Une remarque sur l'opérateur gradient

Par Hiroko MORIMOTO

(Présenté par H. Fujita)

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit Ω un ouvert borné et localement étoilé de R^N de frontière localement lipschitzienne. Soient $m=0, 1, 2, \cdots$, et $1<p<+\infty$.*

Si une distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a ses dérivées $D_i f$ dans $W^{-m-1,p}(\Omega)$ pour $i=1, \cdots, N$, alors f est dans $W^{-m,p}(\Omega)$ et on a l'inégalité

$$|f|_{W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}} \leqq C \sum_{i=1}^{N} |D_i f|_{W^{-m-1,p}(\Omega)}$$

avec la constante C indépendante de f.

Notations. $W^{-m,p}(\Omega)$ est l'espace dual de $\mathring{W}^{m,q}(\Omega)$, $1/p+1/q=1$. C'est un espace de Banach pour la norme:

$$|f|_{W^{-m,p}(\Omega)} = \sup\{|\langle f, g\rangle| \,;\, g \in \mathring{W}^{m,q}(\Omega),\ |g|_{W^{m,p}(\Omega)}=1\}.$$

Si $m=0$, $W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$.
$W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}$ est l'espace quotient de $W^{-m,p}(\Omega)$ par l'espace de nombres réels $\mathcal{R}$. C'est un espace de Banach pour la norme:

$$(1) \qquad |f|_{W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}} = \inf_{C \in \mathcal{R}} |f+C|_{W^{-m,p}(\Omega)}.$$

On a les propriétés suivantes:

$$(2) \qquad |f|_{W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}} \leqq |f|_{W^{-m,p}(\Omega)}$$

$$f \equiv \text{const.} \Rightarrow |f|_{W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}}=0$$

$$f \in W^{-m,p}(\Omega) \Rightarrow f \in W^{-m-1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad |f|_{W^{-m-1,p}(\Omega)} \leqq |f|_{W^{-m,p}(\Omega)}.$$

REMARQUE. Pour $p=2$, $m=0$, le résultat est connu. Voir Temam [2] Proposition 1.2, p. 14, où l'esquisse de la démonstration est donnée. Nous suivons la même voie.

D'abord nous précisons le terme "localement étoilé". Soit $x \in R^N$ et $\lambda>0$.

On désigne par σ_λ la transformation homothétique $x \mapsto \lambda x$:

$$\sigma_\lambda(x)=\lambda x .$$

DÉFINITION. On dit qu'un ouvert borné Ω de R^N est localement étoilé s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_k$ de $\bar{\Omega}$ tel que

$$\mathcal{O}_0 \subset \bar{\mathcal{O}}_0 \subset \Omega$$

$$\mathcal{O}_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset , \qquad i=1, \cdots, k$$

et

$$\sigma_{1/\lambda}(\mathcal{O}_i \cap \Omega) \Subset \mathcal{O}_i \cap \Omega \Subset \sigma_\lambda(\mathcal{O}_i \cap \Omega) \qquad (\lambda>1)$$

où σ_λ est une transformation homothétique par rapport à un point de $\mathcal{O}_i \cap \Omega$, $i=1, \cdots, k$.

Pour Ω satisfaisant à la condition du théorème, on peut supposer que la frontière de $\mathcal{O}_i$ est localement lipschitzienne, $i=1, \cdots, k$.

Grâce au résultat de Nečas [1], on a la proposition suivante, que l'on admet pour l'instant :

PROPOSITION. *Soit Ω un ouvert borné de R^N, de frontière lipschitzienne. Si f et ses dérivées $D_i f$, $i=1, \cdots, N$, sont dans $W^{-m-1,p}(\Omega)$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$|f|_{W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}} \leqq C \sum_{i=1}^{N} |D_i f|_{W^{-m-1,p}(\Omega)} \tag{3}$$

où la constante C ne dépend pas de f.

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin de quelques propriétés de l'opérateur σ_λ.

Soit f une fonction quelconque définie sur R^N. L'opérateur défini par

$$(\sigma_\lambda \circ f)(x)=f(\sigma_\lambda(x))=f(\lambda x)$$

est aussi désigné par σ_λ. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de R^N. La fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ peut se considérer comme un élément de $\mathcal{D}(R^N)$. Donc la fonction

$$(\sigma_\lambda \circ \varphi)(x)=\varphi(\lambda x)$$

est bien définie pour tout $\lambda>0$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, alors $\sigma_\lambda \circ \varphi \in \mathcal{D}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$.

