J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
Sect. IA, Math.
31 (1984), 569-583.

Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problème de Lewy pour les solutions hyperfonctions

Par Shin-ichi TAJIMA

(Communicated by H. Komatsu)

Table des Matières

§0. Introduction

En 1956, Hans Lewy [28] a montré que si la forme de Levi d'une hypersurface réelle N (dans C^2) ne s'annule pas en un point p de N, les germes des solutions du système d'équations de Cauchy-Riemann tangentielles en p peuvent avoir des extensions latérales en fonctions holomorphes à un côté pseudoconvexe dans C^2.

Depuis lors, de nombreuses recherches ont été effectuées sur ce phénomène.

A. Andreotti et C. D. Hill [1] ont interprété le problème de Lewy (dans le cas d'une hypersurface lisse) comme un problème de Cauchy pour le système $\bar{\partial}$ en généralisant ce problème à certaines classes de cohomologies locales et ils ont réduit la question ci-dessus à celle du prolongement des classes de cohomologies locales. Ils ont ainsi résolu ce problème dans le cas où la forme de Levi de la hypersurface est non-dégénérée. En traitant ce problème dans le cadre des hyperfonctions, O. Stormark [39] a montré que la version d'Andreotti-Hill citée plus haut est une conséquence immédiate de l'exactitude d'une suite de Mayer-Vietoris (voir M. Kashiwara et T. Kawai [22], P. Pallu de la Barrière [34], J. C. Polking et R. O. Wells, Jr. [35]). Ce résultat nous suggère que l'utilisation de la théorie des hyperfonctions et des microfonctions est très efficace pour l'étude du phénomène de H. Lewy.

D'autre part, H. Lewy [29], E. Bishop [7], H. Rossi [36], S. J. Greenfield [11], I. Naruki [31], R. Nirenberg [33], L. R. Hunt et R. O. Wells, Jr. [17], C. D. Hill et G. Taiani [16] l'ont étudié dans le cas où la sous-variété qui porte les données est la variété CR de codimension plus haute.

Plus récement, M. S. Baouendi et F. Treves [4], N. Hanges et F. Treves [12] et M. S. Baouendi, C. H. Chang et F. Treves [5] ont commencé à l'étudier du point de vue microlocale en envisageant des rapports entre la propriété d'extendabilité et celle d'hypoellipticité du système induit sur la sous-variété (voir aussi G. M. Henkin [13]). Par ailleurs, A. Boggess [8] et A. Boggess et J. C. Polking [9] ont étudié ce problème en utilisant la méthode de disques analytiques. Ils ont réussi, sous certaines conditions, à déterminer la forme du domaine (profil) sur lequel les fonctions CR s'étendent en fonctions holomorphes.

Dans cet article, on établira les bases de l'étude de phénomène de H. Lewy dans le cadre des hyperfonctions. En interprétant ce phénomène comme une rapport entre les propriétés du système ambiant et celles du système induit, on montrera les relations entre ce phénomène avec le support du complexe de faisceaux des solutions microfonctions du système induit sur la variété CR. On éclairera ainsi l'aspect géométrique du résultat ci-dessus de Boggess-Polking du point de vue microlocale.

Dans le paragraphe 1, on rappellera une énonciation du problème de Cauchy pour les solutions hyperfonctions (Définition 1.2) et on donnera également la notion du complexe de faisceaux d'obstructions microlocaux pour que ce problème soit bien posé (Proposition 1.4).

Dans le paragraphe 2, en généralisant le problème de Lewy aux solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, on l'interprétera comme une sorte de problème de Cauchy pour solutions hyperfonctions. On montrera que dans le cas où la sous-variété N qui porte les données de Cauchy est une variété CR générique d'une variété analytique complexe X, le complexe de faisceaux d'obstructions microlocaux du problème de Cauchy coïncide avec le complexe de faisceaux des solutions microfonctions du système induit sur N (Théorème 2.4). Remarquons que le résultat ci-dessus est une généralisation de la version d'Andreotti-Hill citée plus haut au cas générique.

Dans le paragraphe 3, on montrera comment ces résultats précédents permettent de déterminer concrètement la forme du domaine sur lequel les hyperfonctions CR s'étendent en fonctions holomorphes. Comme le résultat ci-dessus est abstrait en apparence on donnera quelques exemples dans ce paragraphe.

Pour traiter le phénomène de Lewy lorsque la sous-variété est partiellement plate (i.e. exdim $N <$ codim N), on aura besoin de plus de considérations précises sur la paire de variétés CR et sur le faisceau des hyperfonctions partiellement holomorphes. On étudiera ce problème dans un autre article.

§ 1. Rappels sur le problème de Cauchy

On utilisera les outils et les techniques développés dans l'article de Sato, Kashiwara et Kawai [37] auquel on se référera constamment.

Soit N une sous-variété analytique réelle dans une variété analytique réelle M, Y le complexifié de N dans un complexifié X de M. On note $\mathscr{B}_M$ (resp. $\mathscr{B}_N$) le faisceau des hyperfonctions de Sato sur M (resp. sur N). Notons $\mathscr{D}_X$ (resp. $\mathscr{D}_Y$) le faisceau d'anneau des opérateurs différentiels linéaires d'ordre fini sur X (resp. sur Y). Si $\mathscr{M}$ est une $\mathscr{D}_X$-module cohérent (à gauche) on dira aussi que $\mathscr{M}$ est un système d'équations linéaires aux dérivées partielles.

