant sous l'échange des paramètres a et b, nous avons une autre échelle $\mathcal{E}_H^{(1)\prime}$ dont la factorisation est donnée par les deux opérateurs :

$$(0.39)\qquad H^{(1)\prime}=\frac{1}{b}\left(t\frac{d}{dt}+b\right),$$

$$(0.40)\qquad B^{(1)\prime}=\frac{1}{b-c}\left(t(t-1)\frac{d}{dt}+b-c+at\right).$$

Toute section $\Phi^{(1)\prime}$ de $\mathcal{E}_H^{(1)\prime}$ satisfait à

$$(0.41)\qquad t^2\frac{d}{dt}(1-t)\frac{d}{dt}\log\phi_n^{(1)\prime}+b(n)=b(n)\frac{\phi_{n-1}^{(1)\prime}\phi_{n+1}^{(1)\prime}}{(\phi_n^{(1)\prime})^2},$$

où $b(n)=(b+n)(b+n-c)$. Nous pouvons sans peine déduire de (0.37) et de (0.40) que :

PROPOSITION 7. *Les fonctions hypergéométriques $\boldsymbol{F}(a, b, c\,; t)$ vérifient les relations algébriques*

$$\begin{aligned} &a(a-c)\boldsymbol{F}(a-1, b, c\,; t)\boldsymbol{F}(a+1, b, c\,; t)\\ &\qquad -b(b-c)\boldsymbol{F}(a, b-1, c\,; t)\boldsymbol{F}(a, b+1, c\,; t)\\ &=(a-b)(a+b-c)\boldsymbol{F}(a, b, c\,; t)^2. \end{aligned}$$

Nous verrons qu'il existe une échelle $\mathcal{E}_H$ de la seconde dimension contenant $\mathcal{E}_H^{(i)}$ $(i=1, 2)$ comme des *sous-échelles.*

Dans § 1 on définira une échelle de Laplace et montrera que $\mathcal{E}_H^{(i)}$ et $\mathcal{E}_{CH}^{(i)}$ le sont. Une symétrie d'une échelle de Laplace $\mathcal{E}$ sera étudiee dans §§ 2–5. On verra que toutes les symétries de $\mathcal{E}$ forment une algèbre de Lie, isomorphe à $\mathfrak{gl}(2, \boldsymbol{C})$. §§ 6–7 seront consacrées à l'étude de l'équation de Toda. Le but de §§ 8-10 est de construire une échelle munie d'un treillis associée ou bien aux fonctions hypergéométriques ou bien aux fonctions hypergéométriques confluentes.

1. Echelle de Laplace.

Considérons une échelle $\mathcal{E}=\mathcal{E}(V)$ de V dont la factorisation $\mathcal{F}$ est donnée par les opérateurs différentiels du premier ordre :

$$H_n=h_nX+g_n\,, \tag{1.1}$$

$$B_n=b_nX+a_n\,, \tag{1.2}$$

où X est une dérivation sur V, a_n, b_n, g_n et h_n étant des fonctions de V.

PROPOSITION 8. *Sous l'hypothèse* **A1**, *on a*

$$h_{n-1}b_n(a_{n+1}g_n+b_{n+1}Xg_n-1)=b_{n+1}h_n(g_{n-1}a_n+h_{n-1}Xa_n-1)\,, \tag{1.3}$$

$$X\log h_n-\frac{a_n}{b_n}+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=X\log b_n-\frac{g_n}{h_n}+\frac{g_{n-1}}{h_{n-1}}\,. \tag{1.4}$$

En effet, les montantes de $\mathcal{E}$ sont :

$$M_n=b_{n+1}h_nX^2+(b_{n+1}Xh_n+b_{n+1}g_n+a_{n+1}h_n)X+b_{n+1}Xg_n+a_{n+1}g_n-1\,, \tag{1.5}$$

$$M'_n=h_{n-1}b_nX^2+(h_{n-1}Xb_n+h_{n-1}a_n+g_{n-1}b_n)X+h_{n-1}Xa_n+g_{n-1}a_n-1\,, \tag{1.6}$$

d'où on établit la proposition.

DÉFINITION 5. On dit que $\mathcal{E}$ est une *échelle de Laplace* lorsqu'il existe un ensemble $\{f_n\,;\ n\in \boldsymbol{Z}\}$ de fonctions de V tel que :

$$h_n=f_{n+1}f_n^{-1}\,,\quad X\log f_n+\frac{a_n}{b_n}=0\,.$$

Dans ce cas, la contrainte (1.4) se scinde et s'écrit comme ceci :

$$X\log h_n-\frac{a_n}{b_n}+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=0\,, \tag{1.7}$$

$$X\log b_n-\frac{g_n}{h_n}+\frac{g_{n-1}}{h_{n-1}}=0\,. \tag{1.8}$$

Une échelle associée à une suite de Laplace est une échelle de Laplace. Il est facile de voir que :

PROPOSITION 9. *Si $\mathcal{E}$ est une échelle de Laplace, alors*

$$H'_n = f_{n+1}^{-1} H_n f_n\,, \quad B'_n = f_{n-1}^{-1} B_n f_n \tag{1.9}$$

définissent une échelle $\mathcal{E}'$ associée à une suite de Laplace, $\mathcal{L}'$.

En effet, on obtient de (1.9) la suite

$$\mathcal{L}' = \{X^2 + s'_{n+1} X + r'_n\,;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$$

telle que:

$$r'_n = -\frac{f_{n-1}}{b_n f_n}\,, \quad s'_{n+1} = \frac{f_n}{f_{n+1}}(g_n + h_n X \log f_n)\,.$$

Soient $\mathcal{E}_H^{(i)}$ $(i=1,2)$ les échelles que nous avons considérées dans l'introduction.

PROPOSITION 10. *$\mathcal{E}_H^{(i)}$ sont des échelles de Laplace par rapport à*

$$X_{(1)} = (1-t)\frac{d}{dt}\,, \tag{1.10}$$

$$X_{(2)} = t(t-1)\frac{d}{dt}\,, \tag{1.11}$$

respectivement.

En effet, si l'on pose par exemple pour $\mathcal{F}_H^{(1)}$:

$$X_{(1)} = x_{(1)}\frac{d}{dt}\,,$$

alors la condition (1.7) peut s'écrire d'après (0.33)-(0.34):

$$x_{(1)}\frac{d}{dt}\log\left(\frac{t}{a+n}x_{(1)}^{-1}\right) - \frac{x_{(1)}}{t(t-1)}(a+n-c+bt)$$
$$+\frac{x_{(1)}}{t(t-1)}(a+n+1-c+bt) = 0\,.$$

Il vient donc:

$$\frac{d}{dt}x_{(1)} - \frac{x_{(1)}}{t-1} = 0\,,$$

d'où on obtien (1.10). Nous avons de plus

$$f_n = t^{a+n-c}(1-t)^{c-a-n-b}\,.$$

La dérivation (1.11) sera déduite de (0.35)-(0.36) et (1.7) pour $\mathcal{F}_H^{(2)}$ à la manière semblable. Ainsi, on achève la démonstration de la proposition.

