Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique

par Marie-France VIGNÉRAS

En l'honneur de Takuro Shintani

On se propose de donner une caractérisation des intégrales orbitales des fonctions localement constantes à support compact sur les groupes réductifs p-adiques et leurs groupes isogènes. Le théorème principal est énoncé en 1.n et sa démonstration faite dans les paragraphes suivants.

1.a. *Notations.*

Soient k un corps p-adique de caractéristique zéro et $\underline{G}$ un groupe linéaire algébrique réductif défini sur k. Soit G le groupe des points de $\underline{G}$ rationnels sur k et soit $\tilde{G}$ un groupe isogène à G, défini par une extension centrale, finie, cyclique :

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 .$$

Soit $g \in G$ et $\tilde{g} \in \tilde{G}$ un élément relevant g. Les objets suivants ne dépendent pas des relèvements choisis :

— l'automorphisme intérieur de $\tilde{G}$ induit par $\tilde{g}$. On le notera Int_g.

— le centralisateur $Z_{\tilde{G}}(\tilde{g})$ dans $\tilde{G}$ de $\tilde{g}$.

— le commutateur de $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ relevant g_1, g_2. On le notera $[g_1, g_2]$.

On note $|\cdot|$ le module de k, et l'on fixe sur k une mesure de Haar.

1.b. La *réduction de Jordan* (Borel [1]) $g=su=us$ de g en partie semi-simple $s \in G$ et $u \in G$ unipotente a pour conséquence la décomposition $Z_G(g)= Z_H(u)$ où $H=Z_G(s)$, du centralisateur $Z_G(g)$ dans G de g.

1.c. La composante connexe algébrique du centralisateur dans $\underline{G}$ d'un élément semi-simple est *réductive* (Springer-Steinberg [18], p. 201). On notera $M=Z_{\underline{G}}(s)^\circ \cap G$ et $Z_G(g)'=Z_M(u)$.

1.d. La variété quotient $Z_G(u)\backslash G$ est une variété symplectique (Springer-Steinberg [18], p. 234). Soit $\underline{g}$ l'algèbre de Lie de G, et $X \in \underline{g}$ un élément dont l'image par l'application exponentielle est égale à u. Si $\underline{z}$ est le centre de $\underline{g}$, la forme de Killing $\mathrm{Tr}(\cdot, \cdot)$ est non dégénérée sur $\underline{z}\backslash\underline{g}$. Soit $\underline{z}(X)$ le centralisateur de X dans $\underline{g}$, alors $\underline{z}(X)\backslash\underline{g}$ est isomorphe à l'espace tangent à $Z_G(u)\backslash G$ au point $Z_G(u)$. On définit dans $\underline{z}(X)\backslash\underline{g}$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée en posant pour X_1, X_2 représentants dans $\underline{g}$ de deux classes de $\underline{z}(X)\backslash\underline{g}$:

$$\omega_u(X_1, X_2)=\mathrm{Tr}\,([X, X_1], X_2)\,.$$

On prolonge ω_u par translation en une 2-forme extérieure de rang maximum en tout élément de $Z_G(u)\backslash G$; on a ainsi défini une structure symplectique G-invariante sur $Z_G(u)\backslash G$. Donc $Z_G(u)\backslash G$ est de dimension paire $2m$, et possède une forme différentielle $\omega_u^{\otimes m}$ partout non nulle, G-invariante de degré $2m$. Elle induit de la façon usuelle (Weil [20]) une mesure invariante. Pour $g\in G$, $\mathrm{Ad}\,g$ induit une bijection de $\underline{z}(X)\backslash\underline{g}$ sur $\underline{z}(\mathrm{Ad}\,gX)\backslash\underline{g}$ et l'invariance de la forme de Killing entraine :

$$\omega_{gug^{-1}}(\mathrm{Ad}\,gX_1, \mathrm{Ad}\,gX_2)=\omega_u(X_1, X_2)\,.$$

1.e. Le groupe G est localement compact, unimodulaire. Ses sous-groupes d'Iwahori sont des sous-groupes ouverts, compacts, et conjugués entre eux. Il existe donc une unique mesure de Haar sur G pour laquelle les sous-groupes d'Iwahori ont pour volume 1 (Tits [19], p. 55).

1.f. La variété quotient $Z_M(u)\backslash G$ est munie d'une mesure G-invariante $|\omega_g|$ déduite de 1.c, 1.d, 1.e selon la méthode classique. L'application $\phi_g : x\to x^{-1}gx$ de $Z_M(u)\backslash G$ sur la classe de conjugaison $O(g)$ de g dans G permet de transporter $|\omega_g|$ en une mesure $|\phi_g*\omega_g|$. Cette mesure est indépendante du choix de g dans sa classe de conjugaison. L'intégrale d'une fonction f sur $O(g)$ pour $|\phi_g*\omega_g|$ est égale à l'intégrale de la fonction $f\phi_g$ pour $|\omega_g|$.

1.g. *Mesure orbitale canonique normalisée.*

Pour des raisons de régularité, on introduit un facteur de normalisation $d(g)$: soit $\underline{T}$ un tore maximal de $\underline{G}$ contenant s et X un système de racines de $\underline{G}$ par rapport à $\underline{T}$. Soit X_1 les racines de X qui sont triviales sur s, et X_2 le complémentaire de X_1 dans X. On pose

$$D(s)=\prod_{\alpha\in X_2}(1-\alpha(s))$$

$$d(g)=|D(s)|^{1/2}\,.$$

La mesure orbitale canonique normalisée sur $O(g)$ est par définition $d(g)|\phi_{g*}\omega_g|$. On définit de même une mesure orbitale canonique normalisée sur $O(\tilde{g})$.