Par définitions, le faisceau des solutions hyperfonctions du système $\mathscr{M}$ coïncide avec le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{B}_M)$. On désigne par $\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}$ le foncteur dérivé du foncteur $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}$, et par $\boldsymbol{R}\Gamma_N$ le foncteur dérivé du foncteur Γ_N. La théorie des catégories dérivées nous permet pour le complexe de faisceaux $\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{B}_M)$ des solutions hyperfonctions du système $\mathscr{M}$ de considérer le morphisme suivant (cf. SKK, Chapitre 1, Lemme 1.1.2.):

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{B}_M)|_N \longrightarrow \boldsymbol{R}\Gamma_N\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{B}_M)[\operatorname{codim}_M N]\otimes\omega_{N|M}$$

où $\omega_{N|M}$ désigne le faisceau d'orientation de N dans M.

Supposons dans tout ce paragraphe que N soit non caractéristique par rapport à $\mathscr{M}$ (i.e. $T_Y^*X \cap \mathrm{SS}(\mathscr{M}) \subseteqq T_X^*X$). Alors le système induit $\mathscr{M}|_Y$ défini par $\mathscr{M}|_Y = \mathscr{D}_{Y\to X}\otimes_{\mathscr{D}_X}\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_Y$-module cohérent. Rappelons d'abord le

THÉORÈME 1.1 (M. Kashiwara [20], H. Komatsu et T. Kawai [27]). *Dans la situation précédente on a un morphisme naturel:*

$$\boldsymbol{R}\Gamma_N\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{B}_M)[\operatorname{codim}_M N]\otimes\omega_{N|M} = \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y, \mathscr{B}_N).$$

DÉMONSTRATION (due à M. Kashiwara [20]).

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}\Gamma_N \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{B}_M)[\operatorname{codim}_M N]\otimes\omega_{N|M} \\
&= \boldsymbol{R}\Gamma_N \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \boldsymbol{R}\Gamma_M(\mathscr{O}_X))[\operatorname{codim}_M N+\dim M]\otimes\omega_{N|M}\otimes\omega_{M|X} \\
&= \boldsymbol{R}\Gamma_N \boldsymbol{R}\Gamma_M \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)[\operatorname{codim}_M N+\dim M]\otimes\omega_{N|X} \\
&= \boldsymbol{R}\Gamma_N \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)[\operatorname{codim}_M N+\dim M]\otimes\omega_{N|X} \\
&= \boldsymbol{R}\Gamma_N \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y, \mathscr{O}_Y)[\operatorname{codim}_M N+\dim M]\otimes\omega_{N|X} \\
&= \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y, \boldsymbol{R}\Gamma_N(\mathscr{O}_Y))[\operatorname{codim}_M N+\dim M]\otimes\omega_{N|X} \\
&= \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y, \mathscr{B}_N)[\operatorname{codim}_M N+\dim M-\dim N]\otimes\omega_N\otimes\omega_{N|X} \\
&= \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y, \mathscr{B}_N). \qquad \text{C.q.f.d.}
\end{aligned}
$$

Grâce au résultat ci-dessus, on peut définir le morphisme suivant:

$$
\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{B}_M)\,|\,N \longrightarrow \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y, \mathscr{B}_N).
$$

Nous sommes en mesure de définir le problème de Cauchy pour solutions hyperfonctions dans la catégorie dérivée comme suite.

DÉFINITION 1.2. On dit que le problème de Cauchy pour le complexe des solutions hyperfonctions du système $\mathscr{M}$ est bien posé par rapport à N si on a

$$
\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{B}_M)\,|\,N = \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y, \mathscr{B}_N).
$$

On dira aussi que le problème de Cauchy est résoluble au cran k si on a

$$
\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{B}_M)\,|\,N = \mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y, \mathscr{B}_N).
$$

Remarquons que M. Kashiwara et P. Schapira [24] ont démontré que si N est hyperbolique par rapport à $\mathscr{M}$ (c'est une condition de nature géométrique reliant N et la variété caractéristique de $\mathscr{M}$) le problème de Cauchy est bien posé.

Rappelons ensuite la

PROPOSITION 1.3 (SKK, Chapitre 1, Proposition 1.2.5). *Soit $\mathscr{F}$ un complexe de faisceaux sur M, N une sous-variété de M. On a alors le triangle suivant:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{F}\,|\,N \arrow[dl] & \\
\boldsymbol{R}\Gamma_N(\mathscr{F})[\operatorname{codim}_M N]\otimes\omega_{N|M} \arrow[rr] & & \boldsymbol{R}\pi_{N|M*}\boldsymbol{R}\Gamma_{S^*_N M}(\pi^{-1}_{N|M}\mathscr{F})[\operatorname{codim}_M N]\otimes\omega_{N|M} \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}
$$

où $\pi_{N|M}$ la projection $(M-N)\sqcup S^*_N M\to M$, le premier espace étant muni de la topologie de co-éclaté.

On en déduit la

PROPOSITION 1.4. *Le problème de Cauchy pour le complexe des solutions hyperfonctions du système $\mathcal{M}$ est bien posé par rapport à N si et seulement si:*

$$\boldsymbol{R}\pi_{N|M*}\boldsymbol{R}\Gamma_{S^*_N M}(\pi^{-1}_{N|M}\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M))=0.$$

Cela nous permet d'interpréter $\boldsymbol{R}\Gamma_{S^*_N M}(\pi^{-1}_{N|M}\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M))$ comme un complexe de faisceaux d'obstructions microlocaux pour que le problème de Cauchy soit résoluble.