Il est facile de vérifier la formule :

$$D_i(\sigma_\lambda \circ \varphi)=\lambda \sigma_\lambda \circ (D_i \varphi) \qquad (\lambda>0). \tag{4}$$

Si l'origine $0 \in \mathcal{O}$ et si $\mathcal{O}$ satisfait la condition

$$\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O} \Subset \mathcal{O} \Subset \sigma_\lambda \mathcal{O} \qquad (\lambda>1)$$

on a la convergence

$$\sigma_\lambda\circ\varphi \longrightarrow \varphi \qquad \text{dans } \mathcal{D}(\mathcal{O})$$

lorsque $\lambda\to 1$ $(\lambda>1)$. De plus on a les lemmes suivants:

LEMME 1. *Soit* $T\in\mathcal{D}'(\mathcal{O})$. *Alors la distribution* $\sigma_\lambda\circ T\in\mathcal{D}'(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$ *est définie par la formule suivante*:

$$\langle\sigma_\lambda\circ T,\ \varphi\rangle=\frac{1}{\lambda^N}\langle T,\ \sigma_{1/\lambda}\circ\varphi\rangle \ (\lambda>0) \tag{5}$$

pour $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$, *où* $\langle\,,\rangle$ *désigne la dualité entre* $\mathcal{D}'$ *et* $\mathcal{D}$. *En outre on a*

$$D_i(\sigma_\lambda\circ T)=\lambda\sigma_\lambda\circ(D_i T). \tag{6}$$

Si $\lambda<1$ *et* $\lambda\to 1$, *alors on a la convergence*

$$\sigma_\lambda\circ T \longrightarrow T \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathcal{O}).$$

LEMME 2. *Soit* $f\in W^{-m,p}(\mathcal{O})$, $m=0, 1, 2, \cdots$, $1<p<+\infty$. *Alors* $\sigma_\lambda\circ f\in W^{-m,p}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$. *En outre on a*

$$|\sigma_\lambda\circ f|_{W^{-m,p}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})}\leqq C(\lambda)|f|_{W^{-m,p}(\mathcal{O})}$$

où la constante $C(\lambda)$ *ne dépend pas de* f *et reste bornée lorsque* $\lambda\to 1$.

En admettant la Proposition et les Lemmes 1 et 2, on peut démontrer le Théorème.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. On va montrer que $f\in W^{-m,p}(\mathcal{O}_i\cap\Omega)$ pour $i=0, 1, \cdots, k$.

(I) Le cas $i=0$.

Soit ρ_ε un régularisant, c'est-à-dire,

$$\rho_\varepsilon\in\mathcal{D}(|x|<\varepsilon)$$
$$\rho_\varepsilon \longrightarrow \delta \text{ (de Dirac) dans } \mathcal{D}', \text{ lorsque } \varepsilon\longrightarrow 0.$$

Sous l'hypothèse du théorème, il existe un ouvert $\mathcal{O}'_0$ tel que $\mathcal{O}_0\Subset\mathcal{O}'_0\Subset\Omega$. Soit $\omega\in\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\omega\equiv 1$ sur $\mathcal{O}'_0$. Alors on a

$$\omega f\in\mathcal{D}'(\mathcal{O}_0)$$

et

$$D_i(\omega f)\in W^{-m-1,p}(\mathcal{O}_0)$$

puisque $D_i\omega\equiv 0$ sur $\mathcal{O}_0$.

Si $\varepsilon>0$ est suffisamment petit, $\rho_\varepsilon*(\omega f)$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. En particulier,

$$\rho_\varepsilon*(\omega f),\ D_i(\rho_\varepsilon*(\omega f))\in W^{-m-1,p}(\mathcal{O}_0).$$

D'après l'inégalité (3), on a

$$|\rho_\varepsilon*(\omega f)|_{W^{-m,p}(\mathcal{O}_0)/\mathcal{R}}\leqq C\sum_{i=1}^{N}|D_i\rho_\varepsilon*(\omega f)|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O}_0)}.$$