1.h. *Intégrale orbitale.*

Soit $C_c(G)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, définies sur G, localement constantes à support compact. Pour $f\in C_c(G)$, l'intégrale de f sur l'orbite de g, pour la mesure orbitale canonique normalisée, converge (Rao [14], et Deligne, non publié), et est égale à

$$F(g, f)=d(g)\int_{Z_G(g)'\backslash G} f(x^{-1}gx)|\omega_g(x)|\,.$$

DÉFINITION. Si $f\in C_c(G)$, l'intégrale orbitale de f est l'application $g\to F(g,f)$ de G dans $\boldsymbol{C}$.

Les intégrales orbitales de G sont les applications $g\to F(g, f)$ pour $f\in C_c(G)$.

On choisit une représentation fidèle χ de μ dans $\boldsymbol{C}$, et l'on considère l'ensemble $C_c(\tilde{G}, \chi)$ des fonctions $\tilde{f}\in C_c(\tilde{G})$ telles que $\tilde{f}(a\tilde{g})=\chi(a)\tilde{f}(\tilde{g})$ pour tout $a\in\mu$. Alors on pose

$$\tilde{F}(\tilde{g}, \tilde{f})=\begin{cases} 0 & \text{si } Z_{\tilde{G}}(\tilde{g})\neq\pi^{-1}Z_G(g) \\ d(g)\displaystyle\int_{Z_G(g)'\backslash G}\tilde{f}(\mathrm{Int}_{x^{-1}}\tilde{g})|\omega_g(x)| & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

On appelle l'application $\tilde{g}\to\tilde{F}(\tilde{g}, \tilde{f})$ une χ-intégrale orbitale de $\tilde{G}$.

1.i. On dit que g ou $\tilde{g}$ est *ordinaire* s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

— $Z_{\tilde{G}}(\tilde{g})=\pi^{-1}Z_G(g)$
— $[x, g]=1$ pour tout $x\in Z_G(g)$
— pour tout élément $a\in\mu|a\neq1$, les éléments $\tilde{g}$ et $a\tilde{g}$ n'appartiennent pas à la même classe de conjugaison
— il existe au moins une χ-intégrale orbitale de $\tilde{G}$ qui ne s'annule pas au point $\tilde{g}\in\tilde{G}$.

Il est facile de voir que l'une des propriétés suivantes implique que g est ordinaire :

— $Z_G(g)=Z_G(g^{\underline{m}})$ où $\underline{m}$ est l'ordre de μ.
— g est unipotent (écrire $g=\exp X$, où $X\in\underline{g}$).
— la partie semi-simple de g est ordinaire.

1.j. *Décomposition standard de la fermeture d'une orbite* (Borel [1], Serre [5]).

La fermeture $\bar{O}(g)$ de la classe de conjugaison dans G de g est une union disjointe de classes de conjugaison d'éléments su_i, de partie semi-simple s telle que :

— $\bar{O}(g)=\cup O(su_i)$, $i=1, \cdots, r$
— $su_1=s$
— pour tout q, $1\leqq q\leqq r$, $O_q=\cup O(su_i)$, $i=1, \cdots, q$, est fermé et $O(su_q)$ est ouvert dans O_q.

On démontrera en 3.1 que la décomposition en orbites de la fermeture $\bar{O}(\tilde{g})$ de la classe de conjugaison de $\tilde{g}$ dans $\tilde{G}$ est en bijection avec celle de $O(g)$: il existe des éléments $\widetilde{su}_i \in \tilde{G}$ relevant su_i, $i=1, \cdots, r$ tels que $\bar{O}(\tilde{g}) = \cup O(\widetilde{su}_i)$.

Soit A_s l'ensemble des éléments de G de partie semi-simple conjuguée à s. Cet ensemble est fermé, réunion disjointe d'un nombre fini d'orbites que l'on peut ranger de sorte que les conditions ci-dessus soient remplies. Une décomposition orbitale de ce type sera appelée standard.

1.k. Si $A_s = \cup O(su_i)$, $i=1, \cdots, m$ est une décomposition standard, il existe m intégrales orbitales $F_i = F(\cdot, f_i)$, $f_i \in C_c(G)$ telles que

— $F_i(su_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

— $\cup O(su_j)$ $\quad j=1 \cdots i-1$, ne rencontre pas le support de f_i si $i \geqq 2$.

1.l. Un élément g ou $\tilde{g}$ contenu dans une partie X de G ou $\tilde{G}$ est dit *régulier* dans cette partie si la dimension de sa classe de conjugaison est supérieure ou égale à celle des autres éléments de cette partie. On note $X^{\text{rég}}$ l'ensemble des éléments de X réguliers dans X, et l'on note $X^{\text{rég}}_{\text{ord}}$ l'ensemble des éléments de $X^{\text{rég}}$ qui sont ordinaires. Un élément régulier de G est seulement un élément dont la dimension de la classe de conjugaison est la plus grande possible.

1.m. Le *tore standard* associé à s est le centre T de $M = Z_G(s)^\circ$. Un tore standard de G est un tore standard associé à un élément semi-simple. Attention, l'adjectif standard est parfois utilisé pour désigner des tores différents. Un *couple standard* (T, u) est formé d'un tore standard T et d'un unipotent $u \in Z_G(T)$ commutant avec chaque élément de T.

1.n. Le théorème de cet article consiste à caractériser les intégrales orbitales par des propriétés de leurs restrictions aux parties Tu, où (T, u) est un couple standard.

THÉORÈME. A. *Pour tout couple standard (T, u), une intégrale orbitale F sur G vérifie les propriétés suivantes:*
— *la restriction de F à $Tu^{\text{rég}}$ est localement constante,*
— *la restriction de F à Tu est à support compact,*
— *pour tout $s \in T$, il existe un voisinage V_F de s dans T tel que pour $t \in V_F \cap T^{\text{rég}}$, l'on ait:*

$$F(tu) = \sum F(su_i) a^{Tu}_{su_i}(tu)$$

où la sommation porte sur les orbites $O(su_i)$ d'une décomposition orbitale standard de l'ensemble des éléments de partie semi-simple s, situés dans un voisinage assez petit de su, pour certaines fonctions $a_{su_i}^{Tu}$ définies sur $V_F u$. Les germes de ces fonctions au voisinage de su sont indépendants de F.

