J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
Sect. IA, Math.
32 (1985), 273-286.

Problèmes de $\bar{\partial}$ dans les classes de Gevrey

Par Jean-Louis ERMINE

(Présenté par H. Komatsu)

1. Introduction

La cohomologie locale s-modérée et les notions afférentes ont été utilisées dans [6] pour l'étude des développements asymptotiques et les microfonctions dans les classes de Gevrey dans $\boldsymbol{C}$.

Le but de ce travail est d'introduire ces notions en plusieurs variables. Les objets construits (complété formel de classe s, cohomologie locale s-modérée "interpolent" les objets algébriques et analytiques (cf. [17] par exemple) à l'exemple des séries formelles Gevrey, ou des ultradistributions à support ponctuel en dimension 1 ([18]).

Une application immédiate qui n'est pas abordée ici est la construction de l'anneau des opérateurs microdifférentiels d'ordre s (le faisceau $\mathscr{E}^{R,s}$) et son action sur la cohomologie locale s-modérée, qui s'obtient, mutanda mutandis, comme dans [11].

2. Espaces fonctionnels dans les classes de Gevrey

Soit X une variété différentiable de dimension n, ou une variété différentiable à bord. Dans la suite on se place toujours dans un ouvert de coordonnées.

1°) Fonctions et ultradistributions Gevrey de classe s [12]

Soit $s>1$ et soit K un compact de X. On note $\mathscr{G}_s(K, A)$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur K au sens de Whitney qui vérifient:

$$\exists c>0 \quad \exists A>0 \quad \forall \alpha \in N^n \quad \forall x \in K \quad |D^\alpha f(x)|<c(\alpha!)^s A^{|\alpha|} .$$

L'ensemble des fonctions Gevrey (Roumieu) de classe s sur un ouvert U de X est l'ensemble

$$\mathscr{G}_s(U)=\varprojlim_{K\subset U} \varinjlim_{A>0} \mathscr{G}_s(K, A) .$$

—On note $\mathscr{D}_s(K, A)$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ de X à support dans K, vérifiant la même propriété que les fonctions de $\mathscr{G}_s(K, A)$. On note

$$\mathscr{D}_s(U) = \varinjlim_{K \subset U} \varinjlim_{A>0} \mathscr{D}_s(K, A).$$

C'est un espace DFN.

—On appelle espace d'ultradistributions de classe s sur un ouvert U de X l'ensemble $'\mathscr{D}_s(U)$ dual fort de $\mathscr{D}_s(U)$. C'est un espace FN. De même que pour les distributions on définit la notion de support d'une ultradistribution.

L'espace $'\mathscr{G}_s(U)$, dual fort de $\mathscr{G}_s(U)$, s'identifie aux éléments de $'\mathscr{D}_s(U)$ à support compact.

—$\mathscr{G}_s$ désigne le faisceau associé au préfaisceau

$$U \longrightarrow \mathscr{G}_s(U).$$

C'est un faisceau fin. On a $\Gamma_c(U, \mathscr{G}_s) = \mathscr{D}_s(U)$.

—$\mathscr{D}_s$ désigne le cofaisceau associé au copréfaisceau

$$U \longrightarrow \mathscr{D}_s(U).$$

—$'\mathscr{D}_s$ désigne le faisceau associé au préfaisceau

$$U \longrightarrow {'\mathscr{D}_s(U)}.$$

C'est un faisceau mou mais pas flasque, sur lequel la multiplication par un élément de $\mathscr{G}_s$ agit comme un morphisme de faisceaux.

On a $\Gamma_c(U, '\mathscr{D}_s) = {'\mathscr{G}_s(U)}$.

2°) Fonctions à décroissance s-rapide et distributions s-tempérées

Dans la suite Y désigne soit un fermé de X, soit le bord de X (qui est localement un demi espace).

DEFINITION 2.1. On dit que Y est 1-régulier s'il vérifie la propriété suivante:

Il existe un recouvrement (U_i) de X tel que $U_i \cap \partial Y$ soit défini par $\rho = 0$ où ρ est une fonction vérifiant:

$$\forall K \subset U_i \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in K \quad |\rho(x)| > A d(x, \partial Y).$$

Cette condition est invariante par difféomorphisme. Un fermé 1-régulier est régulier au sens de Lojascewicz ([19]). Si Y est à bord $\mathscr{C}^\infty$ il est 1-régulier.

Dans la suite nous supposerons Y 1-régulier.

—Soit U un ouvert de X tel que $\partial Y \cap U = \{\rho = 0\}$. Soit K un compact de U.

On note $\mathcal{T}_{s,Y}(K, A, B)$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{G}_s(K, A)$ qui vérifient

$$\exists c > 0 \quad \forall k \in N \quad \forall x \in K - Y \quad \forall \alpha \in N^n \quad |\rho(x)|^{-k} |D^\alpha f(x)| \leq c A^{|\alpha|} B^k (\alpha!)^s (k!)^{s-1}$$

on note

$$\mathcal{T}_{s,Y}(U) = \varprojlim_{K \subset U} \varinjlim_{\substack{A>0 \\ B>0}} \mathcal{T}_{s,Y}(K, A, B).$$

C'est un espace complet de Schwartz.

Grâce à la formule de Taylor et la condition de 1-régularité, on voit que $\mathcal{T}_{s,Y}(U)$ est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{G}_s(U)$ infiniment plates sur Y.