§ 2. Système induit et système ambiant

Le but de ce paragraphe est de démontrer le Théorème 2.4 qui nous permet d'étudier le phénomène de Lewy dans le cadre des hyperfonctions. Nous adoptons les notions de [40].

Soit N une sous-variété générique (comme une variété de Cauchy-Riemann) d'une variété analytique complexe X, X_R la variété analytique réelle sous-jacente de X. On identifiera X_R à la diagonale de $X\times\bar{X}$, $\bar{X}$ étant muni de la structure "antiholomorphe", et ainsi $X\times\bar{X}$ à un complexifié de X_R. Soit Y le complexifié de N dans $X\times\bar{X}$.

Etant donné un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$, on lui associe, en rajoutant les équations de Cauchy-Riemann, le système $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}}$ sur $X\times\bar{X}$. L'hypothèse "N est générique" entraîne que N est non caractéristique par rapport à $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}}$, ceci permet de construire le système induit $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ en tant que $\mathcal{D}_Y$-module cohérent.

DÉFINITION 2.1 (voir S. Tajima [40], paragraphe 3). On désigne par τ la projection naturelle $X\times\bar{X}\to X$ et par ϕ_C l'immersion $Y\to X\times\bar{X}$ qui est le complexifié naturel de $N\to X$.

On définit le système $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}}$ et le système induit $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ par:

$$\mathcal{M}_{\mathrm{CR}}=\tau^*\mathcal{M}=\mathcal{D}_{X\times\bar{X}\to X}\otimes_{\mathcal{D}_X}\mathcal{M}$$

et

$$\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}=\phi_C^*(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}})=\mathcal{D}_{Y\to X\times\bar{X}}\otimes_{\mathcal{D}_{X\times\bar{X}}}\mathcal{M}_{\mathrm{CR}}.$$

Remarquons que si l'on substitue $\mathcal{D}_X$ à $\mathcal{M}$, le système $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ coïncide avec le système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles $\bar{\partial}_N$. Comme $\mathcal{E}nd_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{D}_{\mathrm{CR}|Y})=\mathcal{E}nd_{\mathcal{D}_{X\times\bar{X}}}(\mathcal{D}_{\mathrm{CR}}, \mathcal{D}_{\mathrm{CR}})=\mathcal{D}_X$, le système induit $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ s'identifie à un système $\mathcal{M}$ complété par le système de

Cauchy-Riemann tangentiel (voir P. Pallu de la Barrière [34], S. Tajima [40]).

Une généralisation primitive du problème de Lewy s'énonce: étant donné un système induit $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}$, est-ce que les solutions hyperfonctions du système $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ définies dans un ouvert V dans N ont des extensions en solutions holomorphes du système $\mathcal{M}$ dans un ouvert (de X) dont la frontière contient V?

Grâce au résultat ci-dessous on peut interpréter le problème de Lewy comme une sorte de problème de Cauchy pour solutions hyperfonctions.

PROPOSITION 2.2 (voir S. Tajima [40], Proposition 3.1.2). *Pour tout $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$, on a le quasi-isomorphisme suivant:*

$$\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X\times\bar{X}}}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}}, \mathcal{B}_{X_{\boldsymbol{R}}}) = \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X).$$

On va d'abord étudier le complexe des faisceaux d'obstructions microlocaux du problème de Cauchy pour l'étude systématique du phénomène de Lewy.

Si on pose $\mathcal{F} = \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X\times\bar{X}}}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}}, \mathcal{B}_{X_{\boldsymbol{R}}})$ on obtient le

LEMME 2.3. *On a le triangle suivant:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{F}|N \arrow[dl] & \\
\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{B}_N) \arrow[rr] & & \boldsymbol{R}\pi_{N|X*}\boldsymbol{R}\Gamma_{S^*_N X}(\pi^{-1}_{N|X}\mathcal{F})[\operatorname{codim}_X N]\otimes\omega_{N|X} \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du Théorème 1.1 et la Proposition 1.3. C.q.f.d.

Le résultat principal de ce paragraphe s'énonce:

THÉORÈME 2.4. *Soit N une sous-variété générique de X, Y le complexifié de N plongé dans $X\times\bar{X}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Alors le complexe de faisceaux d'obstructions microlocaux du problème de Cauchy par rapport à N s'identifie au complexe de faisceaux des solutions microfonctions du système induit $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}$, i.e.*

$$\boldsymbol{R}\Gamma_{S^*_N X}(\pi^{-1}_{N|X}\mathcal{F})[\operatorname{codim}_X N]\otimes\omega_{N|X} = \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{C}_N)^a$$

où $\mathcal{C}_N$ désigne le faisceau des microfonctions sur $S^*_N Y$, $\mathcal{E}_Y$ désigne le faisceau des opérateurs microdifférentiels sur T^*Y et a l'application antipodale.

DÉMONSTRATION. On déduit immédiatement de la Proposition 2.2 et d'un résultat de [40] (Théorème 3.1.4) le résultat susmentionné. C.q.f.d.