B. *Inversement, une fonction sur G, invariante par conjugaison, et vérifiant* A *avec les mêmes germes $a_{su_i}^{Tu}$ est une intégrale orbitale.*

C. *Pour tout couple standard (T, u), une χ-intégrale orbitale $\tilde{F}$ sur $\tilde{G}$ vérifie les propriétés suivantes: soit $\widetilde{Tu}=\pi^{-1}Tu$,*
— la restriction de F à $\widetilde{Tu}_{\text{ord}}^{\text{rég}}$ est localement constante,
— la restriction de F à $\widetilde{Tu}$ est à support compact,
— pour tout $\tilde{s}\in\tilde{T}$, dans un voisinage $\tilde{V}_{\tilde{F}}$ de $\tilde{s}$ dans $\tilde{T}$, on a sur $\widetilde{V_{\tilde{F}}u}\cap\widetilde{Tu}_{\text{ord}}^{\text{rég}}$

$$\tilde{F}=\sum\tilde{F}(\widetilde{su}_i)a_{su_i}^{Tu}\circ\pi$$

la sommation portant sur la partie ordinaire de l'ensemble décrit en A, *ou encore sur les classes de conjugaison ordinaires $O(\widetilde{su}_i)$ des éléments de $\tilde{G}$ de partie semi-simple s situés dans un voisinage assez petit de $\widetilde{su}$, et telles que $\pi(\widetilde{su}_i)=su_i$.*

D. *Inversement, une fonction $\tilde{F}$ sur $\tilde{G}$ invariante par cojugaison, vérifiant $\tilde{F}(a\tilde{g})=\chi(a)\tilde{F}(\tilde{g})$ pour tout $a\in\mu$, et les propriétés C est une χ-intégrale orbitale de $\tilde{G}$.*

La démonstration de ce théorème repose sur des idées dûes essentiellement à Harish-Chandra (10). La partie A est la généralisation de propriétés bien connues pour les tores maximaux (Shalika [17], Rogawski [15]). La partie B était connue pour $GL(2)$ (Langlands [13]) et $GL(3)$ (Flath [8]). Notre démonstration est une généralisation de celle de Flath. Les parties C et D concernant les groupes métaplectiques a été démontrée par Flicker pour $\widetilde{GL}(2)$. On remarquera que les fonctions $a_{su_i}^{Tu}$ peuvent être choisies égales à F_i, comme en 1.k.

1.o. *Compléments.*

1) *Homogénéité.*

Au voisinage de 1, les germes vérifient la relation d'homogénéité

$$a_u(g^m)=|m|^{(\dim g-\dim u)/2}a_u(g)$$

où u est unipotent, $\dim g$ est la dimension de l'orbite de g, $m\geqq 1$ est le carré d'un élément entier de k, et g, $g^m\in G$ ont le même centralisateur. (Voir Rogawski (g semi-simple régulier) [15]).

2) *Réduction.*

Si (T, u) est un couple standard les restrictions à $(Tu)^{\text{rég}}$ des intégrales orbitales de G s'écrivent aussi comme les restrictions à $(Tu)^{\text{rég}}$ d'intégrales orbitales de la composante réductive d'un groupe parabolique minimal contenant T. En utilisant la réduction par produit, ceci permet de montrer que si T est déployé, les intégrales orbitales sur $(Tu)^{\text{rég}}$ se prolongent en des fonctions localement constantes sur Tu.

3) *Généralisation à $C_c(G, \omega)$.*

Soit Z le centre de G, et ω un caractère de Z à valeurs complexes. Soit $C_c(G, \omega)$ l'ensemble des fonctions localement constantes sur G, à valeurs complexes, à support compact modulo Z, et vérifiant l'équation fonctionnelle:

$$f(zg)=\omega(z)f(g), \qquad z\in Z,\ g\in G.$$

La démonstration du théorème s'étend facilement et donne une caractérisation des intégrales orbitales des fonctions de $C_c(G, \omega)$:

A_ω. Pour tout couple standard (T, u), l'intégrale orbitale F d'une fonction $f\in C_c(G, \omega)$ vérifie les propriétés suivantes:
— la restriction de F à $Tu^{\text{rég}}$ est localement constante,
— la restriction de F à Tu est à support compact modulo Z,
— pour $s\in T$, il existe un voisinage V_F de s dans T, tel que si $t\in T^{\text{rég}}$

$$F(tu)=\sum F(su_i)a_{su_i}^{Tu}(tu)$$

la somme porte sur les orbites des éléments de partie semi-simple s situés dans un petit voisinage de su, les germes des fonctions $a_{su_i}^{Tu}$ définies au voisinage de su sont les mêmes qu'en A.

B_ω. Inversement, une fonction G-invariante, vérifiant l'équation fonctionnelle et A_ω, avec les mêmes germes est l'intégrale orbitale d'une fonction $f\in C_c(G, \omega)$.

4) *Version pour les intégrales orbitales nulles sur les éléments non-elliptiques.*

Elle se déduit du théorème et d'un résultat tout récent de Rogawski (Compositio Mathematica Vol. 42, 1981). Les intégrales orbitales non normalisées

$$\Phi(g, f)=d(g)^{-1}F(g, f)$$

vérifient le théorème, les germes différent des germes précédents de façon évidente. Rogawski montre que si T/Z est compact, le germe a_s^T pour Φ est constant, indépendant de T. On en déduit:

COROLLAIRE. *On a une bijection $\Phi\to\Phi'$ entre les intégrales orbitales non* *normalisées Φ nulles sur les éléments non-elliptiques, des fonctions $f \in C_c(G, \omega)$, et les fonctions Φ' nulles sur les éléments non-elliptiques, G-invariantes, vérifiant l'équation fonctionnelle, dont la restriction à tout tore de Cartan elliptique est localement constante, uniquement déterminée par la condition*:

$$\Phi(g)=\Phi'(g), \qquad g \in G \text{ régulier.}$$

(*Un élément est elliptique s'il appartient à un tore elliptique T, c'est-à-dire tel que T/Z soit compact.*)

Je voudrais remercier John Rogawski pour des discussions et suggestions qui m'ont aidée à écrire cet article.