—On note $\mathcal{S}_{s,Y}(K, A, B)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}_s(K, A)$ qui vérifient la même propriété que les fonctions de $\mathcal{T}_{s,Y}(K, A, B)$ et

$$\mathcal{S}_{s,Y}(U) = \varinjlim_{K \subset U} \varinjlim_{\substack{A>0 \\ B>0}} \mathcal{S}_{s,Y}(K, A, B).$$

C'est un espace DFS. L'injection de $\mathcal{D}_s(U - Y)$ dans $\mathcal{S}_{s,Y}(U)$ est d'image dense.

—On appelle espace de distributions (ou ultradistributions) s-tempérées le long de Y, sur un ouvert U de X, l'ensemble $'\mathcal{S}_{s,Y}(U)$ dual fort de $\mathcal{S}_{s,Y}(U)$. C'est un espace FS

$'\mathcal{S}_{s,Y}(U)$ s'identifie aux éléments de $'\mathcal{D}_s(U - Y)$ qui sont prolongeables à U.

—On note $\mathcal{T}_{s,Y}$ et $'\mathcal{S}_{s,Y}$ les faisceaux associés correspondants. On a $\Gamma_c(U, \mathcal{T}_{s,Y}) = \mathcal{S}_{s,Y}(U)$ et $\Gamma_c(U, '\mathcal{S}_{s,Y}) = '\mathcal{T}_{s,Y}(U)$.

On note $\mathcal{S}_{s,Y}$ et $'\mathcal{T}_{s,Y}$ les cofaisceaux associés correspondants.

3°) Théorème de Whitney [10], [12], [14]

—On note $\mathcal{G}_{s,Y}(K, A)$ le sous espace des fonctions de Whitney sur Y $F = (f_\alpha)_{\alpha \in N^n}$ qui vérifient

1) $\exists c > 0 \quad \forall x \in K \cap Y \, |f_\alpha(x)| < c A^{|\alpha|} (\alpha!)^s$.

2) En notant $R_\alpha^m(x, y) = f_\alpha(y) - \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq m \\ \beta \in N^n}} f_{\alpha+\beta}(x) \dfrac{(y-x)^\beta}{\beta!}$

$\exists c > 0 \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m \quad \forall m \in N$

$\forall x, y \in K \cap Y \, |R_\alpha^m(x, y)| \leq c |y - x|^{m - |\alpha| + 1} A^{m+1} (m+1)!^s (m - |\alpha| + 1)^{-1}$.

Si U est un ouvert de X, l'ensemble des fonctions Whitney de Gevrey de classe s sur Y est l'ensemble

$$\mathscr{G}_{s,Y}(U)=\varprojlim_{K\subset U\cap Y}\varinjlim_{A>0}\mathscr{G}_{s,Y}(K,A).$$

C'est un espace de Schwartz, complet et réflexif.

—On note $\mathscr{D}_{s,Y}(K,A)$ le sous ensemble fermé de $\mathscr{G}_{s,Y}(K,A)$ des éléments dont l'extension $\mathscr{C}^\infty$ à Y donnée par le théorème de Whitney est nulle en dehors de K.

On note $\mathscr{D}_{s,Y}(U)=\varinjlim_{K\subset U\cap Y}\varinjlim_{A>0}\mathscr{D}_{s,Y}(K,A)$.

C'est un espace DFS.

—On note $\mathscr{G}_{s,Y}$ et $\mathscr{D}_{s,Y}$ les faisceaux et cofaisceaux associés correspondant aux préfaisceaux $U\to\mathscr{G}_{s,Y}(U)$ et $U\to\mathscr{D}_{s,Y}(U)$.

On a $\Gamma_c(U,\mathscr{G}_{s,Y})=\mathscr{D}_{s,Y}(U)$.

THÉORÈME 2.2. *On a des suites exactes d'espaces vectoriels topologiques*

$$0\longrightarrow\mathscr{T}_{s,Y}(U)\longrightarrow\mathscr{G}_s(U)\longrightarrow\mathscr{G}_{s,Y}(U)\longrightarrow0$$
$$0\longrightarrow\mathscr{S}_{s,Y}(U)\longrightarrow\mathscr{D}_s(U)\longrightarrow\mathscr{D}_{s,Y}(U)\longrightarrow0.$$

Par dualité ce théorème s'énonce

THÉORÈME 2.3. *On a des suites exactes d'espaces vectoriels topologiques*

$$0\longrightarrow\Gamma_Y(U,'\mathscr{D}_s)\longrightarrow\Gamma(U,'\mathscr{D}_s)\longrightarrow\Gamma(U,'\mathscr{S}_{s,Y})\longrightarrow0$$
$$0\longrightarrow\Gamma_{c,Y}(U,'\mathscr{D}_s)\longrightarrow\Gamma_c(U,'\mathscr{D}_s)\longrightarrow\Gamma_c(U,'\mathscr{S}_{s,Y})\longrightarrow0.$$

3. Problème du $\bar\partial$ dans les classes de Gevrey sur X

On suppose maintenant que X, ou le complémentaire du bord de X, est muni d'une structure de variété analytique complexe.

$\mathscr{G}_s^{p,q}(U)$, $'\mathscr{D}_s^{p,q}(U)$ etc $\cdots$ désignent les formes différentielles de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{G}_s(U)$, $'\mathscr{D}_s(U)$ etc$\cdots$. On a des complexes $(\mathscr{G}_s^{p,\cdot}(U),\bar\partial)$, $('\mathscr{D}_s^{p,\cdot}(U),\bar\partial)$ etc$\cdots$.