Il en est de même des échelles $\mathcal{E}_{CH}^{(i)}$:

PROPOSITION 11. *Les échelles* $\mathcal{E}_{CH}^{(i)}$ $(i=1,2)$ *associées aux fonctions hypergéométriques confluentes sont des échelles de Laplace pour*

$$X_{(1)}=\frac{d}{dt}, \tag{1.12}$$

$$X_{(2)}=t\frac{d}{dt}, \tag{1.13}$$

respectivement.

Soit $V(a, c)$ l'espace des fonctions hypergéométriques confluentes. Considérons les opérateurs :

$$H'(a, c)=\frac{c}{(c-a)(c-a+1)}\left[(t+a-1)\left(\frac{d}{dt}-1\right)+c-a\right],$$

$$B'(a, c)=\frac{1}{a(c-1)}\left[(t+a)t\frac{d}{dt}+a(c-1+t)\right].$$

$H'(a,c)$ (resp. $B'(a,c)$) est un isomorphisme de $V(a,c)$ sur $V(a-1,c+1)$ (resp. $V(a+1,c-1)$), vérifiant sur $V(a,c)$

$$\begin{aligned} B'(a-1, c+1)H'(a, c)&=H'(a+1, c-1)B'(a, c)\\ &=1, \end{aligned}$$

de sorte que nous avons une échelle $\mathcal{E}'$ dont la factorisation $\mathcal{F}'$ est donnée par

$$H'_n=H'(a-n, c+n),$$

$$B'_n=B'(a-n, c+n),$$

et les échelons sont :

$$V'_n=V(a-n, c+n).$$

Supposons que $\mathcal{E}'$ soit une échelle de Laplace. Il existe alors une fonction x' de t qui ne depend pas de n, telle que (1.7) soit établie par rapport à

$$X=x'\frac{d}{dt}.$$

En revanche, on obtient de (1.7) l'équation :

$$\frac{x'}{t+a-n-1}-\frac{dx'}{dt}=x'\left[-\frac{1}{t}-\frac{c-a+2n-1}{t+a-n}+\frac{c-a+2n+1}{t+a-n-1}\right],$$

qui ne possède aucune solution x' indépendante de n. Nous arrivons à :

PROPOSITION 12. *$\mathcal{E}'$ n'est pas une échelle de Laplace.*

Notons que

$$H'(a, c)=H^{(2)}(a-1, c)B^{(1)}(a, c)=B^{(1)}(a, c+1)H^{(2)}(a, c),$$

$$B'(a, c)=B^{(2)}(a+1, c)H^{(1)}(a, c)=H^{(1)}(a, c-1)B^{(2)}(a, c):$$

voir (0.25)-(0.28).

En ce qui concerne l'espace $V(a, b, c)$ des fonctions hypergéométriques, une échelle qui n'est pas de Laplace est encore donnée par les opérateurs (0.33)-(0.34) et (0.39)-(0.40). En effet, considérons une échelle $\mathcal{E}''$ définie par :

$$\begin{aligned}H^{(1)''}(a, b, c)&=H^{(1)'}(a+1, b, c)H^{(1)}(a, b, c)\\&=H^{(1)}(a, b+1, c)H^{(1)'}(a, b, c)\\&=\frac{a+b+1-c}{ab}\cdot\frac{t}{1-t}\frac{d}{dt}+\frac{1}{1-t},\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}B^{(1)''}(a, b, c)&=B^{(1)'}(a-1, b, c)B^{(1)}(a, b, c)\\&=B^{(1)}(a, b-1, c)B^{(1)'}(a, b, c)\\&=\frac{c-a-b+1}{(c-a)(c-b)}t(1-t)\frac{d}{dt}+1\\&\quad+\frac{(a+b-c)(a+b-1)-ab}{(c-a)(c-b)}t.\end{aligned}\tag{1.15}$$

On n'entre pas dans le détail de calculs.

2. Symétrie.

Soient $\mathcal{E}=(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ une échelle de V et $\mathcal{S}=\{S_n ; n\in \boldsymbol{Z}\}$ un ensemble de transformations linéaires de V.

DÉFINITION 6. On appelle $\mathcal{S}$ une *symétrie* de $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout n

$$H_nS_n=S_{n+1}H_n,\tag{2.1}$$

$$B_nS_n=S_{n-1}B_n,\tag{2.2}$$

sur l'échelon V_n.

Il est clair que (2.1) entraîne (2.2) et vice versa. Soient $\mathcal{M}=\{M_n\,;\ n\in \boldsymbol{Z}\}$, $\mathcal{M}'=\{M'_n\,;\ n\in \boldsymbol{Z}\}$ les montants de $\mathcal{E}$.

PROPOSITION 13. *Pour tout n, $S_nM_n-M_nS_n$ et $S_nM'_n-M'_nS_n$ annulent à la fois V_n.*

Nous allons étudier dans la suite des symétries d'une échelle de Laplace qui s'écrivent :

$$S_n=\rho_n X+\sigma_n\,, \tag{2.3}$$

ρ_n, σ_n étant des fonctions de V. Soit $\mathcal{E}'=(\mathcal{V}',\mathcal{F}')$ une autre échelle. S'il existe une chaîne de fonctions $\{f_n\,;\ n\in \boldsymbol{Z}\}$ telles que

$$H_n=f_{n+1}^{-1}H'_nf_n\,,\quad B_n=f_{n-1}^{-1}B'_nf_n\,,$$

alors $\mathcal{S}'=\{S'_n\,;\ n\in \boldsymbol{Z}\}$ défini par

$$S'_n=f_nS_nf_n^{-1}$$

est une symétrie de $\mathcal{E}'$. Par conséquent, nous supposons sans diminuer la généralité que $\mathcal{E}$ soit associée à la suite de Laplace

$$\mathcal{L}=\{L_n=X^2+s_{n+1}X+r_n\,;\ n\in \boldsymbol{Z}\}\,,$$

où par la définition (r_n, s_{n+1}) satisfont à

$$Xr_n=r_n(s_n-s_{n+1})\,, \tag{2.4}$$

$$Xs_{n+1}=r_n-r_{n+1}\,. \tag{2.5}$$

DÉFINITION 7. Une symétrie d'une échelle de Laplace de la forme (2.3) sera appelé une *transposition d'Appelle* de $\mathcal{E}$.

La réciproque de l'assertion de la proposition précédente est encore vraie :

PROPOSITION 14. *$\mathcal{S}$ est une transposition d'Appell, si et seulement si pour tout n, S_n est commutatif avec M_n sur V_n.*

Une preuve de cette proposition sera faite plus loin : voir la section 4.

