Quelques propriétés de la projection de $L_r(\Omega)$ associée à la décomposition de Helmholtz

Par Hiroko MORIMOTO

(Présenté par H. Fujita)

§1. Notation

Soient Ω un ouvert borné de R^N de frontière Γ régulière, $x=(x_1, \cdots, x_N)$ un point de R^N. Soient pour $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ multi-index nonnégatif, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_N$, $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$.

Soit $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)^N$ l'ensemble des vecteurs dont les composantes sont des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω. $\boldsymbol{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des u dans $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)$ tels que $\operatorname{div} u=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+\dfrac{\partial u_N}{\partial x_N}$ est nulle dans Ω.

Soit r un nombre fixé, $1<r<\infty$.

$\boldsymbol{L}_r(\Omega)$ est le complété de $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)$ pour la norme:

$$\|u\|_{L_r(\Omega)}=\left\{\int_\Omega(|u_1|^2+\cdots+|u_N|^2)^{r/2}dx\right\}^{1/r}.$$

C'est un espace de Banach réflexif. $\boldsymbol{W}_r^m(\Omega)$ est l'ensemble des distributions u telles que $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\in\boldsymbol{L}_r(\Omega)$, $\forall\alpha$, $|\alpha|\leqq m$. C'est un espace de Banach pour la norme:

$$\|u\|_{W_r^m(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|=m}\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|_{L_r(\Omega)}^r\right)^{1/r}.$$

$\mathring{\boldsymbol{W}}_r^m(\Omega)$ est l'adhérence de $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $\boldsymbol{W}_r^m(\Omega)$. X_r est l'adhérence de $\boldsymbol{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ dans $\boldsymbol{L}_r(\Omega)$. $G_r=\{\operatorname{grad}\varphi\,;\ \varphi\in W_r^1(\Omega)\}$.

Dans [1], on a démontré la décomposition de Helmholtz

$$\boldsymbol{L}_r(\Omega)=X_r\oplus G_r.$$

On a défini la projection P_r de $\boldsymbol{L}_r(\Omega)$ sur X_r comme suit:

(1) $$P_r u=u-\operatorname{grad}\varphi,\ \text{pour}\ u\in\boldsymbol{L}_r(\Omega)$$

où $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta\varphi_1 = \operatorname{div} u & \text{dans } \Omega\,, \\ \varphi_1|_{\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma\,, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta\varphi_2 = 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} = u_n - \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} & \text{sur } \Gamma\,, \end{cases}$$

n étant le vecteur unitaire normal à Γ, u_n la composante normale de u, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ la dérivée normale.

P_r est un opérateur linéaire borné de $L_r(\Omega)$ sur $X_r(\Omega)$, et pour tout $u \in L_r(\Omega)$, div $P_r u = 0$ (la dérivation est au sens de distribution), $(P_r u)_n = 0$ sur Γ.

Dans cette note on va donner d'autres propriétés de P_r.

§ 2. Résultats

P_r conserve la régularité des fonctions:

PROPOSITION 1. *P_r est un opérateur borné de $W_r^m(\Omega)$ sur $W_r^m(\Omega) \cap X_r$ $m = 1, 2, \cdots$.*

DÉMONSTRATION. Par un procédé analogue à [1], on peut démontrer que P_r est borné de $W_r^m(\Omega)$ dans $W_r^m(\Omega) \cap X_r$. Soit u dans $W_r^m(\Omega) \cap X_r$, alors $P_r u = u$. Donc $u \in P_r W_r^m(\Omega)$, d'où suit la surjectivité de P_r.

Maintenant on va étudier la différence entre u et $P_r u$.

PROPOSITION 2. *Soit $u \in L_r(\Omega)$ tel que* div $u \in L_r(\Omega)$. *On a*

$$\|u - P_r u\|_{L_r(\Omega)} \leqq C(\|u_n\|_{W_r^{-1/r}(\Gamma)} + \|\operatorname{div} u\|_{L_r(\Omega)})\,.$$

Avant de commencer la démonstration, on précise l'espace $W_r^l(\Gamma)$ pour l non entier.

Pour l, $0 < l < 1$,

$$W_r^l(\Gamma) = T(r, l : W_r^1(\Gamma), L_r(\Gamma))\,,$$

où $T(\cdots)$ est l'espace de trace (voir Lions-Magenes [3]).