1°) Quelques rappels de L^2-estimation [9]

Soit U un ouvert de C^n, φ une fonction plurisousharmonique de U. On considère

$$T_q: L^2_{p,q}(U) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(U)$$

l'opérateur maximal associé à $\bar{\partial}$. C'est un opérateur fermé à domaine dense.

Soit $\Phi: {}'\mathscr{D}^{p,q}(U) \times \mathscr{D}^{p,q}(U) \longrightarrow \boldsymbol{C}$

$$\Phi(T, g) = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \langle T_{I,J}, e^{-\varphi}\bar{g}_{I,J} \rangle$$

Φ est sesquilinéaire et non dégénérée.

On note θ le transposé de $\bar{\partial}$ par Φ et $\square = \bar{\partial}\theta + \theta\bar{\partial}$. On a les résultats suivants

i) $\bar{\partial}, \theta, \square$ sont continus

ii) $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = \theta \circ \theta = 0$

iii) $\bar{\partial}[\mathscr{G}^{p,q}_s(U)] \subset \mathscr{G}^{p,q+1}_s(U)$ et respectivement pour θ et $\square$

iv) $\square$ est un opérateur elliptique.

T^*_q désigne l'adjoint de T_q pour le procuit scalaire $\langle , \rangle_\varphi$ dans $L^2_{p,q}(U, \varphi)$ Λ_q désigne l'opérateur $T_{q-1}T^*_{q-1} + T^*_q T_q$.

Rappelons le théorème fondamental de la L^2 estimation (cf. [16] ou [7] par exemple).

THÉORÈME 3.1. *Soit U un ouvert borné pseudoconvexe de $\boldsymbol{C}^n$, soit $f \in L^2_{p,q}(U, \varphi)$, il existe u et v uniques tels que:*

1) $u \in D(T_{q-1}) \cap \operatorname{Ker}(T_{q-1})^{\perp}$

2) $v \in D(T^*_q) \cap \operatorname{Ker}(T^*_q)^{\perp}$

3) $f = T_{q-1}(u) + T^*_q(v)$

4) *Il existe une suite $(f_k)_{k \geq 1}$ dans $D(\Lambda_q)$ telle que:*

$$\lim_{k \to +\infty} T^*_{q-1}(f_k) = u \quad \lim_{k \to +\infty} T_q(f_k) = v \quad \lim_{k \to +\infty} \Lambda_q(f_k) = f$$

la suite $(f_k)_{k \geq 1}$ étant convergente vers une forme g de $L^2_{p,q}(U, \varphi)$.

On en déduit aisément le résultat suivant:

THÉORÈME 3.2. *Soit U un ouvert pseudoconvexe borné de X, le complexe $(\mathscr{G}^{p,\cdot}_s(U), \bar{\partial})$ est acyclique en degrés >0.*

DÉMONSTRATION. D'après la continuité des homomorphismes θ, $\bar{\partial}$ et $\square$ on a donc

$$\theta_g = u \quad \bar{\partial}g = v \quad \text{et} \quad \square g = f.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de régularité des opérateurs elliptiques dans les espaces de Gevrey ([3] par exemple) pour avoir le résultat suivant:

$$\text{si} \quad f \in \mathscr{G}_s^{p,q}(U) \quad u \in \mathscr{G}_s^{p,q}(U) \quad \text{et} \quad v \in \mathscr{G}_s^{p,q}(U).$$

Si de plus $\bar{\partial} f = 0$ $f \in \operatorname{Ker} T_q$ or $T_{q-1}u \in \operatorname{Ker} T_q$ donc $T_q^* v \in \operatorname{Ker} T_q$ $T_q^* v \in \operatorname{Ker} T_q \cap \operatorname{Im} T_q^* = \{0\}$ on a donc le théorème.

COROLLAIRE 3.3. *Les complexes de faisceaux* $(\mathscr{G}_s^{o,\cdot}, \bar{\partial})$ *et* $('\mathscr{D}_s^{o,\cdot}, \bar{\partial})$ *sont des résolutions du faisceau structural* $\mathcal{O}_X$. $('\mathscr{D}_s^{n,\cdot}, \bar{\partial})$ *et* $(\mathscr{G}_s^{n,\cdot}, \bar{\partial})$ *sont des résolutions du faisceau* Ω *des formes différentielles holomorphes de degré n.*

4. Complété formel de classe s et fermés s-résolvants

1°) Quelques définitions

DEFINITION 4.1. On note $\mathcal{O}_{(\widehat{X|Y})_s}$ le faisceau $\operatorname{Ker}(\mathscr{G}_{s,Y}^{o,o} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{G}_{s,Y}^{o,1}) = H^o(\mathscr{G}_{s,Y}^{o,\cdot})$ qu'on appelle complété formel de classe s le long de Y. On note $[i]_!^s\mathcal{O}$ le faisceau $\operatorname{Ker}(\mathscr{T}_{s,Y}^{o,o} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{T}_{s,Y}^{o,1}) = H^o(\mathscr{T}_{s,Y}^{o,\cdot})$ où i désigne l'injection $X - Y \to X$.