REMARQUE 2.5. La composée $\tau \circ \phi_C$: $Y \to X$ étant une submersion, on peut identifier la variété caractéristique réelle de $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ avec $\mathrm{SS}(\mathcal{M}) \cap T^*_N X$ (Propositions 1.2.1 et 3.1.3 de [40]).

On en déduit les corollaires tout de suite.

COROLLAIRE 2.6. *On a l'isomorphisme suivant*:

$$\boldsymbol{R}\pi_{N|X*}\boldsymbol{R}\Gamma_{S^*_N X}(\pi^{-1}_{N|X}\mathcal{F})[\mathrm{codim}_X N]\otimes\omega_{N|X} = \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \pi_{N|Y*}\mathcal{C}_N)^a$$

où $\pi_{N|Y}$ *désigne la projection* $(Y-N)\sqcup S^*_N Y \to Y$.

COROLLAIRE 2.7.

$$\boldsymbol{R}\Gamma_{S^*_N X}(\pi^{-1}_{N|X}\mathcal{F})[\mathrm{codim}_X N]\otimes\omega_{N|X} = 0 \quad sur \quad S^*_N X - S^*_N X \cap \mathrm{SS}(\mathcal{M}).$$

Signalons que si la sous-variété N est non caractéristique par rapport à $\mathcal{M}$ (i.e. $T^*_N X \cap \mathrm{SS}(\mathcal{M}) \subset T^*_X X$) N est hyperbolique par rapport à $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}}$ au sens de M. Kashiwara et P. Schapira [24].

COROLLAIRE 2.8 *Supposons que* $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0$. *Alors le problème de Cauchy est résoluble au cran* 0 (*i.e.* $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \mid N = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{B}_N)$) *si et seulement si*:

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{C}_N) = 0.$$

En particulier si la forme de Levi généralisée du système $\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ (*SKK, Chapitre* 3, *Définition* 2.3.1) *a au moins une valeur propre strictement négative sur* $(T^*_N X - T^*_X X) \cap \mathrm{SS}(\mathcal{M})$, *le problème de Cauchy est résoluble au cran* 0.

EXEMPLE 2.9 (L. R. Hunt et M. Kazlow [18]). Plaçons-nous dans $X = \boldsymbol{C}^6$ muni des coordonnées $(z) = (z_1, z_2, \cdots, z_6)$, et posons:

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2i}(z_1 - \bar{z}_1) - (z_3\bar{z}_3 - z_4\bar{z}_4), \qquad g(z, \bar{z}) = \frac{1}{2i}(z_2 - \bar{z}_2) - (z_5\bar{z}_5 - z_6\bar{z}_6).$$

Soit N la sous-variété générique de $\boldsymbol{C}^6$ définie par les équations $f(z, \bar{z}) = g(z, \bar{z}) = 0$: $N = \{z \in \boldsymbol{C}^6 \mid f(z, \bar{z}) = g(z, \bar{z}) = 0\}$. Si on désigne par $HT(N)$ l'espace vectoriel complexe tangent à N, on a $HT(N) = \{(z, v) \mid z \in N,\ v = 2i(\bar{z}_3 a_3 - \bar{z}_4 a_4)(\partial/\partial z_1) + 2i(\bar{z}_5 a_5 - \bar{z}_6 a_6)(\partial/\partial z_2) + a_3(\partial/\partial z_3) + a_4(\partial/\partial z_4) + \cdots + a_6(\partial/\partial z_6)$, avec $a_k \in \boldsymbol{C}$ pour $k = 3, 4, \cdots, 6\}$.

Rappelons la notion de la forme microlocale de Levi-Tanaka-Naruki (I. Naruki [31]) associée à N qui a été retrouvée par de nombreux mathématiciens du point de vue microlocal (par exemple [2], [5], [14], [40]). Cette forme (notée $\mathscr{L}_N(f, g, q)$, où $q=k_1 df(z, \bar{z})+k_2 dg(z, \bar{z}) \in T_N^* \boldsymbol{C}^6$ avec $(k_1, k_2) \in \boldsymbol{R}^2-\{(0, 0)\}$) est par définition une forme quadratique sur l'espace $HT(N)$ du type suivant:

$$\mathscr{L}_N(f, g, q)(v, \bar{v})=\partial\bar{\partial}(k_1 f+k_2 g)(v, \bar{v}) \quad \text{où} \quad v \in HT(N).$$

On a donc

$$\mathscr{L}_N(f, g, q)(v, \bar{v})=k_1|a_3|^2-k_1|a_4|^2+k_2|a_5|^2-k_2|a_6|^2 \quad \text{où}$$
$$v=2i(\bar{z}_3 a_3-\bar{z}_4 a_4)\frac{\partial}{\partial z_1}+2i(\bar{z}_5 a_5-\bar{z}_6 a_6)\frac{\partial}{\partial z_3}+a_3\frac{\partial}{\partial z_3}+\cdots+a_6\frac{\partial}{\partial z_6} \in TH(N).$$

D'où on voit que cette sous-variété N est 1-concave, c'est-à-dire que la forme de Levi-Tanaka-Naruki a au moins une valeur propre négative pour tout $(k_1, k_2) \in \boldsymbol{R}^2-\{(0, 0)\}$, or la signature de la forme de Levi-Tanaka-Naruki associée à N et celle de SKK (pour le système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur N) coïncide (voir S. Tajima [40], Proposition 2.1.7), donc ce système induit est hypoelliptique analytique: $\mathscr{H}om_{\mathscr{E}_Y}(\bar{\partial}_N, \mathscr{C}_N)=0$. On en conclut que "le problème bilatéral" est résoluble: $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\bar{\partial}_N, \mathscr{B}_N)=\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\bar{\partial}_N, \mathscr{A}_N)=\mathscr{O}_{\boldsymbol{C}^6}|_N$ où $\mathscr{A}_N$ désigne le faisceau des fonctions analytiques réelles sur N.