2. Ce paragraphe est consacré à la démonstration des parties A, B du théorème 1.n.

2.1. *Une application de l'unicité des mesures de Haar.*

Si X est une G-variété analytique, on note $C_0(X)$ le sous-espace vectoriel de $C_c(X)$ engendré par les fonctions de la forme $g \cdot f - f$, où $f \in C_c(X)$, $g \in G$, et $g \cdot f(g \cdot x) = f(x)$.

Proposition. *Soit A_s l'ensemble des éléments $g \in G$ de partie semi-simple conjuguée à s. Si l'intégrale orbitale $F(g, f)$ d'une fonction $f \in C_c(G)$ est nulle sur A_s, il existe une fonction $\phi \in C_0(G)$ telle que $f=\phi$ sur A_s.*

La preuve utilise:
— la décomposition orbitale standard 1.k,
— l'unicité d'une mesure G-invariante sur $O(g)$ à facteur constant multiplicatif près équivalente à: $C_0(O(g))$ est de codimension 1 dans $C_c(O(g))$,
— le lemme topologique élémentaire suivant.

2.2. Lemme. *Soit A un espace topologique localement compact et totalement discontinu* (Cartier [7]), *et B une partie non vide de A localement fermée. Soit $C_c(A, F)$ l'ensemble des fonctions $f \in C_c(A)$ nulles sur $F=\bar{B}\backslash B$. Alors la restriction induit une application surjective*: $C_c(A, F) \to C_c(B)$.

2.3. La démonstration de la proposition 2.1 se fait par récurrence.

Comme $F(f, s)=0$ et $O(s)$ est fermé, c.f. 1.j, la restriction de f à $O(s)$ appartient à $C_c(O(s))$ et il existe un nombre fini de couples $(g, h) \in G_\times C_c(O(s))$ tels que

$$f=\sum g \cdot h - h \qquad \text{sur } O(s).$$

Le lemme permet de prolonger h en une fonction appartenant à $C_c(G)$, soit $\bar{h}$.

On considère $f_1=f-\sum g\cdot\bar{h}-\bar{h}$. Cette fonction vérifie:

a) f_1 est nulle sur $O(s)$,

b) $F(g, f_1)=0$, pour tout $g\in A_s$.

Comme $O(s)$ est la frontière de $A_2=O(s)\cup O(su_2)$, la restriction de f_1 à $O(su_2)$ appartient à $C_c(O(su_2))$, et il existe un nombre fini de couples $(g, h)\in G_\times C_c(O(su_2))$ tels que

$$f_1=\sum g\cdot h-h \qquad \text{sur } O(su_2),$$

le lemme permet de prolonger h en une fonction $\bar{h}\in C_c(G, O(s))$. On considère $f_2=f_1-\sum g\cdot\bar{h}-\bar{h}$. Cette fonction vérifie

a) f_2 est nulle sur A_2,

b) $F(g, f_2)=0$ pour tout $g\in A_s$.

En procédant ainsi à chaque pas, on en déduit qu'il existe une fonction $\phi\in C_0(G)$ telle que $f=\phi$ sur A_s.

2.4. *Développement en germes des intégrales orbitales si $G=GL(n)$.*

Si $G=GL(n, k)$, $n\geqq 1$, le polynôme caractéristique permet de définir une application continue de G sur k^n, disons P, et l'image inverse de $P(s)$ pour s semi-simple, est égale à l'ensemble A_s des éléments de G de partie semi-simple conjuguée à s.

LEMME. *Si $G=GL(n, k)$ et si $f\in C_c(G)$ est nulle sur A_s, il existe un voisinage ouvert, G-invariant et à engendrement compact V_f de s, dépendant de f, sur lequel f est nulle.*

PREUVE. L'image $P(\text{supp.} f)$ du support de f par l'application continue P est compacte. Dans l'espace séparé k^n, il existe un voisinage ouvert C de $P(s)$ ne rencontrant pas $P(\text{supp.} f)$. L'image inverse de C est ouverte et contient s, donc un voisinage ouvert sK compact de s. Comme $P(sK)\subset C$, on en déduit que $\cup gsKg^{-1}$, $g\in G$ ne rencontre pas supp. f.

COROLLAIRE. *Si $G=GL(n, k)$, et si $f\in C_c(G)$, pour tout s semi-simple appartenant à G, il existe un voisinage de s, dépendant de f, noté V_f, tel que si $g\in V_f$ on a:*

$$F(g, f)=\sum_{i=1}^{m} F(g, f_i)F(su_i, f)$$

si $A_s=\cup O(su_i)$, $i=1, \cdots, m$ est la décomposition en orbites de A_s et si f_i, $i=$

$1, \cdots, m$ *sont les fonctions de* $C_c(G)$ *vérifiant l. k.*

PREUVE. Les intégrales orbitales de la fonction

$$f - \sum_{i=1}^{m} F(su_i, f) f_i$$

sont nulles pour tout $g \in A_s$. Elle est donc égale à une fonction $\phi \in C_0(G)$ sur un voisinage ouvert, G-invariant à engendrement compact de s, dépendant de f, d'après le lemme précédent et la proposition 2.1.

DÉFINITION. La formule du corollaire s'appelle le développement en germes de l'intégrale orbitale de f au voisinage de s.

2.5. $G \neq GL(n, k)$.

1) *le cas* $s=1$.

Il se traite comme précédemment. On plonge G dans $GL(n, k)$, $n \geqq 1$. Le polynôme caractéristique est une application continue de G dans k^n. L'image inverse de $P(1)$ est l'ensemble A_1 des unipotents. On en déduit les développements en germes des intégrales orbitales au voisinage de l'unité : si $f \in C_c(G)$ dans un voisinage V_f de l'unité

$$F(g, f) = \sum_{i=1}^{m} F(g, f_i) F(u_i, f)$$

où $A_1 = \cup O(u_i)$, $i=1, \cdots, m$, est la décomposition en orbites de l'ensemble des unipotents de G, et les fonctions f_i, $i=1, \cdots, m$, vérifient 1.k.