REMARQUES. i) Pour $s = +\infty$, $\mathscr{G}_{s,Y}$ désigne le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ au sens de Whitney sur Y, noté $\mathscr{E}_Y$, si Y est un fermé analytique complexe alors $\mathcal{O}_{(\widehat{X|Y})_{+\infty}} = \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ et $[i]_!^{+\infty}\mathcal{O} = [i]_!\mathcal{O}$ où si J désigne l'idéal de définition de Y

$$\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} = \varprojlim_k \mathcal{O}/J^k \quad [i]_!\mathcal{O} = \varprojlim_k J^k \quad \text{(cf. [17])}.$$

ii) Pour $s = 1$, $\mathscr{G}_{s,Y}$ désigne le faisceau des germes de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur Y et $\mathscr{T}_{s,Y}$ le faisceau des fonctions analytiques sur Y on a alors

$$\mathcal{O}_{(\widehat{X|Y})_1} = \mathcal{O}_{X|Y}.$$

DEFINITION 4.2. Un fermé Y de X est dit s-résolvant [resp. s-résolvant dans un ouvert U de X] si le complexe $(\mathscr{G}_{s,Y}^{o,\cdot}, \bar{\partial})$ [resp. $(\mathscr{G}_{s,Y}^{o,\cdot}(U), \bar{\partial})$] est acyclique en degrés >0.

Exemples. i) Les fermés de $\boldsymbol{C}^n$ possédant une base "régulière" de voisinages pseudoconvexes sont $+\infty$-résolvants dans $\boldsymbol{C}^n$ ([5]) comme par exemple les fermés convexes, les polyèdres analytiques etc....

ii) Les fermés analytiques complexes Y de X sont $+\infty$-résolvants ([17]), donc $\mathscr{G}_{+\infty,Y}^{o,\cdot} = \mathscr{E}_Y^{o,\cdot}$ est une résolution du faisceau $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$.

DEFINITION 4.3. Deux fermés Y_1 et Y_2 de X sont dits s-régulièrement séparés s'ils sont disjoints ou bien s'ils vérifient la condition suivante:

Pour tous compacts K_1 de Y_1 et K_2 de Y_2 et toute constante positive A, il existe un couple de constantes positives (B, C) telles que

$$\forall x \in K_1 \ \operatorname*{Inf}_n (A^n d(x, Y_1 \cap Y_2)^n (n!)^{s-1}) \leq C \inf_m (B^m d(x, K_2)^m (m!)^{s-1}) .$$

Exemples. i) Deux fermés qui se coupent transversalement sont s-régulièrement séparés

ii) Par exemple si x_i et x_j sont deux coordonnées locales réelles $Y_1 = \{x_i \geq 0\}$ et $Y_2 = \{x_j \geq 0\}$ sont s-régulièrement séparés.

2°) Exemples de fermés s-résolvants

Soit Y un fermé de X vérifiant l'une des conditions suivantes (cf. [20]).

—Y est une sous variété de classe s totalement réelle (ex: une variété réelle analytique de dimension 1)

—Y s'écrit localement $M \cup K_0$, où K_0 est un compact et M une sous variété de classe s totalement réelle.

On a le résultat suivant: [20]

Si $f \in \mathscr{G}_{s,Y}$ [resp. f est holomorphe sur un voisinage ouvert de K_0 et $f \in \mathscr{G}_{s,M}$], alors il existe $F \in \mathscr{G}_s$ tel que $F|_Y = f$ et $\bar\partial F$ est infiniment plat sur Y [resp. $\bar\partial F$ est infiniment plat sur $Y \cup U$ où U est un voisinage ouvert de K_0].

Soient Y_1 et Y_2 deux tels fermés, on a alors:

LEMME 4.4. *Si Y_1 et Y_2 sont s-régulièrement séparés les propositions suivantes sont équivalentes*:

i) *Y_1, Y_2 et $Y_1 \cap Y_2$ sont s-résolvants*

ii) *Y_1, Y_2 et $Y_1 \cup Y_2$ sont s-résolvants.*

DÉMONSTRATION. On a une suite exacte de complexes ([10])

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1 \cup Y_2} \longrightarrow \mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1} \oplus \mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_2} \longrightarrow \mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1 \cap Y_2} \longrightarrow 0$$

la première flèche étant donnée par $f \to (f|_{Y_1}, f|_{Y_2})$ la seconde par $(f, g) \to (f|_{Y_1 \cap Y_2} - g|_{Y_1 \cap Y_2})$ la longue suite exacte de cohomologie s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1 \cup Y_2}) \longrightarrow H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1}) \oplus H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_2}) \\ &\longrightarrow H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1 \cap Y_2}) \longrightarrow H^1(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1 \cup Y_2}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

il est alors clair que ii)$\Rightarrow$i) et que i)$\Rightarrow$ii) sauf pour $H^1(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{Y_1 \cup Y_2})$ qui n'est pas nécessairement nul. Cependant on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1 \cup Y_2}) \longrightarrow H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1}) \oplus H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_2}) \longrightarrow H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1 \cap Y_2}) \longrightarrow 0$$

en effet si $f \in \mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y_1 \cap Y_2}$ il existe $f_1 \in \mathscr{G}_{s,Y_1}$ $f_2 \in \mathscr{G}_{s,Y_2}$ tels que $f = f_1|_{Y_1 \cap Y_2} - f_2|_{Y_1 \cap Y_2}$ et grâce au résultat cité, on peut choisir f_1 et f_2 tels que $\bar\partial f_1 = \bar\partial f_2 = 0$ dans $\mathscr{G}_{s,Y_1}$ et $\mathscr{G}_{s,Y_2}$.

PROPOSITION 4.5. *Soit U un ouvert de $\boldsymbol{C}$, tout fermé de U est s-résolvant dans U.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la longue suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de complexes:

$$0 \longrightarrow \mathscr{T}^{o,\cdot}_{s,Y}(U) \longrightarrow \mathscr{G}^{o,\cdot}_{s}(U) \longrightarrow \mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,Y}(U) \longrightarrow 0$$

le théorème 3.2 donne alors le résultat.