On termine ce paragraphe en démontrant le

THÉORÈME 2.10 (cf. E. Bedford et J. E. Fornaess [6]). *Soit N une sous-variété générique de codimension d de X et $p \in N$. Supposons que N contient un germe d'une sous-variété analytique complexe Z de codimension d de X en p. Alors le système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles $\bar{\partial}_N$ est non-hypoelliptique en p: De plus on a:*

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\bar{\partial}_N, \Gamma_Z(\mathscr{B}_N))=\mathscr{H}_Z^d(\mathscr{O}_X)\otimes\omega_{N|X}\neq 0.$$

DÉMONSTRATION. Le quasi-isomorphisme

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\bar{\partial}_N, \mathscr{B}_N)=\boldsymbol{R}\Gamma_N(\mathscr{O}_X)[d]\otimes\omega_{N|X}$$

entraîne

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Z\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\bar{\partial}_N, \mathscr{B}_N)=\boldsymbol{R}\Gamma_Z\boldsymbol{R}\Gamma_N(\mathscr{O}_X)[d]\otimes\omega_{N|X}.$$

On obtient donc

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\bar{\partial}_N, \boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathscr{B}_N)) = \boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathscr{O}_X)[d]\otimes\omega_{N|X} = \mathscr{H}_Z^d(\mathscr{O}_X)\otimes\omega_{N|X}.$$

Ceci entraine le résultat tout de suite. C.q.f.d.

§ 3. Problème de Lewy

On va aborder le problème de Lewy dans le cadre des hyperfonctions. Soit $\mathscr{M}$ un système différentiel sur une variété analytique complexe X. Pour plus de clarté, on supposera que $\mathscr{M}$ soit résoluble i.e. $\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)=0$ pour $k\geqq 1$.

On va d'abord considérer le cas de codimension 1. Soit maintenant Ω un ouvert de X, $\partial\Omega$ (noté N) le bord de Ω, que l'on suppose être une hypersurface analytique réelle. On désigne par N_+ (resp. N_-) le fibré conormal extérieur (resp. intérieur) à N en sphère, et par Y le complexifié de N plongé dans $X\times\bar{X}$, en supposant que Ω soit situé d'un seul côté de N. On désigne par Ω_+ l'autre côté de N, et par j (resp. j_+) l'inclusion naturelle $\Omega\to X$ (resp. $\Omega_+\to X$).

Le problème étant de nature locale, nous nous placerons sur un voisinage d'un point $p\in N$. Notons p_+ (resp. p_-) l'image réciproque de p dans N_+ (resp. N_-). On a le

THÉORÈME 3.1. *Les conditions* (1), (2) *et* (3) *sont équivalentes*:

(1) *Les solutions hyperfonctions du système induit* $\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ *en* p *ont des extensions latérales en solutions holomorphes du système* $\mathscr{M}$ *au côté* Ω:

$$j_*(j^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X))_p = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathscr{B}_N)_p.$$

(2) *Le système induit* $\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ *est hypo-elliptique analytique en* p_-:

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathscr{C}_N)_{p_-}=0.$$

(3) *Les solutions holomorphes du système* $\mathscr{M}$ *au voisinage de* p *sur* Ω_+ *se prolongent en solutions holomorphes à travers la frontière* N:

$$j_{+*}(j_+^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X))/\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)_p=0.$$

DÉMONSTRATION. L'équivalence de la condition (2) et de (3) est démontré dans l'article [40] (Théorème 4.1.5). Il suffit donc de démontrer que la condition (1) est équivalente à la condition (3). D'après le Théorème 1.1 et la Proposition 2.2 (cf. [23]), on a:

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathscr{B}_N)=\mathscr{H}^1_N(\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X))\otimes\omega_{N|X}.$$

Cet isomorphisme signifie que les solutions hyperfonctions du système induit $\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ s'identifient avec "les sauts" des solutions holomorphes du système $\mathscr{M}$ auprès de N. Ce qui entraîne le résultat immédiatement (cf. P. Pallu de la Barrière [34]). C.q.f.d.

On commence à étudier le phénomène de Lewy dans le cas générique en se posant dans la situation du paragraphe 2.

On pose $V=\mathrm{Support}\,(\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathscr{C}_N))$. Remarquons d'abord que, d'après le Théorème 2.4 et la Remarque 2.5, V s'identifie à une sous-ensemble de $S^*_N X$. Si V est vide, alors le problème de Cauchy est résoluble en cran 0: $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathscr{B}_N)=\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)\,|\,N$. On étudiera donc le cas où V n'est pas vide. Soit W un voisinage ouvert de p dans N. On désignera encore par V l'ensemble $V\cap\pi^{-1}_{N|X}(W)$ et par V° l'intérieur de son polaire dans $S_N X$.