2) *Réduction à* $s=1$.

a) *Si s appartient au centre,* en utilisant que l'opération de G par translation à gauche sur lui-même induit par transport de structure un isomorphisme de $C_c(G)$

$$^s f(sg) = f(g) \qquad g \in G,\ f \in C_c(G),\ s \in Z$$

et que

$$F(g, f) = F(sg, {}^s f)$$

on déduit que dans un voisinage sV_f de s on a

$$F(g, f) = \sum F(s^{-1}g, f_i) F(su_i, f)$$

où les fonctions f_i sont comme en 1). On a $F(s^{-1}g, f_i) = F(g, {}^s f_i)$ et les fonctions ${}^s f_i$, $i=1, \cdots, m$, vérifient 1.k.

b) *Réduction à* $M = Z_G(s)^{\circ}$.

On se ramène à s appartenant au centre, en remplaçant au voisinage de s une intégrale dans G par une intégrale orbitale dans le groupe réductif M. Ceci s'effectue grâce au lemme suivant :

LEMME. *Soit s un élément semi-simple, T un tore contenant s et u un unipotent commutant avec T. Il existe un voisinage V de s dans T, tel que pour toute partie compacte $K'\subset G$ on puisse choisir une partie compacte $C\subset M\backslash G$ telle que*

$$g^{-1}Vu\, g\cap K'=\varnothing$$

si l'image de g dans $M\backslash G$ n'appartient pas à C.

PREUVE. Harish-Chandra [10] p. 52. La démonstration d'Harish-Chandra donnée pour $u=1$ et pour T remplacé par un sous-groupe de Cartan contenant s s'étend sans difficultés.

Ce lemme est utilisé pour construire une fonction $f_s\in C_c(M)$ de sorte que l'intégrale orbitale de f_s dans M soit égale à celle de f dans G, dans un voisinage de su dans Tu, pour un choix cohérent des mesures orbitales dans M. On procède ainsi (Rogawski [15]) :

On choisit C correspondant à $K'=\mathrm{supp}.f$. Comme $M\backslash G$ est localement compact, on peut supposer C ouvert et compact. On choisit $h\in C_c(G)$ tel que l'intégrale

$$\bar{h}(g)=\int_M h(xg)dm(x)$$

calculée pour la mesure de Haar canonique m sur M soit égale à la fonction caractéristique de $M\backslash C$. On définit alors $f_s\in C_c(M)$ comme l'intégrale

$$f_s(g)=\int_G h(x)f(x^{-1}gx)dm_G(x)$$

calculée pour la mesure de Haar canonique m_G sur G. On en déduit pour $g\in Vu$, $\Phi_G(g, f)=\Phi_M(g, f_s)$ car :

$$\begin{aligned}\Phi_G(g, f)&=\int_{Z_G(g)'\backslash G} f(x^{-1}gx)\, \underset{Z\backslash G}{dm}(x)\\ &=\int_{M\backslash G}\int_{Z_G(g)'\backslash M}\bar{h}(x)f(x^{-1}y^{-1}gyx)\, \underset{M\backslash G}{dm}(x)\, \underset{Z\backslash M}{dm}(y)\\ &=\int_G\int_{Z_G(g)'\backslash M}h(x)f(x^{-1}y^{-1}gyx)\, \underset{G}{dm}(x)\, \underset{Z\backslash M}{dm}(y)\\ &=\int_{Z_G(g)'\backslash M}f_s(y^{-1}gy)\, \underset{Z\backslash M}{dm}(y)=I_M(g, f_s)\end{aligned}$$

où $\underset{X}{dm}(x)$ dénote la mesure canonique sur X, et $Z=Z_G(g)'$. Pour $g\in Vu$, on a donc :

$$F_G(g, f)=d_G(g)\Phi_G(g, f)=\frac{d_G(g)}{d_M(g)}F_M(g, f_s).$$

Application :

On applique à s et à M les résultats précédents : si $A_{s,M}=\cup O(su_i)$ est la décomposition orbitale dans M des éléments de partie semi-simple conjuguée à s, et $f_{s,i}\in C_c(M)$ des fonctions vérifiant 1.k, pour $g\in M$ assez proche de s

$$F_M(g, f_s)=\sum F_M(g, f_{s,i})F_M(su_i, f_s).$$

On remarque que u possède un conjugué aussi proche de 1 qu'on le souhaite. On remarque que pour u, u' unipotents appartenant à M, su et su' sont conjugués dans M si et seulement s'ils sont conjugués dans G, et dans G :

$$A_s=\cup O(su_i)$$

avec les mêmes u_i que plus haut. On peut supposer que

$$f_{s,i}=f_i\frac{d_G(su_i)}{d_M(su_i)}$$

où $f_i\in C_c(G)$ vérifient 1.k. On en déduit pour g dans un voisinage de su dans Tu :

$$F_G(g, f)=\sum F_G(g, f_i)F_G(su_i, f).$$

L'analogue du corollaire 2.4, est dans le cas général :

PROPOSITION. *Soit $f\in C_c(G)$. Pour tout $s\in G$ semi-simple, tout tore T contenant s, tout unipotent $u\in Z_G(T)$, il existe un voisinage V_f de s dans T tel que pour $g\in Vu$*

$$F(g, f)=\sum F(g, f_i)F(su_i, f)$$

les f_i étant choisis comme en l. k et $A_s=\bigcup_{i=1}^{m} O(su_i)$ est la décomposition orbitale des éléments de partie semi-simple conjuguée à s.