Donnons maintenant un exemple important de fermés s-résolvants:

On note dans un système de coordonnées complexes de X $x_i + ix_{n+i}$. Soit $I=\{i_1, \cdots, i_n\}$ et dans la suite X_I désignera le fermé $\{x_i \geq \varepsilon \ \forall i \in I\} \cup \{x_i = 0 \ \forall i \in I\}$.

On considère un fermé Y de X qui s'écrit localement

$$(*) \qquad Y = \bigcup_{J \in K} \bigcap_{j \in J} X_{I_j} \quad \text{où} \quad J \subset \{1, \cdots, n\} \quad \text{et} \quad K \in \mathscr{P}(\{1, \cdots, n\}).$$

THÉORÈME 4.6. *Un fermé de type* $(*)$ *est s-résolvant.*

DÉMONSTRATION. Plaçons-nous dans un ouvert de coordonnées assez petit qui est un polydisque P relativement compact de $\boldsymbol{C}^n$.

i) Montrons le théorème pour $Y = \bigcap_{j \in J} X_{I_j}$ par récurrence sur la dimension de X.

Si $\operatorname{card}(\bigcap_{j \in J} I_j) \leq n-1$ alors Y est de la forme $\bigcap_{j \in J} X'_j \times P''$ où $P' \subset \boldsymbol{C}^{n-p}$ et $\bigcap_{j \in J} X'_j = Y'$ est un ensemble de type $(*)$ dans $\boldsymbol{C}^{n-p} \times P'' \subset \boldsymbol{C}^p$ avec $P = P' \times P''$.

P'' et $\bigcap_{j \in J} X'_j$ sont des ensembles qui vérifient la propriété du cône d'après [12] on a donc

$$\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,Y}(P) = \mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,Y'}(P') \hat{\otimes} \mathscr{D}^{o,\cdot}_{s}(P'')$$

l'hypothèse de récurrence donne l'acyclicité de $\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,Y'}(P')$ et le théorème 3.2 celle de $\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s}(P'')$, le théorème de Künneth topologique permet alors de conclure, la récurrence étant amorcée par la proposition 4.5. $\operatorname{Card}(\bigcap_{j \in J} I_j) = n$ la démonstration est similaire.

ii) Si $Y = \bigcup_{J \in K} \bigcap_{j \in J} X_{I_j}$ on montre le résultat par récurrence sur Card K, la récurrence étant amorcée par le résultat précédent.

Soit K de cardinal p, $K = K' \cup J'$ où $J' \subset \{1, \cdots, n\}$ et $\operatorname{card} K' = p-1$.

$$Y = \bigcup_{J \in K} \bigcap_{j \in J} X_{I_j} = \Big(\bigcup_{J \subset K'} \bigcap_{j \in J} X_{I_j} \Big) \cup \Big(\bigcap_{j \in J'} X_{I_j} \Big).$$

Ces deux derniers ensembles sont s-résolvants ainsi que leur intersection d'après l'hypothèse de récurrence, tous ces ensembles étant s-régulièrement séparés on conclut par le lemme 4.4.

3°) Une application: un théorème d'interpolation

Soit X une variété de Stein, de dimension supérieure à 1. Soit K un compact 1-régulier tels que $\mathring{K}$ et $X-K$ soient deux ouverts connexes.

THÉORÈME 4.7. *Toute fonction de Whitney de classe s sur ∂K, f qui vérifie $\bar{\partial} f=o$ est la trace sur ∂K d'une fonction de Whitney de classe s sur K, holomorphe dans $\mathring{K}$.*

DÉMONSTRATION. $(X-\mathring{K})$ et K sont deux fermés s-régulièrment séparés [13] leur union est X tout entier et leur intersection est ∂K, on a donc une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,X} \longrightarrow \mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,X-\mathring{K}} \oplus \mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,K} \longrightarrow \mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,\partial K} \longrightarrow 0$$

d'où la suite exacte de cohomologie:

$$0 \longrightarrow H^o(\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,X}) \longrightarrow H^o(\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,X-\mathring{K}}) \oplus H^o(\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,K}) \longrightarrow H^o(\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,\partial K}) \longrightarrow H^1(\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,X}) \longrightarrow \cdots$$

On a grâce au corollaire 3.3

$H^o(\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,X})=H^o_c(X, \mathscr{O})=H^1(\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,X})=H^1_c(X, \mathscr{O})=0$ car $\dim X>1$ et X est Stein. K et ∂K sont compacts, $\mathscr{D}_{s,K}$ et $\mathscr{D}_{s,\partial K}$ sont égaux à $\mathscr{G}_{s,K}$ et $\mathscr{G}_{s,\partial K}$. Par contre $X-\mathring{K}$ n'est pas compact, un élément de $H^o(\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,X-\mathring{K}})$ est représenté par $\tilde{f}$ dans $\mathscr{D}_{s,X}$ tel que $\bar{\partial}\tilde{f}$ est infiniment plat sur $X-\mathring{K}$, $\tilde{f}$ est donc holomorphe sur $X-K$, $\operatorname{supp}\tilde{f}$ est inclus dans K et $\tilde{f}-\tilde{f}|_{\operatorname{Supp}\tilde{f}}=0$ est un autre représentant. D'où $H^o(\mathscr{D}^{o,\cdot}_{s,X-\mathring{K}})=0$. On a donc un isomorphisme:

$$H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,K}) \longrightarrow H^o(\mathscr{G}^{o,\cdot}_{s,\partial K})$$

ce qui est exactement l'énoncé du théorème.