Soit g un élément de $\mathcal{D}(\mathcal{O}_0)$ et $1/p+1/q=1$. Pour ε assez petit, $\rho_\varepsilon*g\in\mathcal{D}(\mathcal{O}_0')$ et

$$|\rho_\varepsilon*g|_{W^{m+1,q}(\mathcal{O}_0')}\leqq|g|_{W^{m+1,q}(\mathcal{O}_0)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}&|\langle D_i(\rho_\varepsilon*(\omega f)),\ g\rangle|\\ &=|\langle\rho_\varepsilon*D_i(\omega f),\ g\rangle|\\ &=|\langle D_i(\omega f),\ \rho_\varepsilon*g\rangle|\\ &\leqq|D_i(\omega f)|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O}_0')}|\rho_\varepsilon*g|_{W^{m+1,q}(\mathcal{O}_0')}\\ &\leqq|D_i(\omega f)|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O}_0')}|g|_{W^{m+1,q}(\mathcal{O}_0)}.\end{aligned}$$

d'où

$$|\rho_\varepsilon*(\omega f)|_{W^{-m,p}(\mathcal{O}_0)/\mathcal{R}}\leqq C\sum_{i=1}^{N}|D_i(\omega f)|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O}_0')}.$$

Il faut noter que la constante C ne dépend pas de ε. Puisque l'espace $W^{-m,p}(\mathcal{O}_0)/\mathcal{R}$ est un espace de Banach réflexif et que la suite $\{\rho_\varepsilon*(\omega f)\}_\varepsilon$ est bornée dans cet espace, on peut en extraire une sous-suite $\rho_{\varepsilon'}*(\omega f)$ convergeant vers ωf dans $W^{-m,p}(\mathcal{O}_0)/\mathcal{R}$ faible. D'où

$$\omega f\in W^{-m,p}(\mathcal{O}_0)/\mathcal{R}$$

et

$$\begin{aligned}|\omega f|_{W^{-m,p}(\mathcal{O}_0)/\mathcal{R}}&\leqq\varliminf_{\varepsilon'\to0}|\rho_\varepsilon*(\omega f)|_{W^{-m,p}(\mathcal{O}_0)/\mathcal{R}}\\ &\leqq C\sum_{i=1}^{N}|D_i(\omega f)|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O}_0')}.\end{aligned}$$

Mais $\omega\equiv1$ sur $\mathcal{O}_0'$, donc on a

$$f\in W^{-m,p}(\mathcal{O}_0)$$

et

$$|f|_{W^{-m,p}(\mathcal{O}_0)/\mathcal{R}}\leqq C\sum_{i=1}^{N}|D_if|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O}_0')}.$$

(II) Le cas $i=1,\cdots,k$.

En supposant que $f\in\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1\cap\Omega)$ et que $D_if\in W^{-m-1,p}(\mathcal{O}_1\cap\Omega)$, $i=1,\cdots,N$, on va démontrer que $f\in W^{-m,p}(\mathcal{O}_1\cap\Omega)$. Soit $\mathcal{O}=\mathcal{O}_1\cap\Omega$. Par l'hypothèse $\mathcal{O}$ est étoilé par rapport à un point de $\mathcal{O}$. On peut supposer que ce point est l'origine. D'après les Lemmes 1 et 2, on a

$$\sigma_\lambda \circ f \in \mathcal{D}'(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$$

$$D_i(\sigma_\lambda \circ f) = \lambda \sigma_\lambda \circ (D_i f) \in W^{-m-1,p}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O}) .$$

Si $\lambda < 1$, alors $\mathcal{O} \Subset \sigma_{1/\lambda}\mathcal{O}$. λ étant fixe, on peut utiliser (I) et on sait que

$$\sigma_\lambda \circ f \in W^{-m,p}(\mathcal{O})$$

et

$$|\sigma_\lambda \circ f|_{W^{-m,p}(\mathcal{O})/\mathcal{R}} \leqq C \sum_{i=1}^{N} |D_i(\sigma_\lambda \circ f)|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O})}$$

$$= C\lambda \sum_{i=1}^{N} |\sigma_\lambda \circ (D_i f)|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O})}$$

$$\leqq C\lambda C(\lambda) \sum_{i=1}^{N} |D_i f|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O})}$$

où C est une constante ne dépendant que de $\mathcal{O}$ et indépendante de λ. Donc si $\lambda < 1$ tend vers 1, la restriction $\sigma_\lambda \circ f|_{\mathcal{O}}$ reste bornée dans $W^{-m,p}(\mathcal{O})/\mathcal{R}$. Puisque $W^{-m,p}(\mathcal{O})/\mathcal{R}$ est réflexif, on peut extraire une sous-suite $\sigma_{\lambda'} \circ f|_{\mathcal{O}}$ convergeant faiblement dans $W^{-m,p}(\mathcal{O})/\mathcal{R}$. Mais d'après le Lemme 1, $\sigma_{\lambda'} \circ f$ tend vers f dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, d'où $f \in W^{-m,p}(\mathcal{O})$ et