Le résultat principal qui correspond un résultat dû à A. Bogges et J. C. Polking [9] s'énonce:

THÉORÈME 3.2. *Dans la situation précédente, supposons maintenant que l'enveloppe convexe de V soit propre et donc que le polaire V° ne soit pas vide. On a alors l'isomorphisme suivant*:

$$\Gamma(V^\circ, \tilde{j}_*(j^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X))\,|\,S_N X)=\Gamma(W, \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathscr{B}_N))$$

où j désigne l'inclusion naturelle $X-N\to X$ et $\tilde{j}$ désigne l'application associée $X-N\to(X-N)\sqcup S_N X$.

L'isomorphisme ci-dessus signifie que les solutions hyperfonctions du système $\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}$ ne sont pas autres choses que les valeurs au bord selon V° des solutions holomorphes du système ambiant $\mathscr{M}$. Remarquons aussi que le fait que "le profil" V° est déterminé par V correspond au lien entre le phénomène de H. Lewy (pour le système $\mathscr{M}$) et non-hypoellipticité analytique du système $\mathscr{M}_{\mathrm{CR}|Y}$.

DÉMONSTRATION. On définit l'ensemble $D_N X$ par: $D_N X=\{(x, \xi; x, \eta)\in S_N X_X\times S^*_N X\,|\,\langle\xi, \eta\rangle\leqq 0\}$. On a le diagramme suivant de façon naturelle:

$$\begin{tikzcd}
 & D_N X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\
S_N X \arrow[dr, "\tau"'] & & S^*_N X \arrow[dl, "\pi"] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

où π (resp. τ) désignant la projection $\pi_{N|X}$ (resp. $\tau_{N|X}$). Notre théorème résultera des deux lemmes suivants:

LEMME 3.3. *On pose $\mathscr{F}=\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{O}_X)$. Si on désigne par $\tilde{j}^*$ l'inclusion naturelle $X-N\to(X-N)\sqcup S_N^*X$, on a le triangle suivant:*

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{R}\tilde{j}_*(j^{-1}\mathscr{F})^a \arrow[dl] & \\
\tau^{-1}\boldsymbol{R}j_*(j^{-1}\mathscr{F})[d-1]\otimes\omega_{N|X} \arrow[rr] & & \boldsymbol{R}\pi_*(\tau^{-1}(\boldsymbol{R}\tilde{j}^*_*(j^{-1}\mathscr{F})))[d-1]\otimes\omega_{N|X} \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}$$

où $d=\operatorname{codim}_X N$.

DÉMONSTRATION. Rappelons d'abord un triangle canonique dû à SKK (Chapitre 1, Proposition 1.4.4):

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{G}^a \arrow[dl] & \\
\tau^{-1}\boldsymbol{R}\tau_*(\mathscr{G})[d-1]\otimes\omega_{N|X} \arrow[rr] & & \boldsymbol{R}\pi_*\tau^{-1}(\boldsymbol{R}\tau_*(\pi^{-1}\mathscr{G}))[d-1]\otimes\omega_{N|X}. \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}$$

On substitue $\boldsymbol{R}\tilde{j}_*(j^{-1}\mathscr{F})$ à $\mathscr{G}$. On obtient alors

$$\tau^{-1}(\boldsymbol{R}\tau_*(\boldsymbol{R}\tilde{j}_*(j^{-1}\mathscr{F})))=\tau^{-1}(\boldsymbol{R}j_*(j^{-1}\mathscr{F}))$$

et

$$\boldsymbol{R}\pi_*\tau^{-1}(\boldsymbol{R}\tau_*(\pi^{-1}(\boldsymbol{R}\tilde{j}_*(j^{-1}\mathscr{F}))))=\boldsymbol{R}\pi_*(\tau^{-1}(\boldsymbol{R}\tilde{j}^*_*(j^{-1}\mathscr{F}))).$$

On en déduit le résultat immédiatement. C.q.f.d.

D'autre part, on a le

LEMME 3.4. *Si on désigne par π la projection $(X-N)\sqcup S_N^*X\to X$, on a les triangles suivants:*

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{R}\Gamma_N(\mathscr{F}) \arrow[dl] & \\
\mathscr{F} \arrow[rr] & & \boldsymbol{R}j_*(j^{-1}\mathscr{F}), \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{R}\Gamma_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathscr{F}) \arrow[dl] & \\
\pi^{-1}\mathscr{F} \arrow[rr] & & \boldsymbol{R}\tilde{j}^*_*(j^{-1}\mathscr{F}). \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}$$

Reprenons maintenant la démonstration du Théorème 3.2. En utilisant les lemmes précédents, on a la suite exacte suivante:

$$0\longrightarrow\tilde{j}_*(j^{-1}\mathscr{F})^a\longrightarrow\tau^{-1}\mathscr{H}^d_N(\mathscr{F})\otimes\omega_{N|X}\longrightarrow\pi_*(\tau^{-1}\mathscr{H}^d_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathscr{F}))\otimes\omega_{N|X}.$$

On obtient donc que

$$0 \longrightarrow \tilde{j}_*(j^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))^a \longrightarrow \tau^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{B}_N)$$
$$\longrightarrow \pi_*(\tau^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{C}_N)^a).$$

On en déduit que (voir SKK, Chapitre 1, Proposition 1.5.4)

$$0 \longrightarrow \Gamma(V^\circ, \tilde{j}_*(j^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))) \longrightarrow \Gamma(\tau V^\circ, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{B}_N))$$
$$\longrightarrow \Gamma(V^\circ, \pi_*(\tau^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{C}_N))).$$