3. Symétrie d'une équation différentielle.

Etant donné l'opérateur différentiel

$$L=X^2+sX+r\,, \tag{3.1}$$

considérons l'ensemble $\mathfrak{S}_0$ de tous les opérateurs

$$S=\rho X+\sigma$$

tels que

$$[L, S]=LS-SL \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, L)\,. \tag{3.2}$$

$\mathfrak{S}_0$ est un ensemble de symétrie de l'opérateur L.

PROPOSITION 15. *La condition* (3.2) *est équivalente au système des équations différentielles* :

$$X^2\rho - X(s\rho) + 2X\sigma = 0\,, \tag{3.3}$$

$$X^2\sigma + sX\sigma - rX\rho - X(r\rho) = 0\,. \tag{3.4}$$

Une vérification de cette proposition sera donnée facilement. De plus le système (3.3)-(3.4) peut se résoudre à l'aide de solutions de l'équation

$$L\phi = 0\,. \tag{3.5}$$

Nous montrons en effet :

PROPOSITION 16. *L'ensemble de toutes les solutions du système* (3.3)-(3.4) *est un espace vectoriel de la dimension quatre engendré par*

$$(\rho^{(0)}, \sigma^{(0)}) = \left(-\frac{\phi^{(1)}\phi^{(2)}}{w}, \frac{X(\phi^{(1)}\phi^{(2)})}{2w}\right), \tag{3.6}$$

$$(\rho^{(1)}, \sigma^{(1)}) = \left(\frac{(\phi^{(1)})^2}{w}, -\frac{\phi^{(1)}X\phi^{(1)}}{w}\right), \tag{3.7}$$

$$(\rho^{(2)}, \sigma^{(2)}) = \left(-\frac{(\phi^{(2)})^2}{w}, \frac{\phi^{(2)}X\phi^{(2)}}{w}\right), \tag{3.8}$$

$$(\rho^{(\infty)}, \sigma^{(\infty)}) = (0, 1)\,, \tag{3.9}$$

où $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$ *est un système fondamental des solutions de* (3.5) *et* w *désigne le déterminant de Wronsky* :

$$w = \phi^{(1)}X\phi^{(2)} - \phi^{(2)}X\phi^{(1)}\,.$$

D'abord on déduit du système que ρ satisfait à l'équation différentielle du troisième ordre :

$$X^3\rho - 2tX\rho - 2X(t\rho) = 0\,, \tag{3.10}$$

où

$$t=\frac{1}{2}Xs+\frac{1}{4}s^2-r.$$

Toute solution de (3.10) est écrite comme le produit de deux solutions quelconques de

$$(X^2-t)\phi=0,$$

de sorte que l'on a

$$\rho=\frac{\phi^{(\alpha)}\phi^{(\beta)}}{w}, \qquad \alpha, \beta=1, 2. \tag{3.11}$$

Etant donnée une fonction ρ, la fonction σ est déterminée par

$$X\rho-s\rho+2\sigma=0,$$

à une constante additive près. En tenant compte de

$$Xw+sw=0,$$

on obtient auprès de (3.11),

$$\sigma=-\frac{X(\phi^{(\alpha)}\phi^{(\beta)})}{2w}.$$

Il en résulte la proposition.

Posons pour $j=0, 1, 2, \infty$,

$$S^{(j)}=\rho^{(j)}X+\sigma^{(j)}. \tag{3.12}$$

PROPOSITION 17. *$\mathfrak{S}_0$ est une algèbre de Lie, isomorphe à* $\mathfrak{gl}(2, \boldsymbol{C})$.

En effet, on a les relations de commutations:

$$[S^{(1)}, S^{(2)}]=S^{(0)}, \tag{3.13}$$

$$[S^{(0)}, S^{(1)}]=2S^{(1)}, \tag{3.14}$$

$$[S^{(0)}, S^{(2)}]=-2S^{(2)}, \tag{3.15}$$

$$[S^{(\infty)}, S^{(j)}]=0. \tag{3.16}$$

$\mathfrak{S}_0$ est engendré par $S^{(j)}$.

4. Système de Lax.

Nous allons tout d'abord vérifier la proposition 14. En substituant (2.3) et

$$H_n = X + s_{n+1}\,, \quad B_n = -r_n^{-1}X$$

dans (2.1), on obtient

$$(4.1)_n \qquad \sigma_{n+1} = X\rho_n + \sigma_n\,,$$

$$(4.2)_n \qquad r_{n+1}\rho_{n+1} = s_{n+1}X\rho_n - X\sigma_n + r_n\rho_n\,.$$

De plus il résulte de (2.2) :

$$(4.3)_n \qquad \rho_{n-1} = \rho_n - r_n^{-1}X\sigma_n\,,$$

$$(4.4)_n \qquad r_n\sigma_{n-1} = X(r_n\rho_n) - s_nX\sigma_n + r_n\sigma_n\,.$$

Etant donné un couple (ρ_n, σ_n) de fonctions, on définira d'une part $(\rho_{n+1}, \sigma_{n+1})$ par $(4.1)_n$-$(4.2)_n$ et d'autre part $(\rho_{n-1}, \sigma_{n-1})$ par $(4.3)_n$-$(4.4)_n$.
Pour que la détermination de S_{n+1} et S_{n-1} soit compatible pour tout n, il faut et il suffit que (ρ_n, σ_n) satisfasse au système :

$$(4.5) \qquad X^2\rho_n - X(s_{n+1}\rho_n) + 2X\sigma_n = 0\,,$$

$$(4.6) \qquad X^2\sigma_n + s_{n+1}X\sigma_n - r_nX\rho_n - X(r_n\rho_n) = 0\,.$$

En effet, nous avons, par exemple, d'après $(4.3)_{n+1}$

$$\begin{aligned}0 &= \rho_n - \rho_{n+1} + r_{n+1}^{-1}X\sigma_{n+1} \\ &= r_{n+1}^{-1}(X^2\rho_n + 2X\sigma_n - s_{n+1}X\rho_n - r_n\rho_n + r_{n+1}\rho_n) \\ &= r_{n+1}^{-1}(X^2\rho_n - X(s_{n+1}\rho_n) + 2X\sigma_n)\,,\end{aligned}$$

où on utilise $(4.1)_n$, (2.5). La démonstration de la proposition est ainsi complétée. On appellera (4.5)-(4.6) un *système de Lax* pour une transposition d'Appell.

Soit $\mathfrak{S}^{(n)}$ l'ensemble de tous les opérateurs (2.3) tels que

$$[L_n, S_n] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\, L_n)\,.$$

Comme nous l'avons vu plus haut, $\mathfrak{S}^{(n)}$ est une algèbre de Lie, isomorphe à $\mathfrak{gl}(2, \boldsymbol{C})$.