$$|f|_{W^{-m,p}(\mathcal{O})/\mathcal{R}} \leqq \varliminf_{\lambda' \to 1} |\sigma_{\lambda'} \circ f|_{W^{-m,p}(\mathcal{O})/\mathcal{R}}$$

$$\leqq C' \sum_{i=1}^{N} |D_i f|_{W^{-m-1,p}(\mathcal{O})} .$$

Le théorème est démontré.

Il reste à démontrer la Proposition et les Lemmes 1, 2.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. D'après Nečas [1], on sait que

$$f \in W^{-m,p}(\Omega)$$

et que l'inégalité suivante a lieu avec la constante C_1 indépendante de f:

$$|f|_{W^{-m,p}(\Omega)} \leqq C_1 \left\{ \sum_{i=1}^{N} |D_i f|_{W^{-m-1,p}(\Omega)} + |f|_{W^{-m-1,p}(\Omega)} \right\} . \tag{7}$$

On va démontrer (3) par l'absurde. Supposons que pour tout $n = 1, 2, \cdots$, il existe $f_n \in W^{-m-1,p}(\Omega)$ telle que

$$D_i f_n \in W^{-m-1,p}(\Omega),\ i = 1, \cdots, N,$$

$$|f_n|_{W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}} = 1$$

et

$$1>n\sum_{i=1}^{N}|D_i f_n|_{W^{-m-1,p}(\Omega)}\,.$$

Alors pour tout $i=1, \cdots, N$, on a la convergence:

$$D_i f_n \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty) \text{ fort dans } W^{-m-1,p}(\Omega)\,. \tag{8}$$

D'autre part, d'après (1), on peut trouver des constantes $C_n \in \mathcal{R}$ $n=1, 2, \cdots$, telles que

$$1 \leqq |f_n+C_n|_{W^{-m,p}(\Omega)} < 1+\frac{1}{n}\,.$$

La suite $\{f_n+C_n\}$ est donc bornée dans $W^{-m,p}(\Omega)$. D'après le théorème de Rellich, l'injection canonique de $\mathring{W}^{m+1,q}(\Omega)$ dans $\mathring{W}^{m,q}(\Omega)$ est compacte. En prenant le dual, on trouve que l'injection de $W^{-m,p}(\Omega)$ dans $W^{-m-1,p}(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, est aussi compacte. On peut donc extraire une sous-suite $f_{n'}+C_{n'}$ qui converge fortement dans $W^{-m-1,p}(\Omega)$. On désigne la limite par f_0. D'après (8), $D_i f_0=0$ pour $\forall i=1, \cdots, N$. Donc f_0 doit être constante, c'est-à-dire, $|f_0|_{W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}}=0$.

En utilisant l'inégalité (7) pour $f=f_{n'}+C_{n'}-f_0$, on a la convergence forte de $f_{n'}+C_{n'}$ dans $W^{-m,p}(\Omega)$. La limite en est f_0. D'après (2), $f_{n'}$ tend vers f_0 dans $W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}$ fort. Alors, par l'hypothèse, on a

$$|f_0|_{W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}}=\lim_{n'\to\infty}|f_{n'}|_{W^{-m,p}(\Omega)/\mathcal{R}}=1\,,$$

d'où une contradiction, et la proposition est démontrée.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. Si φ est dans $\mathcal{D}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$, la fonction

$$(\sigma_{1/\lambda}\circ\varphi)(x)=\varphi\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)$$

est définie pour $x\in\mathcal{O}$ et a le sens. Donc $\sigma_{1/\lambda}\circ\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$ et le second membre de (5) a le sens. En particulier, si $T\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$, (5) est satisfait comme l'intégrale au sens ordinaire.