2.6. *Notations.* Soit $M=Z_G(s)^\circ$ et T le centre de M. Si $u\in M$ est unipotent, on considère $W(Tu)$, $N(Tu)$, $Z(Tu)$ respectivement le groupe de Weyl, le normalisateur, le centralisateur de Tu dans G :

$$W(Tu)=N(Tu)/Z(Tu),$$

$$N(Tu)=\{x\in G,\ xTux^{-1}=Tu\},$$

$$Z(Tu)=\{x\in G,\ \forall t\in T,\ xtux^{-1}=tu\}.$$

Le groupe de Weyl $W(Tu)$ s'injecte naturellement dans celui $W(T)$ de T, et s'interprète comme l'ensemble des automorphismes intérieurs de G stabilisant Tu.

Le groupe $W(T)$ opère à gauche continuement sur $T\times Z(T)\backslash G$:

$$w\cdot(t,\, g)=(n_w t n_w^{-1},\, n_w g)\,,\quad t\in T,\ g\in G,\ w\in W(T),\ w=Z(T)n_w,\ n_w\in N(T).$$

On note $O(T^{\text{rég}}u)$ l'orbite de $T^{\text{rég}}u$ dans G.

2.7. LEMME. *L'application* $(t,\, g)\to g^{-1}tug$ *induit un homéomorphisme canonique*

$$W(Tu)\backslash(T^{\text{rég}}\times Z(Tu)\backslash G)\longrightarrow O(T^{\text{rég}}u)\,.$$

PREUVE. On vérifie facilement que c'est une bijection et un homéomorphisme local. Comme $W(Tu)$ est fini, c'est donc un homéomorphisme.

Ce lemme a plusieurs conséquences utiles :

— si $f\in C_c(G)$ la restriction à $T^{\text{rég}}u$ de $F(g,\, f)$ est une fonction localement constante,

— si $f'\in C_c(T^{\text{rég}})$ est invariante par $W(Tu)$, il existe une fonction $f\in C_c(O(T^{\text{rég}}u))$ telle que $f'(x)=F(xu,\, f)$ si $x\in T^{\text{rég}}$.

La partie A du théorème 1.n résulte alors de ceci, ainsi que 2.4, 2.5.

2.8. *Démonstration du théorème de caractérisation* (partie B de 1.n).

Le nombre de classes de conjugaison de Tu, où $(T,\, u)$ est un couple standard 1.m est fini.

Il existe une numérotation $(Tu)_i$, $i=1, \cdots, N$, d'un système de représentants des Tu telle que pour tout i

— $X_i=\cup O((Tu)_j)$, $j=1, \cdots, i$, est fermé dans G,

— $O((T^{\text{rég}}u)_i)$ est ouvert dans X_i.

Procédé de rangement :

— pour T fixé, on range les Tu selon l'ordre croissant des dimensions des orbites $O(Tu)$. Donc, $\dim(O(Tu_1))<\dim(O(Tu_2))$ implique que Tu_1 précède Tu_2. On obtient une suite finie $S(T)$.

— on range les suites $S(T)$ de sorte que $S(T_1)$ précède $S(T_2)$ si $T_1\subset T_2$.

On remarque que le premier terme est $S(Z)$, si Z est le centre de G. On a aussi :

$$X_i=X_{i-1}\cup O((T^{\text{rég}}u)_i)\,,\qquad i=2, \cdots, N\,.$$

3) On construit f de proche en proche en utilisant les lemmes 2.2, 2.7 et la partie A du théorème 1.n.

— *départ*: $F|_Z \in C_c(Z)$, (2.2)

Il existe $f \in C_c(Z)$ tel que $F(x)=F(f, x)$ si $x \in Z$, (2.7)

f se prolonge en $f_0 \in C_c(G)$. (2.2)

On considère alors $F_1=F-F(\cdot, f_0)$ vérifiant toujours A mais en plus

$$F_1|_Z=0.$$

— *hypothèse de récurrence*: soit $1 \leqq n<N$, et F_n vérifiant A et en plus

$$F_n|_{X_n}=0.$$

— *passage au cran suivant*: $F_n|_{(T^{\text{rég}}u)_{n+1}} \in C_c((T^{\text{rég}}u)_{n+1})$ (A)
est aussi $W((Tu)_{n+1})$ invariant.

Il existe $f \in C_c(O(T^{\text{rég}}u)_{n+1})$ tel que $F_n(x)=F(x, f)$ si $x \in (T^{\text{rég}}u)_{n+1}$ (2.7)

f se prolonge en $f_n \in C_c(G, X_n)$, (2.2)

nulle sur X_n. On considère alors $F_{n+1}=F_n-F(\cdot, f_n)$ vérifiant toujours A mais en plus

$$F_{n+1}|_{X_{n+1}}=0.$$

3. Ce paragraphe est consacré à l'étude des intégrales orbitales de $\tilde{G}$, et à la démonstration des parties C, D de 1.n.

3.1. *Décomposition orbitale standard dans* $\tilde{G}$.

Nous allons démontrer la propriété annoncée en 1.j. Il suffit de montrer que $\bar{O}(\tilde{g})$ ne contient pas deux orbites différentes relevant $O(su_i) \subset \bar{O}(g)$. On choisit un système fondamental de voisinages de l'unité de G formé de sous-groupes ouverts compacts K_ν de G emboîtés $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$. On suppose que la suite

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \pi^{-1}(K_1) \underset{s}{\overset{\pi'}{\rightleftarrows}} K_1 \longrightarrow 1$$

admet une section s. On note $\tilde{K}_\nu=s(K_\nu)$, le relèvement de K_ν dans $\tilde{G}$ donné par la section. Pour $\nu \geqq 1$ fixé, on définie une suite d'ensembles ouverts emboîtés:

$$X(\nu', \nu)=\{x \in \tilde{G},\ x\tilde{K}_{\nu'}x^{-1} \subset \tilde{K}_\nu\},$$

dont la réunion est égale à $\tilde{G}$. Toute partie compacte est contenue dans un ensemble $X(\nu', \nu)$.