Dans le cadre $\mathscr{C}^\infty$, ce théorème a été démontré dans [2].

5. Cohomologie locale s-modérée

1°) Définitions

DEFINITION 5.1. Pour tout ouvert U de X, on note $H^{\cdot}_{[Y]_s}(U, \mathscr{O})$ la cohomologie du complexe $\Gamma_Y(U, '\mathscr{D}^{o,\cdot}_s)$ qu'on appelle cohomologie à support s-modérée dans Y. $\underline{H}^{\cdot}_{[Y]_s}(X, \mathscr{O})$ désigne les faisceaux associés. On note $[i]^s_*\mathscr{O}$ le faisceau $\operatorname{Ker}('\mathscr{S}^{o,o}_{s,Y} \to '\mathscr{S}^{o,1}_{s,Y})$ où i désigne l'injection $X-Y \to X$.

REMARQUES. i) Pour $s=+\infty$ $'\mathscr{D}_s$ désigne le faisceau habituel des distributions $'\mathscr{D}H^{\cdot}_{[Y]_{+\infty}}$ se note $H^{\cdot}_{[Y]}$ et désigne, lorsque Y est un espace analytique, d'idéal de définition $\mathscr{J}$, la cohomologie locale algébrique:

$$H^k_{[Y]}(X, \mathcal{O})=R^k \varinjlim_m \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathscr{J}^m, \mathcal{O})$$

de même $[i]^{+\infty}_*\mathcal{O}$ se note $[i]_*\mathcal{O}$ et

$$[i]_*\mathcal{O}=\varinjlim_k \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\mathscr{J}^k, \mathcal{O}) .$$

ii) Pour $s=1$ $'\mathscr{D}_s$ désigne le faisceau des hyperfonctions $\mathscr{B}$, ce faisceau étant flasque $H^{\cdot}_{[Y]_1}$ désigne la cohomologie locale analytique $H^{\cdot}_Y$.

2°) Quelques suites exactes

On a l'équivalent s-modérée de la suite exacte de Mayer-Vietoris

THÉORÈME 5.2. *Si Y_1 et Y_2 sont deux fermés s-régulièrement séparés, on a une longue suite exacte*:

$$\cdots \longrightarrow \underline{H}^p_{[Y_1\cap Y_2]_s}(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \underline{H}^p_{[Y_1]_s}(X, \mathcal{O})\oplus \underline{H}^p_{[Y_2]_s}(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \underline{H}^p_{[Y_1\cup Y_2]_s}(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \underline{H}^{p+1}_{[Y_1\cap Y_2]_s}(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots .$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte de la longue suite exacte associée à la suite exacte de complexes ([13])

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_{Y_1\cap Y_2}(X, '\mathscr{D}^{o,\cdot}_s) \longrightarrow \underline{\Gamma}_{Y_1}(X, '\mathscr{D}^{o,\cdot}_s)\oplus \underline{\Gamma}_{Y_2}(X, '\mathscr{D}^{o,\cdot}_s) \longrightarrow \underline{\Gamma}_{Y_1\cup Y_2}(X, '\mathscr{D}^{o,\cdot}_s) \longrightarrow 0 .$$

On a aussi une suite exacte qui s'apparente à la suite de cohomologie locale:

THÉORÈME 5.3. *On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_{[Y]_s}(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \underline{\Gamma}(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \underline{\Gamma}(X, [i]^s_*\mathcal{O}) \longrightarrow \underline{H}^1_{[Y]_s}(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \underline{H}^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots .$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la suite exacte de cohomologie à la suite exacte de complexes:

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_Y(X, '\mathscr{D}^{o,\cdot}_s) \longrightarrow '\mathscr{D}^{o,\cdot}_s \longrightarrow '\mathscr{S}^{o,\cdot}_{s,Y} \longrightarrow 0 .$$

6. Théorèmes de dualité

Remarquons d'abord que les définitions des paragraphes précédents peuvent s'écrire avec le faisceau Ω des formes différentielles holomorphes de degré maximum au lieu du faisceau $\mathcal{O}$.

1°) Premier théorème de dualité

THÉORÈME 6.1. *Les complexes $\Gamma(U, \mathcal{G}^{o,\cdot}_{s,Y})$ et $\Gamma_{c,Y}(U, '\mathcal{D}^{n,\cdot}_s)$ sont en dualité topologique. Celle-ci induit une dualité topologique entre les séparés associés des espaces de cohomologie:*

$$H^p(\Gamma(U, \mathcal{G}^{o,\cdot}_{s,Y})) \quad et \quad H^{n-p}(\Gamma_{c,Y}(U, '\mathcal{D}^{n,\cdot}_s)) .$$

Le même résultat est vrai pour les complexes $\Gamma(U, \mathcal{D}^{o,\cdot}_{s,Y})$ et $\Gamma_Y(U, '\mathcal{D}^{n,\cdot}_s)$.

DÉMONSTRATION. On a un accouplement

$$\Gamma(U, \mathcal{G}^{o,p}_{s,Y}) \times \Gamma_{c,Y}(U, '\mathcal{D}^{n,n-p}_s) \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

que l'on peut décrire ainsi:

Si $f \in \Gamma(U, \mathcal{G}^{o,p}_{s,Y})$ alors par le théorème de Whitney $f = j(\varphi)$ où $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{G}^{o,p}_s)$ et j désigne l'application jet du théorème.