5. Transposition d'Appell.

Soient $\mathcal{E}=(\mathcal{V},\mathcal{F})$ une échelle associée à une suite de Laplace et $\Phi^{(i)}=\{\phi_n^{(i)}\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ $(i=1,2)$ de deux sections de $\mathcal{E}$ telles que pour tout n, $(\phi_n^{(1)},\phi_n^{(2)})$ soit un système des bases de l'échelon V_n. Désignons par w_n le déterminant de Wronsky pour ce système :

$$w_n=\phi_n^{(1)}X\phi_n^{(2)}-\phi_n^{(2)}X\phi_n^{(1)}\,.$$

PROPOSITION 18. *Pour tout n, on a*

$$w_{n+1}=r_{n+1}w_n\,. \tag{5.1}$$

En effet, parce que

$$X\phi_{n+1}=-r_{n+1}\phi_n\,,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} w_{n+1}&=-r_{n+1}(X\phi_n^{(1)}+s_{n+1}\phi_n^{(1)})\phi_n^{(2)}+r_{n+1}(X\phi_n^{(2)}+s_{n+1}\phi_n^{(2)})\phi_n^{(1)} \\ &=r_{n+1}w_n\,. \end{aligned}$$

Puis pour tout n on définit $(\rho_n^{(j)},\sigma_n^{(j)})$ $(j=0,1,2,\infty)$ à la même manière que (3.6)-(3.9) et $S_n^{(j)}$ par (2.3).

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble de toutes les transpositions d'Appell de l'échelle $\mathcal{E}$. Il est l'algèbre de Lie munie des opérations :

$$\alpha\mathcal{S}+\alpha'\mathcal{S}'=\{\alpha S_n+\alpha' S'_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}\,,$$

$$[\mathcal{S},\mathcal{S}']=\{[S_n,S'_n]\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}\,,$$

où $\mathcal{S}=\{S_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$, $\mathcal{S}'=\{S'_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$, α et α' étant des constantes. Posons ensuite $\mathcal{S}^{(j)}=\{S_n^{(j)}\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ $(j=0,1,2,\infty)$.

PROPOSITION 19. *$\mathcal{S}^{(j)}$ forme un système générateur de $\mathfrak{S}$.*

En effet, en tenant compte de la formule :

$$X\left(\frac{X(\phi_n^{(\alpha)}\phi_n^{(\beta)})}{w_n}\right)=\frac{2}{w_n}(X\phi_n^{(\alpha)}X\phi_n^{(\beta)}-r_n\phi_n^{(\alpha)}\phi_n^{(\beta)})\,,$$

nous avons, par exemple, d'après $(4.3)_n$,

$$\begin{aligned}\rho_{n-1}&=\rho_n-r_n^{-1}X\sigma_n\\&=\frac{\phi_n^{(\alpha)}\phi_n^{(\beta)}}{w_n}+r_n^{-1}X\left(\frac{X(\phi_n^{(\alpha)}\phi_n^{(\beta)})}{2w_n}\right)\\&=r_n^{-1}\frac{X\phi_n^{(\alpha)}X\phi_n^{(\beta)}}{w_n}\\&=\frac{\phi_{n-1}^{(\alpha)}\phi_{n-1}^{(\beta)}}{w_{n-1}}.\end{aligned}$$

On n'entre pas dans le détail de calculs.
Nous voyons que $\mathcal{S}^{(j)}$ vérifient les relations de commutations (3.13)-(3.16).

PROPOSITION 20. *$\mathfrak{S}$ est isomorphe à* $\mathfrak{gl}(2, \boldsymbol{C})$.

6. Equation de Toda.

Soient $\mathcal{E}=\mathcal{E}(V)$ une échelle de Laplace et $\mathcal{M}=\{M_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ le montant de $\mathcal{E}$ donné par (1.5). Dans cette section nous montrons :

THÉORÈME 1. *Sous l'hypothèse qu'il existe une chaîne $P=\{P_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ de fonctions de V satisfaisant à l'équation :*

$$h_n b_n X^2 \log P_n + e_n = 0\,, \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} e_n &= a_n g_n - b_n X g_n - \frac{b_n}{b_{n+1}}(a_{n+1}g_n - 1) \\ &= g_n a_n - h_n X a_n - \frac{h_n}{h_{n-1}}(g_{n-1}a_n - 1)\,, \end{aligned} \tag{6.2}$$

pour toute section $\Phi=\{\phi_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ de $\mathcal{E}$ un ensemble $\Psi=\{\psi_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ défini par

$$\psi_n = P_n \phi_n \tag{6.3}$$

est une solution de l'équation de Toda :

$$X^2 \log \psi_n = \frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2}\,. \tag{6.4}$$

En effet, Φ vérifie la relation

$$\phi_{n-1}\phi_{n+1} = B_n\phi_n H_n\phi_n - c_n\phi_n M_n\phi_n\,,$$

où c_n est une fonction de V. En y posant

$$c_n = \frac{b_n}{b_{n+1}} ,$$

et en tenant compte de (1.3)-(1.4), on a

$$\frac{\phi_{n-1}\phi_{n+1}}{\phi_n^2} = -h_n b_n X^2 \log \phi_n + e_n , \tag{6.5}$$

e_n étant la fonction (6.2). Il en résulte d'après (1.7)-(1.8) que

$$X\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = -\frac{e_n}{b_n h_n} + \frac{1}{b_n h_{n-1}} ,$$

$$X\left(\frac{g_n}{h_n}\right) = -\frac{e_n}{b_n h_n} + \frac{1}{h_n b_{n+1}} ,$$

de sorte que l'on obtient

$$X^2 \log b_n + X^2 \log h_n = \frac{e_{n-1}}{h_{n-1} b_{n-1}} + \frac{e_{n+1}}{h_{n+1} e_{n+1}} - 2\frac{e_n}{h_n e_n} . \tag{6.6}$$

D'ailleurs on voit d'après (1.7)-(1.8), (6.1)-(6.2) et (6.6) que la fonction

$$Q_n = h_n b_n \frac{P_{n-1} P_{n+1}}{P_n^2}$$

satisfait à l'équation

$$X^2 \log Q_n = 0 .$$

En posant $Q_n = 1$ sans nuire à aucune généralité, nous avons (6.4) pour (6.3), ce qui achève la démonstration du théorème.

On obtient la proposition 3 en appliquant le théorème au cas où $\mathcal{E}$ est associée à une suite de Laplace. En effet, (6.5) se reduit à (0.23).

Soient $\mathcal{E}_{CH}^{(i)}$ (resp. $\mathcal{E}_{H}^{(i)}$) $(i=1, 2)$ les échelles associées aux fonctions hypergéométriques confluentes (resp. fonctions hypergéométriques). En appliquant la relation (6.5) aux cas qui nous occuppent, nous obtenons tout de suite les relations (0.29)-(0.30) (resp. (0.37)-(0.38)). Ce qui établit la proposition 5 (resp. la proposition 6).