D'autre part,

$$\Gamma(V^\circ, \pi_*(\tau^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{C}_N))) = \Gamma(\pi^{-1}V^\circ, \tau^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{C}_N))$$
$$= \Gamma(S_N^*X - V^{\circ\circ}, \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{C}_N)) = 0.$$

On en conclut que

$$\Gamma(V^\circ, \tilde{j}_*(j^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))) = \Gamma(W, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{\mathrm{CR}|Y}, \mathcal{B}_N)). \quad \text{C.q.f.d.}$$

EXEMPLE 3.5 (A. Boggess et J. C. Polking [9]). Soit X l'espace $\boldsymbol{C}^4$ muni des coordonnées $(z)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Soit N une sous-variété générique de X définie par les équations $f(z, \bar{z})=g(z, \bar{z})=0$, où $f(z, \bar{z})=(z_1+\bar{z}_1)-2z_3\bar{z}_3$ et $g(z, \bar{z})=(z_2+\bar{z}_2)-(z_3\bar{z}_4+\bar{z}_3z_4)$. On désigne par $HT(N)$ l'espace vectoriel complexe tangent à N. Il est facile de voir que: $HT(N)=\{(z, v) \mid z \in N,\ v=2\bar{z}_1a_3(\partial/\partial z_1)+(\bar{z}_2a_3+\bar{z}_1a_4)(\partial/\partial z_2)+a_3(\partial/\partial z_3)+a_4(\partial/\partial z_4),\ a_3, a_4 \in C\}$. On pose $q=k_1df(z, \bar{z})+k_2dg(z, \bar{z}) \in T_N^*X$ (où $(k_1, k_2) \in \boldsymbol{R}^2-\{(0, 0)\}$). Si on désigne par $\mathcal{L}_N(f, g, q)$ la forme de Levi-Tanaka-Naruki associée à N en q, on a

$$\mathcal{L}_N(f, g, q)(v, \bar{v}) = -2k_1|a_3|^2 - k_2(a_3\bar{a}_4+\bar{a}_3a_4)$$
$$\text{pour} \quad v=2\bar{z}_1a_3\frac{\partial}{\partial z_1}+(\bar{z}_2a_3+\bar{z}_1a_4)\frac{\partial}{\partial z_2}+a_3\frac{\partial}{\partial z_3}+a_4\frac{\partial}{\partial z_4} \in HT(N).$$

Il en résulte que la forme de Levi-Tanaka-Naruki a au moins une valeur propre strictement négative en dehors de l'ensemble V défini par $\{(z, k_1df(z, \bar{z})) \in S_N^*X \mid z \in N,\ k_1<0\}$. On en conclut que le problème de Lewy est résoluble, i.e.

$$\Gamma(V^\circ, \tilde{j}_*(j^{-1}\mathcal{O}_X)) = \Gamma(W, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bar{\partial}_N, \mathcal{B}_N)).$$

EXEMPLE 3.6 (R. Nirenberg [33]). Plaçons-nous dans $X=\boldsymbol{C}^3$ muni des coordonnées $(z)=(z_1, z_2, z_3)$, et posons $f(z, \bar{z})=(1/2i)(z_1-\bar{z}_1)$, $g(z, \bar{z})=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2-1$. Soit N la sous-variété générique définie par $N=\{z \in X \mid f(z, \bar{z})=g(z, \bar{z})=0,\ -1<\mathrm{Re}\,(z_1)<1\}$.

Si on pose $V=\text{Support}(\mathscr{H}om_{\mathscr{E}_Y}(\bar{\partial}_N, \mathscr{C}_N))$, on voit facilement que l'intérieur de son polaire V est vide, car la variété N est partiellement plate. N ne satisfait pas l'hypothèse du Théorème 3.2. De plus on peut démontrer que le problème de Lewy (du type primitif) est non-résoluble.

Si on désigne par $\tilde{N}$ la variété plate définie par l'équation $f(z, \bar{z})=0$, $\tilde{N}$ est générique. Comme la sous-variété N est non caractéristique par rapport à $\bar{\partial}_{\tilde{N}}$, on peut considérer le problème de Lewy "de type relatif" dans le cadre des hyperfonctions. En effet, en profitant des propriétés des hyperfonctions partielement holomorphes et en utilisant la méthode des disques analytiques, on peut démontrer que le problème de Lewy "de type relatif" est résoluble.

On étudiera ce type de problème dans un autre article.

Bibliographie

[1] Andreotti, A. et C. D. Hill, E. E. Levi convexity and the H. Lewy problem I, II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **26** (1972), 323–363, 747–806.

[2] Andreotti, A., Fredricks, G. et M. Nacinovich, On the absence of Poincaré lemma in tangential Cauchy-Riemann complexes, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 8 (1981), 365–404.

[3] Baouendi, M. S. et F. Treves, A microlocal version of Bochner's tube theorem, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 885–895.

[4] Baouendi, M. S. et F. Treves, About the holomorphic extension of CR-functions on real hypersurfaces in complex spaces, Duke Math. J. **51** (1984), 77–107.

[5] Baouendi, M. S., Chang, C. H. et F. Treves, Microlocal hypoanalyticity and extension of CR-functions, J. Differential Geom. **18** (1983), 331–391.

[6] Bedford, E. et J. E. Fornaess, Local extension of CR functions from weakly pseudoconvex boundaries, Michigan Math. J. **25** (1978), 259–262.