Si $T \in \Gamma_{c,Y}(U, '\mathcal{D}^{n,n-p}_s)$, alors par le même théorème, dualement, ${}^tj(T) \in \Gamma_c(U, '\mathcal{D}^{n,n-p})$. Soit $\chi \in \mathcal{D}_s(U)$ telle que $\chi(x) = 1$ au voisinage de $\mathrm{Supp}\, {}^tj(T)$. Alors

$$\langle f, T \rangle = \langle j(\varphi), T \rangle = \langle \chi\varphi, {}^tj(T) \rangle = \langle \lambda\varphi \Lambda {}^tj(T), 1 \rangle$$

où la dernière expression est l'integration des formes de type (n, n) à support compact à coefficients distributions. Cette définition ne dépend pas du choix de χ, pour une autre fonction χ', $(\chi - \chi')\varphi$ a un support disjoint de celui de ${}^tj(T)$.

Elle ne dépend pas non plus du représentant φ choisi, car si $j(\varphi) = j(\varphi')$, $\varphi - \varphi'$ est infiniment plate sur $U \cap Y$, donc sur le support de ${}^tj(T)$. D'où l'accouplement cherché.

Les espaces sont complets, Schwartz et réflexifs donc d'après le lemme de dualité 2 de [1] on déduit une dualité algébrique entre les espaces séparés associés des espaces

$$H^p(\Gamma(U, \mathcal{G}^{o,\cdot}_{s,Y})) \quad \text{et} \quad H^{n-p}(\Gamma_{c,Y}(U, '\mathcal{D}^{n,\cdot}_s)) .$$

Comme les espaces en question sont Montel (car complets et Schwartz) ils possèdent la propriété de relèvement des bornés donc la dualité ci-dessus est topologique pour la topologie quotient des espaces ([1]).

La démonstration est identique pour les complexes $\Gamma(U, \mathcal{D}^{o,\cdot}_{s,Y})$ et $\Gamma_Y(U, '\mathcal{D}^{n,\cdot}_s)$.

COROLLAIRE 6.2. *Si Y est un fermé s-résolvant, il y a une dualité topologique entre les séparés associés des espaces*

$$H^p(U, \mathcal{O}_{\widehat{(X|Y)_s}}) \quad et \quad H^{n-p}_{c,[Y]_s}(U, \Omega).$$

COROLLAIRE 6.3. *Si Y est s-résolvant (resp. s-résolvant dans U), $\underline{H}^p_{[Y]_s}(X, \mathcal{O})=0$ (resp. $H^p_{c,[Y]_s}(U, \mathcal{O})=0$) si $p\neq n$.*

2°) Second théorème de dualité

THÉORÈME 6.4. *Les complexes $\Gamma(U, \mathscr{T}^{o,\cdot}_{s,Y})$ et $\Gamma_c(U, '\mathscr{S}^{n,\cdot}_{s,Y})$ sont en dualité topologique. Celle-ci induir une dualité topologique entre les séparés associés des espaces de cohomologie*

$$H^p(\Gamma(U, \mathscr{T}^{o,\cdot}_{s,Y})) \quad et \quad H^{n-p}(\Gamma_c(U, '\mathscr{S}^{n,\cdot}_{s,Y})).$$

Le même résultat est vrai pour les complexes $\Gamma(U, \mathscr{S}^{o,\cdot}_{s,Y})$ et $\Gamma(U, '\mathscr{S}^{n,\cdot}_{s,Y})$.

DÉMONSTRATION. On a un accouplement

$$\Gamma(U, \mathscr{T}^{o,p}_{s,Y})\times\Gamma_c(U, '\mathscr{S}^{n,n-p}_{s,Y})\longrightarrow \boldsymbol{C}$$

que l'on peut décrire ainsi d'après le théorème de Whitney

$$\Gamma_c(U, '\mathscr{S}_{s,Y})=\Gamma_c(U, '\mathscr{D}_s)/\Gamma_{c,Y}(U, '\mathscr{D}_s).$$

Soit $(\chi_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions de $\mathscr{D}_s(U)$ à support dans $U-Y$, et qui converge dans $\mathscr{D}_s$ vers la fonction qui vaut 1 sur $U-Y$. Si $T\in\Gamma_c(U, '\mathscr{D}^{n,n-p}_s)$ et $\varphi\in\Gamma(U, \mathscr{T}^{o,p}_{s,Y})$ on pose

$$\langle\varphi, T\rangle=\lim_{n\to+\infty}\langle\chi_n\varphi, T\rangle.$$

On vérifie aisément que cette limite existe.

Si (χ'_n) est une autre suite de fonction, comme $\chi_n-\chi'_n$ converge vers la fonction nulle sur $U-Y$, la définition ne dépend pas de la suite choisie. De plus cet accouplement passe au quotient (l'accouplement hatibuel ne passe pas au quotient par $\Gamma_{c,Y}(U, '\mathscr{D}_s)$ cf. [8]). Les espaces sont complets, Schwartz, reflexifs on peut donc comme auparavant appliquer le lemme de dualité 2 de [1] qui donne le résultat.

La démonstration est identique pour les complexes $\Gamma(U, \mathscr{S}^{o,\cdot}_{s,Y})$ et $\Gamma(U, '\mathscr{S}^{n,\cdot}_{s,Y})$.