Soit $\Phi^{(i)}$ une section de $\mathcal{E}_{CH}^{(i)}$. Posons

$$P_n^{(1)} = \theta(a\,; n)^{-1} \theta(a-c\,; n)^{-1} t^{-a(n)} , \tag{6.7}$$

$$P_n^{(2)} = \theta(c-a\,; n)^{-1} \Gamma(c+n)^{-1} \exp\left\{(c+n-a-1)t + \frac{1}{2} n^2 \log t\right\} , \tag{6.8}$$

$\theta(\nu\,; k)$ étant définie par (0.12), et puis

$$\psi_n^{(i)} = P_n^{(i)} \phi_n^{(i)}.$$

D'après le théorème, on verra que :

PROPOSITION 21. *Pour chaque i,* $P^{(i)} = \{P_n^{(i)}\,;\, n \in \boldsymbol{Z}\}$ *et* $\Psi^{(i)} = \{\psi_n^{(i)}\,;\, n \in \boldsymbol{Z}\}$ *satisfont à la fois à l'équation*

$$X_{(i)}^2 \log \tau_n = \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2}\,, \tag{6.9}$$

où $X_{(i)}$ *désignent les opérateurs* (1.12)-(1.13).

Considérons ensuite les deux échelles de Laplace $\mathcal{E}_H^{(i)}$. Soient $X_{(i)}$ $(i=1, 2)$ les dérivations (1.10)-(1.11). En utilisant la notation de la proposition 6 et en tenant compte de (0.37)-(0.38), nous introduisons les fonctions

$$P_n^{(1)} = \theta(a\,;\, n)^{-1} \theta(a-c\,;\, n)^{-1} (1-t)^{\lambda(n)} (1-t)^{(1/2)a(n)} t^{-a(n)} \tag{6.10}$$

$$P_n^{(2)} = \theta(c-a\,;\, n)^{-1} \theta(c-b\,;\, n) \Gamma(c+n)^{-1} \times (t-1)^{\lambda(n)} t^{-\lambda(n)} (t(t-1))^{-(1/2)d(n)}, \tag{6.11}$$

où $\lambda(n)$ est un polynôme du premier ordre de n. Alors il résulte du théorème que :

PROPOSITION 22. *Pour chaque i, la substitution*

$$\psi_n^{(i)} = P_n^{(i)} \phi_n^{(i)}$$

définit une transformation de Backlund entre les deux solutions $P^{(i)}$ *et* $\Phi^{(i)}$ *de l'équation de Toda* (6.9).

7. Solution en séparation de variables.

On nécessite maintenant les résultats de [5] sur des solutions élémentaires de l'équation de Toda. Nous allons les appliquer au cas qui nous occupe. Soit $P = \{P_n\,;\, n \in \boldsymbol{Z}\}$ une solution de (6.9).

DÉFINITION 8. On dit que P est une *solution en séparation de variables* lorsque pour tout n

$$X^2 \log P_n = f(n) g \tag{7.1}$$

où $f(n)$ est une fonction de n seul tandis que g ne dépend pas de n.

PROPOSITION 23. *Toute solution en séparation de variables de l'équation de Toda se réduit à l'un des trois cas suivants :*

C1 $$f(n)=(n+b)(n+c)\,,$$

(7.2) $$X^2\log g=2g\,,$$

C2 $$f(n)=n+b\,,$$

(7.3) $$X^2\log g=0\,,$$

C3 $$f(n)=1\,,$$

$$X^2\log g=0\,,$$

b et c désignant des constantes.

Selon les trois cas nous possédons respectivement les trois propositions énnoncées ci-dessous. Soit u une fonction de V telle que $Xu=u$.

PROPOSTION 24 [**C1**]. *La solution générale de l'équation* (7.2) *est de la forme*:

(7.4) $$g=\frac{\alpha^2u^\alpha}{(1-u^\alpha)^2}\,,$$

α étant une constante arbitraire non nulle. Lorsque $\alpha=0$, on promet de la ramplacer par

(7.5) $$g=(\log u)^{-2}\,.$$

De plus si l'on écrit

(7.6) $$P_n=Q_n g^{(1/2)f(n)}$$

alors $\{Q_n\,;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ vérifie

(7.7) $$X^2\log Q_n=0\,,\quad f(n)=\frac{Q_{n-1}Q_{n+1}}{Q_n^2}\,.$$

Admettons que dans la reste de cette section Q_n désignent de fonctions quelconques satisfaisant à (7.7).

Pour une solution g de l'équation (7.3), il y a une constante α telle que X$g=\alpha g$.

PROPOSITION 25 [**C2**]. *Si α n'est pas nulle, alors une solution P en séparation de variables s'écrit*:

(7.8) $$P_n=Q_n\exp\left(\alpha^{-2}f(n)g+\frac{1}{2}e(n)\log g\right)$$

(7.9) $$g=u^\alpha$$

où $e(n)$ est un polynôme unitaire quadrique de n. En outre une solution P telle que g dans (7.1) *soit constante est*:

$$P_n = Q_n \exp\left(\frac{1}{2} f(n)(\log u)^2\right). \tag{7.10}$$

PROPOSITION 26 [**C3**]. *En utilisant la même notation que la proposition précédente, on a d'une part*

$$P_n = Q_n \exp(\alpha^{-2} g)$$

avec (7.9), *si* $\alpha \neq 0$, *et d'autre part*

$$P_n = Q_n \exp\left(\frac{1}{2} (\log u)^2\right), \tag{7.11}$$

pour le cas $\alpha = 0$.

Une solution de (7.7) est écrite sous la forme:

$$Q_n = u^{d(n)} Q(n), \tag{7.12}$$

où $d(n)$ désigne un polynôme du premier ordre en n et $XQ(n) = 0$.

Les fonctions (0.6) considérées pour les fonctions cylindriques sont du type (7.11). Puis la solution (0.10) qui concerne les fonctions de Weber-Hermite est un exemple du cas (7.10). Dans l'étude des fonctions hypergéométriques confluentes nous possédons les deux solutions $P^{(i)}$ $(i=1, 2)$ en séparation de variables correspondant à $\mathcal{E}_{CH}^{(i)}$ respectivement. $P^{(1)}$ est un exemple de (7.4), (7.6) tandis que $P^{(2)}$ est à la forme (7.8)-(7.9). Ce qui établit la proposition 21: voir (6.7)-(6.8). En outre, une vérification de la proposition 22 est immédiate. Les fonctions (6.10)-(6.11) que nous avons adaptées aux échelles $\mathcal{E}_H^{(i)}$ sont de la forme (7.6); notons que $X_{(i)} u = u$ entraîne

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{1-t}, & i=1, \\[2ex] \dfrac{t-1}{t}, & i=2. \end{cases}$$