$$\begin{aligned}\langle\sigma_\lambda\circ T,\ \varphi\rangle&=\int_{\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O}}T(\lambda x)\varphi(x)dx \qquad (\lambda x=y)\\ &=\int_{\mathcal{O}}T(y)\varphi\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\frac{dy}{\lambda^N}\\ &=\frac{1}{\lambda^N}\langle T,\ \sigma_{1/\lambda}\circ\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Quant à la formule (6), on a, en employant (4) et (5),

$$\langle D_i(\sigma_\lambda\circ T),\ \varphi\rangle=-\langle\sigma_\lambda\circ T,\ D_i\varphi\rangle$$

$$=-\frac{1}{\lambda^N}\langle T,\ \sigma_{1/\lambda}\circ(D_i\varphi)\rangle$$

$$=-\frac{1}{\lambda^N}\langle T,\ \lambda D_i(\sigma_{1/\lambda}\circ\varphi)\rangle$$

$$=\frac{1}{\lambda^N}\langle\lambda D_iT,\ \sigma_{1/\lambda}\circ\varphi\rangle$$

$$=\langle\sigma_\lambda\circ(\lambda D_iT),\ \varphi\rangle$$

d'où on a $D_i(\sigma_\lambda\circ T)=\lambda\sigma_\lambda\circ(D_iT)$. Si $\mathcal{O}$ est étoilé, on a $\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O}\supset\mathcal{O}$ $(\lambda<1)$. Donc la fonction $\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$ appartient à $\mathcal{D}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$, et on a

$$\langle\sigma_{1/\lambda}\circ T-T,\ \varphi\rangle=\left\langle T,\ \frac{1}{\lambda^N}\sigma_{1/\lambda}\circ\varphi-\varphi\right\rangle\longrightarrow 0\,,$$

lorsque $\lambda\to 1$. D'où

$$\sigma_\lambda\circ T\longrightarrow T\quad\text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O})\,,$$

et le lemme est démontré.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. D'après le Lemme 1, on a

$$\langle\sigma_\lambda\circ f,\ \varphi\rangle=\frac{1}{\lambda^N}\langle f,\ \sigma_{1/\lambda}\circ\varphi\rangle$$

pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$. Soit $1/p+1/q=1$. $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_N^{\alpha_N}$, pour un multi-index $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$ et $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_N$. On a

$$|\sigma_{1/\lambda}\circ\varphi|_{L^q(\mathcal{O})}=\left(\int_{x\in\mathcal{O}}\left|\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^q dx\right)^{1/q}\qquad\left(\frac{x}{\lambda}=y\right)$$

$$=\left(\int_{y\in\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O}}|\varphi(y)|^q\lambda^N dy\right)^{1/q}$$

$$=\lambda^{N/q}|\varphi|_{L^q(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})}\,,$$

$$|D^\alpha(\sigma_{1/\lambda}\circ\varphi)|_{L^q(\mathcal{O})}=|\lambda^{-|\alpha|}\sigma_{1/\lambda}\circ(D^\alpha\varphi)|_{L^q(\mathcal{O})}$$

$$=\lambda^{-|\alpha|+N/q}|D^\alpha\varphi|_{L^q(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})}\,.$$

Donc on a

$$(9)\qquad \langle\sigma_\lambda\circ f,\ \varphi\rangle=\left|\frac{1}{\lambda^N}\langle f,\ \sigma_{1/\lambda}\circ\varphi\rangle\right|$$

$$\leqq|f|_{W^{-m,p}(\mathcal{O})}\left|\frac{1}{\lambda^N}\sigma_{1/\lambda}\circ\varphi\right|_{\mathring{W}^{m,q}(\mathcal{O})}$$

$$\leqq |f|_{W^{-m,p}(\mathcal{O})}\lambda^{-N} \max(\lambda^{N/q}, \lambda^{-m+N/q})|\varphi|_{\mathring{W}^{m,q}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})}.$$

Puisque $\mathcal{D}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$ est dense dans $\mathring{W}^{m,q}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$, (9) montre que $\sigma_\lambda\circ f\in W^{-m,p}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})$ et

$$|\sigma_\lambda\circ f|_{W^{-m,p}(\sigma_{1/\lambda}\mathcal{O})}\leqq C(\lambda)|f|_{W^{-m,p}(\mathcal{O})}$$

où

$$C(\lambda)=\max(\lambda^{-N/p}, \lambda^{-m-N/p}).$$

Ainsi le lemme est démontré.

Références

[1] Nečas, J., Sur les normes équivalentes dans $W_p^{(k)}(\Omega)$ et sur la coercivité des formes formellement positives, Presses de l'Université de Montréal, 1965, 103-128.
[2] Temam, R., Navier-Stokes equations, North-Holland, 1977.

(Reçu le 27 octobre, 1979)

School of Engineering
Meiji University
Ikuta, Tama-ku, Kawasaki
214 Japan