COROLLAIRE 6.5. *Soit U un ouvert de Stein, Y un fermé s-résolvant dans U, la cohomologie du complexe $\Gamma(U, \mathscr{T}^{o,\cdot}_{s,Y})$ est nulle en degrés $\neq 1$, celle du* *complexe $\Gamma_c(U, '\mathscr{S}^{n,\cdot}_{s,Y})$ est nulle en degré $\neq n-1$. Il y a une dualité entre*

$$H^{\cdot}(\Gamma(U, \mathscr{T}^{o,\cdot}_{s,Y})) \quad et \quad H^{n-1}(\Gamma_c(U, '\mathscr{S}^{n,\cdot}_{s,Y})) .$$

De plus

$$H^n_{c,[Y]_s}(U, \mathcal{O}) = H^{n-1}(\Gamma_c(U, '\mathscr{S}^{o,\cdot}_{s,Y})) .$$

3°) Une application: Homologie des ultra-courants à supports dans Y

On généralise un résultat de [16], [14], [17].
Soit Y un fermé s-résolvant:

Proposition 6.6. *Soit $('\mathscr{D}^{\cdot}_s, d)$ le complexe des ultracourants de classe s sur X. Les espaces de cohomologie de $\underline{\Gamma}_Y(X, '\mathscr{D}^{\cdot}_s)$ sont isomorphes aux $\underline{H}^k_Y(X, \underline{C}_X)$.*

Démonstration. On considère le double complexe

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \longrightarrow & \Omega^2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Omega^n & \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
'\mathscr{D}^{0,o}_s & \xrightarrow{\partial} & '\mathscr{D}^{1,o}_s & \longrightarrow & '\mathscr{D}^{2,o}_s & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & '\mathscr{D}^{n,o} & \longrightarrow 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\bar\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\bar\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\bar\partial} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \downarrow & \longrightarrow 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\downarrow{\scriptstyle\bar\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\bar\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\bar\partial} & & & & \downarrow{\scriptstyle\bar\partial} \\
'\mathscr{D}^{0,n}_s & \longrightarrow & '\mathscr{D}^{1,n}_s & \longrightarrow & '\mathscr{D}^{2,n}_s & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & '\mathscr{D}^{n,n}_s & \longrightarrow 0
\end{array}$$

La première ligne est une résolution de $\underline{C}_X$.

Si l'on applique le foncteur $\underline{\Gamma}_Y(X, \cdot)$, comme Y est s-résolvant on obtient

$$H^p(\underline{\Gamma}_Y(X, \mathscr{D}^{q,\cdot}_s)) = \underline{H}^p_{[Y]_s}(X, \Omega^p) = 0 \quad \text{si} \quad p \neq n .$$

Donc la cohomologie du complexe $\underline{\Gamma}_Y(X, \Omega^{\cdot})$ est égale à la cohomologie du complexe simple associé au complexe double $\underline{\Gamma}_Y(X, \mathscr{D}^{\cdot,\cdot}_s)$ qui n'est autre que $\underline{\Gamma}_Y(X, '\mathscr{D}^{\cdot}_s)$ d'où le résultat.

References

[1] Andreotti, A. and C. Banica, Relative duality on complex spaces, Revue Roumaine de Math. n°9 1975, n°9 1976.

[2] Andreotti, A. and D. Hill, E.E. Levi convexity and the Hans Levy problem, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **26** (1972), 325–363, (1972), 747–806.
[3] Boutet de Monvel, L. and P. Kree, Pseudo differential operators and Gevrey class, Ann. Inst. Fourier Grenoble **17** (1967), 295–323.
[4] Bruna, J., An extension theorem of Whitney type for non quasi-analytic classes of functions, J. London Math. Soc. (2) **22** (1980), 495–505.
[5] Dufresnoy, A., Sur l'opérateur d'' et les fonctions différentiables au sens de Whitney, Ann. Inst. Fourier Grenoble **29** (1979), 229–238.
[6] Ermine, J.L., Développement asymptotiques et microfonctions dans les classes de Gevrey (à paraître) cf Séminaire Goulaouic-Schwartz 1981–1982 exposé n°V.
[7] Gay, R., Analyse complexe, cours de DEA 1980, Publications de l'Université de Bordeaux I.
[8] Giralt-Torres, J., Espaces de Schwartz et théorèmes de type GAGA, Publications de l'IRMA Strasbourg 1979.
[9] Hormander, L., L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, Acta Math. **113** (1965), 89–152.
[10] Kantor, J.M., Classes non quasi-analytiques et décomposition des supports des ultradistributions, An. Acad. Brasil. Ciênc. **44** (1972), 171–180.
[11] Kashiwara, M., Systèmes d'équations microdifférentiables, Prépublications de l'Université Paris-Nord, 1977.
[12] Komatsu, H., Ultradistributions I et II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **20** (1973), 25–105 et **24** (1977), 607–628.
[13] Lambert, A., Quelques théorèmes de décomposition des ultradistributions, Ann. Inst. Fourier Grenoble **29** (1979), 57–100.
[14] Mebkhout, Z., Cohomologie locale des espaces analytiques complexes, Thèse Université Paris VII, 1979.
[15] Poly, J.B., d''-cohomologie à croissance: un théorème de décomposition, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B t. **266** (1968), A824–A826.
[16] Poly, J.B., Sur l'homologie des courants à support dans un ensemble semi-analytique, Bull. Soc. Math. France Mém. **38** (1974), 35–43.
[17] Ramis, J.P., Variations sur le thème GAGA, Séminaire Lelong, 1976–1977.
[18] Ramis, J.P., Devissage Gevrey, Astérisque **59–60** (1978), 173–204.
[19] Tougeron, J.C., Idéaux de Fonctions Différentiables, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
[20] Droste, B., Holomorphic approximation of ultra differentiable functions, Math. Ann. **316** (1981), 257–293.

(Reçu le 26 mai, 1983)

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et
d'Informatique
Laboratoire associé au CNRS n°226
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE Cédex
France