Un point $x \in O(\tilde{g})$ possède un système fondamental de voisinages ouverts compacts, que l'on peut supposer être les traces dans $O(\tilde{g})$ d'un système fondamental de voisinages ouverts compacts de x dans G. Il existe une suite croissante d'indices ν tels que les ouverts de $O(\tilde{g})$

$$x\pi^{-1}(K_\nu)\cap O(\tilde{g})$$

soient compacts. On choisit une telle suite.

a) Supposons que x, xa appartiennent à $\bar{O}(\tilde{g})$ où $a\in\mu$, montrons que $xa\in\bar{O}(x)$. Il existe un compact $C_\nu\subset\tilde{G}$ tel que

$$y\tilde{g}y^{-1}\in x\pi^{-1}(K_\nu)$$

implique $y\in Z_{\tilde{G}}(\tilde{g})C_\nu$. On peut supposer C_ν invariant par l'application continue $x\to x^{-1}$, et $C_\nu\subset X(\nu', \nu)$ pour un entier $\nu'\geqq\nu$. Par hypothèse, il existe y et $y'\in C_{\nu'}$ tels que

$$y\tilde{g}y^{-1}\in x\tilde{K}_{\nu'} \qquad y'\tilde{g}y'^{-1}\in xa\tilde{K}_{\nu'}\,.$$

Posons $z=y'y^{-1}$, alors

$$xa\in zy\tilde{g}y^{-1}z^{-1}\tilde{K}_\nu\subset zxz^{-1}z\tilde{K}_{\nu'}z^{-1}\tilde{K}_{\nu'}\,.$$

Comme $z\in C_{\nu'}$, mais aussi à $C_\nu\subset X(\nu', \nu)$, on a $z\tilde{K}_{\nu'}z^{-1}\subset\tilde{K}_\nu$ donc pour tout ν, on a trouvé $z\in\tilde{G}$ tel que

$$xa\in zxz^{-1}\tilde{K}_\nu\,.$$

b) Montrons que $O(xa)=O(x)$.

Pour ν_0 donné il existe ν' tel que $gxg^{-1}\in x\tilde{K}_{\nu_0}$, pour tout $g\in\tilde{K}_{\nu'}$. Si ν' est fixé comme ci-dessus, il existe ν tel que la relation $xa\in zxz^{-1}\tilde{K}_\nu$ implique $z\in\pi^{-1}(Z_G(\pi(x))\tilde{K}_{\nu'})$, d'où:

$$zxz^{-1}\in xb\tilde{K}_{\nu_0}\,, \qquad b\in\mu(k),\ O(xb)=O(x)\,.$$

On en déduit $xa\in xb\tilde{K}_{\nu_0}$ ce qui implique $a=b$.

3.2. Soit A un espace topologique localement compact et totalement discontinu. On suppose que Z est un groupe fini opérant continuement à gauche sur A. Pour tout caractère fidèle $\chi: Z\to \boldsymbol{C}$ et toute partie $F\subset A$, on note $C_c(A, F, \chi)$ ou $C_c(A, \chi)$ si $F=\varnothing$, l'ensemble des fonctions sur A localement constantes, à support compact, nulles sur F, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ telles que pour tout $z\in Z$, tout $a\in A$

$$f(za)=\chi(z)f(a)\,.$$

Soit K un ouvert compact de A tel que pour tout $z\in Z$, $zK\cap K=\varnothing$. La fonction $f_K\in C_c(A, \chi)$ définie par

$$f_K(x)=\begin{cases}\chi(z)\,, & x\in zK\\ 0\quad , & \text{sinon}\end{cases}$$

est appelée une *fonction χ-caractéristique.* Les fonctions χ-caractéristiques engendrent $C_c(A, \chi)$.

En raisonnant comme pour le lemme 2.2, on montre facilement que pour toute partie $B \subset A$ localement fermée, et $F = \bar{B} \backslash B$, on a :

LEMME. *L'application restriction*: $C_c(A, F, \chi) \to C_c(B, \chi)$ *est bien définie et surjective.*

Soit B l'ensemble des éléments de $\bar{O}(\tilde{g})$ pour un élément $\tilde{g} \in \tilde{G}$. L'unicité d'une mesure G-invariante sur B montre que

$$[C_c(B, \chi) : C_0(B, \chi)] \leqq 1$$

où $C_0(B, \chi)$ est engendrée par les éléments $x \to \phi(g^{-1}x) - \phi(x)$, $g \in G$, $\phi \in C_c(B, \chi)$. Le lemme précédent implique alors, cf. 2.3 :

PROPOSITION. *Si l'intégrale orbitale* $F(\tilde{x}, \tilde{f})$ *d'une fonction* $\tilde{f} \in C_c(\tilde{G}, \chi)$ *est nulle pour tout* $\tilde{x} \in \bar{O}(\tilde{g})$, *alors il existe une fonction* $\tilde{\phi} \in C_0(\tilde{G}, \chi)$ *telle que* $\tilde{f} = \tilde{\phi}$ *sur* $O(\tilde{g})$.

3.3. La démonstration du théorème pour G s'étend bien à $\tilde{G}$. On utilise le lemme 3.2, la décomposition orbitale standard 3.1 ainsi que les remarques suivantes généralisant 1.k et 2.7.

— par définition des mesures orbitales canoniques normalisées, pour $\tilde{g} \in \tilde{G}_{\mathrm{ord}}$ et $f \in C_c(G)$, on a $F(\tilde{g}, f\pi) = F(\pi(\tilde{g}), f)$. Donc pour su_i, su_j ordinaires,

$$F(\widetilde{su}_j, f_i\pi) = F(su_j, f_i) = \delta_{i,j}.$$

— soit T' l'ensemble des éléments de T tels que $T'u = Tu^{\text{rég}}_{\text{ord}}$ et $\tilde{T}' = \pi^{-1}T'$. L'application $(t, g) \to g^{-1}tug$ induit un homéomorphisme :

$$W(Tu) \backslash (\tilde{T}' \times \tilde{Z}(Tu) \backslash \tilde{G}) \longrightarrow O(\widetilde{T'u}).$$

On en déduit que l'application $\tilde{f} \to F(\cdot, \tilde{f})$ de $C_c(O(\widetilde{T'u}), \chi)$ dans $W(Tu) \backslash C_c(\tilde{T}', \chi)$ est surjective.