[7] Bishop, E., Differentiable manifolds in complex Euclidean space, Duke Math. J. **32** (1965), 1–22.

[8] Boggess, A., CR extendability near a point where the first Levi form vanishes, Duke Math. J. **48** (1981), 665–684.

[9] Boggess, A. et J. C. Polking, Holomorphic extension of CR functions, Duke Math. J. **49** (1982), 757–784.

[10] Bony, J. M. et P. Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **26** (1976), 81–140.

[11] Greenfield, S. J., Cauchy-Riemann equations in several variables, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 275–314.

[12] Hanges, N. et F. Treves, Propagation of holomorphic extendability of CR functions, Math. Ann. **263** (1983), 157–177.

[13] Henkin, G. M., Analytic representation for CR-functions on manifolds of codimension 2 in $\mathbf{C}^n$, Soviet Math. Dokl. **21** (1980), 85–89.

[14] Henkin, G. M., Solution des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur des variétés de Cauchy-Riemann q-concaves, C.R. Acad. Sci. Paris **292** (1981), Sér. I, 27–30.

[15] Hill, C. D., Kontinuitätssatz for $\bar{\partial}_M$ and Lewy extendability, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 339–353.
[16] Hill, C. D. et G. Taiani, Families of analytic discs in $\mathbf{C}^n$ with boundaries on prescrived CR-submanifold, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **5** (1978), 327–380.
[17] Hunt, L. R. et R. O. Wells, Jr., Extensions of CR functions, Amer. J. Math. **98** (1976), 805–820.
[18] Hunt, L. R. et M. Kazlow, A two-sided H. Lewy extension phenomenon, Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1979), 95–100.
[19] Kaneko, A., Introduction à la théorie des hyperfonctions I, II, Univ. Tokyo Press, Tokyo, UP Applied Math. Ser. 1, 6, 1982 (en japonais).
[20] Kashiwara, M., Algebraic study of systems of partial differential equations, Master's theses, Univ. Tokyo, 1971 (en japonais).
[21] Kashiwara, M., Système d'équations micro-différentielles, Notes de Teresa Monteiro-Fernandes, Univ. Paris-Nord, 1978.
[22] Kashiwara, M. et T. Kawai, On the boundary value problem for elliptic systems of linear differential operators I, II, Proc. Japan Acad. **48** (1972), 712–715, ibid **49** (1973), 164–168.
[23] Kashiwara, M. et T. Kawai, Theory of elliptic boundary value problems and its applications, RIMS 238, Kyoto Univ. (1975), 1–59 (en japonais).
[23′] Kashiwara, M. et T. Kawai, Some applications of boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 93, 1979, 39–61.
[24] Kashiwara, M. et P. Schapira, Micro-hyperbolic systems, Acta. Math. **142** (1979), 1–55.
[25] Kohn, J. J., Boundaries of complex manifolds, Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1965, 81–94.
[26] Komatsu, H., A local version of Bochner's tube theorem, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **19** (1972), 201–214.
[27] Komatsu, H. et T. Kawai, Boundary values of hyperfunctions solutions of linear partial differential equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **7** (1971/72), 95–104.
[28] Lewy, H., On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables, Ann. of Math. **64** (1956), 514–522.
[29] Lewy, H., On hulls of holomorphy, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 587–591.
[30] Nacinovich, M., Sulla risolubilita di sistemi de equazioni differenziali, Boll. Un. Mat. Ital. Ser. VI. **1-C** Anal. Funz. Appl. (1982), 107–135.
[31] Naruki, I., Holomorphic extension problem for standard real submanifolds of second kind, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **6** (1970), 113–187.
[32] Naruki, I., Localisation principle for differential complexes and its applications, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **8** (1972), 43–110.
[33] Nirenberg, R., On the H. Lewy extension phenomenon, Trans. Amer. Math. Soc. **168** (1972), 337–356.
[34] Pallu de la Barrière, P., Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 21–46.
[35] Polking, J. C. et R. O. Wells, Jr., Boundary values of Dolbeault cohomology classes and a generalised Bochner-Hartogs theorem, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **47** (1978), 1–24.
[36] Rossi, H., A generalisation of a theorem of Hans Lewy, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 436–440.

[37] Sato, M., Kawai, T. and M. Kashiwara, (SKK), Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math., 287, Springer, Berlin, 1973, 265–529.

[38] Sjöstrand, J., The FBI-transform for CR submanifolds of $\mathbf{C}^n$, Prépublications, Univ. Paris-Sud, 1982.

[39] Stormark, O., A note on a paper by Andreotti and Hill concerning the Hans Lewy problem, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **2** (1975), 557–569.

[40] Tajima, S., Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problème du prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), 911–945.

[41] Trépreau, J. M., Systèmes différentiels a caractéristiques simples et structures réelles-complexes, Séminaire Bourbaki 34é année, n° 595, 1981/82.

[42] Wells, Jr., R. O., On the local holomorphic hull of a real submanifold in several complex variables, Comm. Pure Appl. Math. **19** (1966), 145–165.

[43] Айрапетян, Р. А. и Г. М. Хенкин, Интегральные представления дифференциальных форм на многоорразиях Коши-Римана и теория CR-функций, Успехи Мат. Наук **39** (1984), 39–106.

(Received November 5, 1983)

Department of Mathematics
Faculty of General Education
Niigata University
Niigata
950-21 Japan