8. Fonctions hypergéométrique.

Soient $(H^{(i)}, B^{(i)}) = (H^{(i)}(a, b, c), B^{(i)}(a, b, c))$ $(i=1, 2)$ les deux couples des opérateurs (0.33)-(0.36) et $V(a, b, c)$ l'espace des fonctions hypergéométriques. On montre que:

PROPOSITION 27. *Sur* $V(a, b, c)$,

$$H^{(1)}(a, b, c+1)H^{(2)}(a, b, c) = H^{(2)}(a+1, b, c)H^{(1)}(a, b, c). \tag{8.1}$$

En effet, les deux membres de (8.1) sont à la fois égals à

$$H^{(1,2)}(a, b, c) = -\frac{c}{a(c-b)}\left[(1-t)\frac{d}{dt} - a\right], \tag{8.2}$$

à l'opérateur $L(a, b, c)$ près. Nous avons de plus

$$\begin{aligned} B^{(1,2)}(a, b, c) &= B^{(1)}(a, b, c-1)B^{(2)}(a, b, c) \\ &= B^{(2)}(a-1, b, c)B^{(1)}(a, b, c) \\ &= -\frac{1}{c-1}\left[t(t-1)\frac{d}{dt} - c + 1 + bt\right]. \end{aligned} \tag{8.3}$$

PROPOSITION 28. *La couple* $(H^{(1,2)}, B^{(1,2)})$ *définit une échelle* $\mathcal{E}_H^{(1,2)}$ *de Laplace par rapport à la dérivation*:

$$X_{(1,2)} = t\frac{d}{dt}. \tag{8.4}$$

Tous les échelons de $\mathcal{E}_H^{(1,2)}$ *sont*:

$$V_n = V(a+n, b, c+n).$$

De plus toute section $\Phi^{(1,2)}$ *de* $\mathcal{E}_H^{(1,2)}$ *vérifie*

$$(1-t)^2\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}\log\phi_n^{(1,2)} = e(n)\frac{\phi_{n-1}^{(1,2)}\phi_{n+1}^{(1,2)}}{(\phi_n^{(1,2)})^2} - f(n), \tag{8.5}$$

$$e(n) = \frac{c+n-1}{c+n}(a+n)(c+n-b),$$

$$f(n) = (a+n)(c+n-1-b).$$

Une preuve de la proposition sera immédiatement faite.

REMARQUE 1. D'après la symétrie entre a et b, on peut remplacer dans la considération faite ci-dessus $H^{(1)}$ par $H^{(1)'}$ et obtient un autre couple $(H^{(1,2)'}, B^{(1,2)'})$ en plus de (8.2)-(8.3) : voir (0.39)-(0.40). Soit $\mathcal{E}_H^{(1,2)'}$ une échelle définie par ce couple des opérateurs. En tenant compte d'une équation similaire à (8.5), à laquelle une section de $\mathcal{E}_H^{(1,2)'}$ satisfait, nous possédons encore l'équation algébrique:

$$\begin{aligned} &a(c-b)\boldsymbol{F}(a-1, b, c-1\,;\,t)\boldsymbol{F}(a+1, b, c+1\,;\,t) \\ &\qquad -b(c-a)\boldsymbol{F}(a, b-1, c-1\,;\,t)\boldsymbol{F}(a, b+1, c+1\,;\,t) \\ &=c(a-b)\boldsymbol{F}(a, b, c\,;\,t)^2, \end{aligned}$$

pour les fonctions hypergéométriques de Gauss.

Nous avons le diagramme des opérateurs :

$$\begin{tikzcd} & V(a, b, c+1) & V(a+1, b, c+1) \\ V(a-1, b, c) & V(a, b, c) \arrow[l, "B^{(1)}"'] \arrow[r, "H^{(1)}"] \arrow[u, "H^{(2)}"] \arrow[ur, "H^{(1,2)}"] \arrow[dl, "B^{(1,2)}"'] \arrow[d, "B^{(2)}"] & V(a+1, b, c) \\ V(a-1, b, c-1) & V(a, b, c-1) & \end{tikzcd}$$

Posons pour $i=1, 2$ et pour entiers n, m,

$$V_{n,m}=V(a+n, b, c+m)\,,$$

$$H_{n,m}^{(i)}=H^{(i)}(a+n, b, c+m)\,,$$

$$B_{n,m}^{(i)}=B^{(i)}(a+n, b, c+m)\,,$$

et puis

$$\mathcal{V}_H=\{V_{n,m}\,;\ (n, m)\in\boldsymbol{Z}^2\}\,,$$

$$\mathcal{F}_H=\{(H_{n,m}^{(i)}, B_{n,m}^{(i)})\,;\ (n, m)\in\boldsymbol{Z}^2,\ i=1, 2\}\,.$$

DÉFINITION 9. La donnée $\mathcal{E}_H=(\mathcal{V}_H, \mathcal{F}_H)$ est appelée une *échelle munie d'un treillis* (de la seconde dimension), associée aux fonctions hypergéométriques.

Une section de $\mathcal{E}_H$ est un ensemble $\Phi=\{\phi_{n,m}\,;\ (n, m)\in\boldsymbol{Z}^2\}$ de fonctions $\phi_{n,m}$ de $V_{n,m}$ tel que :

$$H_{n,m}^{(1)}\phi_{n,m}=\phi_{n+1,m}\,,\quad B_{n,m}^{(1)}\phi_{n,m}=\phi_{n\;\;1,m}\,,$$

$$H_{n,m}^{(2)}\phi_{n,m}=\phi_{n,m+1}\,,\quad B_{n,m}^{(2)}\phi_{n,m}=\phi_{n,m-1}\,.$$

Pour m (resp. n) fixé arbitrairement, nous avons une échelle $\mathcal{E}_H^{(1),m}=(\mathcal{V}_H^{(1),m}, \mathcal{F}_H^{(1),m})$ (resp. $\mathcal{E}_H^{(2),n}=(\mathcal{V}_H^{(2),n}, \mathcal{F}_H^{(2),n})$) telle que

$$\mathcal{V}_H^{(1),m}=\{V_{n,m}\ ;\ n\in \boldsymbol{Z}\}\,,$$
$$(\text{resp. } \mathcal{V}_H^{(2),n}=\{V_{n,m}\ ;\ m\in \boldsymbol{Z}\})\,,$$
$$\mathcal{F}_H^{(1),m}=\{(H_{n,m}^{(1)},B_{n,m}^{(1)})\ ;\ n\in \boldsymbol{Z}\}\,,$$
$$(\text{resp. } \mathcal{F}_H^{(2),n}=\{(H_{n,m}^{(2)},B_{n,m}^{(2)})\ ;\ m\in \boldsymbol{Z}\})\,.$$

Elle est équivalente à $\mathcal{E}_H^{(1)}$ (resp. à $\mathcal{E}_H^{(2)}$) ; on dit simplement que $\mathcal{E}_H^{(i)}$ est une *sous-échelle* de $\mathcal{E}_H$.