On en déduit comme dans le § 2 les parties C, D du théorème 1.n.

4. *Compléments.*

On ne sait pas malheureusement calculer les germes figurant dans les développements en germes (1.n.A), c.f. Rogawski pour des conjectures. Voici la démonstration de la propriété d'homogénéité (1. o. 1) généralisant une démonstration de Rogawski. Nous ne démontrerons pas la propriété de réduction et son corollaire aux germes des tores déployés. La preuve se fait comme dans Kottwitz ([12] cas de $GL(n)$).

4.1. *Homogénéité.*

Les propriétés standard des applications exponentielles dans les groupes de Lie sur un corps ultramétrique montrent que pour X appartenant à un voisinage ouvert compact de O dans $\underset{=}{g}$, contenant les éléments nilpotents, dépendant du choix de $t\in k^*$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & tX \\ \downarrow & & \downarrow \\ x=\exp X & \longrightarrow & x^t=\exp tX \end{array}$$

qui commute avec l'action du groupe adjoint de $G: (gxg^{-1})^t=gx^tg^{-1}$. Les homomorphismes sont des isomorphismes de variétés analytiques. Soit G_t' le voisinage ouvert compact de 1 dans G engendrée par les éléments x. Pour $f\in C_c(G_t')$, on définit $f^t\in C_c(G)$ par:

$$f^t(x^t)=\begin{cases} f(x) & x\in G_t' \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Applications: 1) *Pour $x\in G_t'$ tel que x et x^t ont même centralisateur, on a*

$$F(x^t, f^t)=|t|^{(\dim x)/2}F(x, f)$$

où $\dim x$ *est la dimension de l'orbite de x.*

En effet, d'après 3.C si $x=su$ est la décomposition de Jordan de x

$$d(x^t)=|t|^{(\dim s)/2}d(x)$$

$$|\omega_{x^t}(g)|=|t|^{(\dim_M u)/2}|\omega_x(g)| \qquad \text{si } M=Z_G(s)^\circ .$$

Comme $\dim(x)=\dim(s)+\dim_M(u)$

$$F(x^t, f^t)=d(x^t)\int f(g^{-1}xg)|\omega_{x^t}(g)|=|t|^{(\dim x)/2}d(x)\int f(g^{-1}xg)|\omega_x(g)| .$$

2) *Au voisinage de l'unité on a un développement*

$$F(x, f)=\sum_u a_u(x)F(u, f)$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison unipotentes. Alors

$$a_{u^t}(x^t)=|t|^{(\dim x-\dim u)/2}a_u(x) .$$

En effet, on écrit le développement pour f^t et x^t et l'on applique 1):

$$F(x^t, f^t)=\sum a_u(x^t)F(u, f^t)=\sum a_{u^t}(x^t)F(u^t, f^t)$$

$$|t|^{(\dim x)/2}F(x, f)=\sum a_{u^t}(x^t)|t|^{(\dim u)/2}F(u, f) .$$

On en déduit la relation précédente pour $a_{u^t}(x^t)$. On remarque que si $t \in (k^\times)^2$ alors u^t et u sont conjugués et l'on a :

$$a_u(x^t) = |t|^{(\dim x - \dim u)/2} a_u(x) .$$

Bibliographie

[1] Borel, A., Linear Algebraic Groups, W. A. Benjamin, Inc., New-York, Amsterdam, 1968.

[2] Bourbaki, N., Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats, chapitre 8 à 15, Hermann, Paris, 1971.

[3] Bourbaki, N., Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats, chapitre 1 à 7, Hermann, Paris, 1967.

[4] Bourbaki, N., Groupes et Algèbres de Lie—chapitre 7 et 8, Hermann, Paris, 1975.

[5] Bourbaki, N., Groupes et Algèbres de Lie—chapitre 2 et 3, Hermann, Paris, 1972.

[6] Bourbaki, N. Intégration—chapitre 7 et 8, Hermann, Paris, 1963.

[7] Cartier, P., Représentations of p-adic groups, A survey. Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1979, pp. 111-156.

[8] Flath, D. E., A comparison of the automorphic representations of $GL(3)$ and its twisted forms, Ph. D. Thesis, Harvard University, 1977.

[9] Flicker, Y., Automorphic forms on covering groups of $GL(2)$, Invent. Math. **57** (1980), 119-182.

[10] Harish-Chandra, Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups, Lecture Notes in Math. 162, Springer-Verlag, 1970.

[11] Humphreys, J., Linear Algebraic Groups, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1975.

[12] Kottwitz, R. E., Orbital integrals on $GL(3)$, Amer. J. Math. **102** (1980), 327-384.

[13] Langlands, R. P., Base change for $GL(2)$, Institute for Advanced Study, 1975.

[14] Rao, R. R., Integrals in reductive groups, Ann. of Math. **96** (1972), 505-510.

[15] Rogawski, J., Applications of the building to orbital integrals, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1980.

[16] Serre, J.-P., Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Math. 5, Springer-Verlag, 1965.

[17] Shalika, J. A., A theorem on semi-simple $\mathcal{P}$-adic groups, Ann. of Math. **95** (1972), 226-242.

[18] Springer, T. A. and R. Steinberg, Conjugacy classes, Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Math. 131, Springer-Verlag, 1970.

[19] Tits, J., Reductive Groups over Local Fields, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 33, part 1, (1979), pp. 29-69.

[20] Weil, A., Adeles and Algebraic Groups, The Institute for Advanced Study, 1961.

(Reçu le 26 juin, 1981)

Ecole Normale Supérieure
Mathématiques
1, rue Maurice Arnoux
92120 MONTROUGE
France