REMARQUE 2. Considérons les opérateurs :

$$\begin{aligned} H^{(1,2)*}&=B^{(1)}(a,b,c+1)H^{(2)}(a,b,c)\\ &=H^{(2)}(a-1,b,c)B^{(1)}(a,b,c)\,,\\ B^{(1,2)*}&=H^{(1)}(a,b,c-1)B^{(2)}(a,b,c)\\ &=B^{(2)}(a+1,b,c)H^{(1)}(a,b,c)\,. \end{aligned}$$

Ils définissent une sous-échelle $\mathcal{E}_H^{(1,2)*}$ de $\mathcal{E}_H$, qui n'est pas une échelle de Laplace. En revanche, $\mathcal{E}_H^{(1,2)}$ est une sous-échelle de Laplace de $\mathcal{E}_H$.

9. Système de Toda.

Soit Φ une section de l'échelle $\mathcal{E}_H$ et soit $X_{(1)}$ (resp. $X_{(2)}, X_{(1,2)}$) la dérivation (1.10) (resp. (1.11), (8.4)). D'après les propositions 6, 10, 28, Φ satisfont aux équations :

$$X_{(1)}^2\log\phi_{n,m}=a(n,m)\frac{1-t}{t^2}\left(\frac{\phi_{n-1,m}\phi_{n+1,m}}{\phi_{n,m}^2}-1\right),$$

$$X_{(2)}^2\log\phi_{n,m}=-t(t-1)\left(c(n,m)\frac{\phi_{n,m-1}\phi_{n,m+1}}{\phi_{n,m}^2}-d(n,m)\right),$$

$$X_{(1,2)}^2\log\phi_{n,m}=\frac{t}{(1-t)^2}\left(e(n,m)\frac{\phi_{n-1,m-1}\phi_{n+1,m+1}}{\phi_{n,m}^2}-f(n,m)\right),$$

où

$$a(n,m)=(a+n)(a-c+n-m)\,,$$

$$c(n,m)=-\frac{c+m-1}{c+m}(c-a+m-n)(c-b+m)\,,$$

$$d(n,m)=-(c-a+m-n)(c-b+m)+c-a-b+m-n\,,$$

$$e(n,m)=\frac{c+m-1}{c+m}(c-b+m)(a+n)\,,$$

$$f(n,m)=(c-b+m-1)(a+n)\,.$$

Puis on écrit :

$$P_{n,m}=\nu(n, m)(1-t)^{-\lambda(n,m)}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-\mu(n,m)},$$

où $\lambda(n, m)$ et $\mu(n, m)$ sont des constantes et

$$\nu(n, m)=\theta(a ; n)^{-1}\theta(c-a ; m-n)^{-1}\theta(c-b ; m)^{-1}\Gamma(c+m)^{-1}.$$

Notons que $P_{n,m}$ vérifient :

$$X_{(1)}^{2}\log P_{n,m}=\mu(n, m)\frac{1-t}{t^{2}},$$

$$X_{(2)}^{2}\log P_{n,m}=-\lambda(n, m)t(t-1),$$

$$X_{(1,2)}^{2}\log P_{n,m}=(\lambda(n, m)-\mu(n, m))\frac{t}{(1-t)^{2}},$$

et que :

$$\frac{\nu(n-1, m)\nu(n+1, m)}{\nu(n, m)^{2}}=-a(n, m),$$

$$\frac{\nu(n, m-1)\nu(n, m+1)}{\nu(n, m)^{2}}=-c(n, m),$$

$$\frac{\nu(n-1, m-1)\nu(n+1, m+1)}{\nu(n, m)^{2}}=e(n, m).$$

Maintenant il est facile de voir que :

THÉORÈME 2. (a) *Il existe un ensemble* $P=\{P_{n,m} ; (n, m)\in \boldsymbol{Z}^{2}\}$ *de fonctions de* $V(\Omega)$ *tel que le système des équations*

$$X_{(1)}^{2}\log \tau_{n,m}=-\frac{1}{1-t}\cdot\frac{\tau_{n-1,m}\tau_{n+1,m}}{\tau_{n,m}^{2}},$$

$$X_{(2)}^{2}\log \tau_{n,m}=\frac{t}{t-1}\cdot\frac{\tau_{n,m-1}\tau_{n,m+1}}{\tau_{n,m}^{2}},$$

soit vérifi par un ensemble $T=\{\tau_{n,m} ; (n, m)\in \boldsymbol{Z}^{2}\}$ *des fonctions* :

$$\tau_{n,m}=P_{n,m}Q_{n,m}. \tag{9.1}$$

(b) *On peut déterminer un autre* P *de telle manière que* T *donné par* (9.1) *satisfasse à*

$$X_{(2)}^{2}\log \tau_{n,m}=\frac{1-t}{t}\cdot\frac{\tau_{n,m-1}\tau_{n,m+1}}{\tau_{n,m}^{2}},$$

$$X_{(1,2)}^2 \log \tau_{n,m} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\tau_{n-1,m-1}\tau_{n+1,m+1}}{\tau_{n,m}^2} .$$

En effet, pour établir (a) il suffit de poser

$$\lambda(n, m) = d(n, m) , \quad \mu(n, m) = a(n, m) .$$

De plus on obtient (b) en étudiant le cas :

$$\lambda(n, m) = d(n, m) , \quad \mu(n, m) = d(n, m) - f(n, m)$$
$$= -(c+m-1)(c-b+m) .$$

Considérons en général le système :

$$X_1^2 \log \tau_{n,m} = \xi_1 \frac{\tau_{n-1,m}\tau_{n+1,m}}{\tau_{n,m}^2} , \tag{9.2}$$

$$X_2^2 \log \tau_{n,m} = \xi_2 \frac{\tau_{n,m-1}\tau_{n,m+1}}{\tau_{n,m}^2} , \tag{9.3}$$

où X_i sont des dérivations définies sur un espace $V = V(\Omega)$ de fonctions multiformes et ξ_i désignent des fonctions de V telles que

$$X_i^2 \log \xi_i = 0 . \tag{9.4}$$

DÉFINITION 10. On appellera (9.2)-(9.3) avec (9.4) le *système de Toda.*

D'après le théorème précédent, les fonctions hypergéométriques $\phi_{n,m}$ satisfont au système de Toda aux fonctions élémentaires $P_{n,m}$ près.

REMARQUE 3. Si l'on pose

$$r_{n,m}^{(i)} = X_i^2 \log \tau_{n,m} ,$$

alors le système de Toda se réduit aux équations :

$$X_1^2 \log r_{n,m}^{(1)} = r_{n-1,m}^{(1)} + r_{n+1,m}^{(1)} - 2r_{n,m}^{(1)} ,$$
$$X_2^2 \log r_{n,m}^{(2)} = r_{n,m-1}^{(2)} + r_{n,m+1}^{(2)} - 2r_{n,m}^{(2)} .$$

REMARQUE 4. En tenant compte des opérateurs $(H^{(1)\prime}, B^{(1)\prime})$ en plus de $(H^{(i)}, B^{(i)})$, nous pouvons obtenir une échelle munie d'un treillis de la dimension *trois* de telle manière que tout échelon soit :

$$V_{n,m,1} = V(a+n, b+1, c+m) .$$

Pourtant, comme nous l'avons vu plus haut, les deux transformations (1.14)-(1.15) définissent une sous-échelle qui n'est pas de Laplace.

10. Fonctions hypergéométriques confluentes.

Soient $(H^{(i)}(a, c), B^{(i)}(a, c))$ $(i=1, 2)$ les opérateurs différentiels (0.25)-(0.28) et $X_{(i)}$ les dérivations (1.12)-(1.13). Posons

$$V_{n,m}=V(a+n, c+m),$$

$$H^{(i)}_{n,m}=H^{(i)}(a+n, c+m),$$

$$B^{(i)}_{n,m}=B^{(i)}(a+n, c+m),$$

et considérons $\mathcal{E}_{CH}=(\mathcal{V}_{CH}, \mathcal{F}_{CH})$ telle que

$$\mathcal{V}_{CH}=\{V_{n,m}\ ;\ (n, m)\in \boldsymbol{Z}^2\}$$

$$\mathcal{F}_{CH}=\{(H^{(i)}_{n,m}, B^{(i)}_{n,m})\ ;\ (n, m)\in \boldsymbol{Z}^2,\ i=1, 2\}.$$

Alors $\mathcal{E}_{CH}$ est une échelle munie d'un treillis, associée aux fonctions hypergéométriques confluentes. Nous avons en effet sur $V_{n,m}$

$$H^{(1,2)}_{n,m}=H^{(1)}_{n,m+1}H^{(2)}_{n,m}=H^{(2)}_{n+1,m}H^{(1)}_{n,m}=\frac{c+m}{a+n}\cdot\frac{d}{dt},$$

$$B^{(1,2)}_{n,m}=B^{(1)}_{n,m-1}B^{(2)}_{n,m}=B^{(2)}_{n-1,m}B^{(1)}_{n,m}=\frac{1}{c+m-1}\left[t\frac{d}{dt}+c+m-1-t\right],$$

et donc une sous-échelle $\mathcal{E}^{(1,2)}_{CH}$ de $\mathcal{E}_{CH}$.

PROPOSITION 29. *$\mathcal{E}^{(1,2)}_{CH}$ est une échelle de Laplace par rapport à $X_{(2)}$.*

Parce qu'une vérification de cette proposition est facile, nous ne la faisons pas.

D'ailleurs toute section $\Phi=\{\phi_{n,m}\ ;\ (n, m)\in \boldsymbol{Z}^2\}$ de $\mathcal{E}_{CH}$ satisfait aux équations suivantes:

$$X^2_{(1)}\log \phi_{n,m}=a(n, m)\frac{1}{t^2}\left(\frac{\phi_{n-1,m}\phi_{n+1,m}}{\phi^2_{n,m}}-1\right),$$

$$X^2_{(2)}\log \phi_{n,m}=t\left(c(n, m)\frac{\phi_{n,m-1}\phi_{n,m+1}}{\phi^2_{n,m}}-d(n, m)\right), \tag{10.1}$$

$$X^2_{(2)}\log \phi_{n,m}=-t\left(e(n, m)\frac{\phi_{n-1,m-1}\phi_{n+1,m+1}}{\phi^2_{n,m}}-f(n, m)\right), \tag{10.2}$$

où

$$a(n, m)=(a+n)(a-c+n-m),$$

$$c(n, m)=\frac{c+m-1}{c+m}(c-a+m-n),$$

$$d(n, m)=c-a+m-n-1,$$

$$e(n, m)=-\frac{c+m-1}{c+m}(a+n),$$

$$f(n, m)=a+n.$$

Ensuite on pose :

$$P_{n,m}=\nu(n, m)t^{-a(n,m)}e^{-d(n-1,m)t},$$

$$\nu(n, m)=\theta(a\,;n)^{-1}\theta(a-c\,;n-m)\ {}^{1}\Gamma(c+m)^{-1},$$

et définit les fonctions $\tau_{n,m}$ par (9.1).

PROPOSITION 30. *$T=\{\tau_{n,m}\,;\,(n, m)\in \boldsymbol{Z}^2\}$ satisfait au système de Toda* (9.2)-(9.3) *avec* $\xi_1=1$, $\xi_2=-t$, $X_i=X_{(i)}$.

REMARQUE 5. On déduit de (10.1)-(10.2) l'équation algébrique :

$$c\boldsymbol{F}(a, c\,;t)^2=(c-a)\boldsymbol{F}(a, c-1\,;t)\boldsymbol{F}(a, c+1\,;t)$$
$$+a\boldsymbol{F}(a-1, c-1\,;t)\boldsymbol{F}(a+1, c+1\,;t),$$

pour les fonctions de Kummer :

$$\boldsymbol{F}(a, c\,;t)=\sum_{k\geq 0}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{c(c+1)\cdots(c+k-1)}\frac{t^k}{k!}.$$

REMARQUE 6. Dans le cas de l'échelle $\mathcal{E}_{CH}$ nous avons auprès du système de Toda la relation de commutation :

$$[X_1, X_2]+X_2=0.$$

En ce qui concerne $\mathcal{E}_H$, on obtient la relation

$$[X_1, X_2]+X_1+X_2=0,$$

pour les dérivations ou bien $X_i=X_{(i)}$ ou bien $X_1=X_{(2)}$, $X_2=X_{(1,2)}$.

Bibliographie

[1] Darboux, G., Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, t.II, Chelsea, New York, 1972.
[2] Gantmacher, F.R., The Theory of Matrices, Chelsea, New York, 1959.
[3] Infeld, L. and T. Hull, The factorization method, Rev. Modern Phys. 23 (1951),

21-68.
[4] Inoui, T., Fonctions Spéciales (en japonais), Iwanami, Tokyo, 1962.
[5] Kametaka, Y., Hypergeometric solutions of Toda equation, Sûrikaisekikenkyûsho Kôkyûroku **554** (1985), 26-46.
[6] Miller, W. Jr., Lie theory and generalizations of hypergeometric functions, SIAM J. Appl. Math. **25** (1973), 226-235.
[7] Toda, M., Studies of a non-linear lattice, Phys. Rep. **18C** (1975), 1-123.

(Reçu le 17 novembre, 1986)

Département de Mathématiques
Collège des Arts et Sciences
Université de Tokyo
Komaba, Meguro, Tokyo
153 Japan