Γ n'ayant pas de bord, l'espace $W_r^l(\Gamma)$, $l < 0$, est défini comme le dual de $W_{r'}^{-l}(\Gamma)$, $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2. D'abord il faut noter que sous les hypothèses de la proposition, la composante normale de u existe ([1]). D'après la définition (1)$\sim$(3), on va calculer la norme dans $L_r(\Omega)$ de grad φ_1 et de grad φ_2 comme suit (cf. [1]):

$$\|\text{grad}\,\varphi_1\|_{L_r(\Omega)} \leqq \|\varphi_1\|_{W_r^1(\Omega)} \leqq C\|\text{div}\,u\|_{W_r^{-1}(\Omega)}\,, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\|\text{grad}\,\varphi_2\|_{L_r(\Omega)} \leqq \|\varphi_2\|_{W_r^1(\Omega)} &\leqq C\left\|u_n - \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right\|_{W_r^{-1/r}(\Gamma)} \\ &\leqq C\|u_n\|_{W_r^{-1/r}}(\Gamma) + C\left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right\|_{W_r^{-1/r}(\Gamma)}.\end{aligned} \tag{5}$$

Et d'après le Lemme 1 de [1],

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right\|_{W_r^{-1/r}(\Gamma)} &= \|(\text{grad}\,\varphi_1)_n\|_{W_r^{-1/r}(\Gamma)} \\ &\leqq C(\|\text{grad}\,\varphi_1\|_{L_r(\Omega)} + \|\text{div grad}\,\varphi_1\|_{L_r(\Omega)} \\ &= C(\|\text{grad}\,\varphi_1\|_{L_r(\Omega)} + \|\Delta\varphi_1\|_{L_r(\Omega)}) \\ &= C(\|\text{grad}\,\varphi_1\|_{L_r(\Omega)} + \|\text{div}\,u\|_{L_r(\Omega)})\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Les estimations (4), (5) et (6) donnent le résultat.

Pour les fonctions plus régulières, on a

PROPOSITION 3. *Pour* $u \in \boldsymbol{W}_r^1(\Omega)$, *on a*

$$\|u - P_r u\|_{W_r^1(\Omega)} \leqq C\{\|u_n\|_{W_r^{1-1/r}(\Gamma)} + \|\text{div}\,u\|_{L_r(\Omega)}\}\,.$$

La proposition est démontrée de la même manière que la Proposition 2.

La Proposition 3 permet de montrer que même si u est dans $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)$, on ne peut pas espérer $P_r u = 0$ sur Γ. En effet on a le résultat suivant:

PROPOSITION 4. $\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega) \cap X_r \subset P_r \mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Comme $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)$ et que P_r est borné dans $\boldsymbol{W}_r^1(\Omega)$ (Proposition 1), on a

$$\overline{P_r \boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)}^{W_r^1(\Omega)} = P_r \mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)\,, \tag{7}$$

où le membre gauche désigne l'adhérence de $P_r\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $\boldsymbol{W}_r^1(\Omega)$. Soit $u \in \mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega) \cap X_r$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que

$$\|u - \varphi\|_{W_r^1(\Omega)} < \varepsilon\,.$$

En particulier

$$\|\text{div}\,u - \text{div}\,\varphi\|_{L_r(\Omega)} < \varepsilon\,.$$

Comme u est dans X_r, on a

$$\|\text{div}\,\varphi\|_{L_r(\Omega)} < \varepsilon\,.$$

D'après la Proposition 3, on a

$$\|\varphi-P_r\varphi\|_{W_r^1(\Omega)}<C\varepsilon\,.$$

D'où il vient

$$\|u-P_r\varphi\|_{W_r^1(\Omega)}\leqq\|u-\varphi\|_{W_r^1(\Omega)}+\|\varphi-P_r\varphi\|_{W_r^1(\Omega)}$$
$$\leqq(C+1)\varepsilon\,.$$

Donc l'ensemble $\{P_r\varphi\,|\,\varphi\in \boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)\}$ est dense dans $\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)\cap X_r$ muni de la topologie induite de $\boldsymbol{W}_r^1$. D'après (7) on a l'inclusion

$$\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)\cap X_r\subset P_r\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)\,.$$

REMARQUE 1. Maintenant nous montrons qu'il existe un élément de $P_r\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)$ qui n'appartient pas à $\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)\cap X_r$, Ω étant le disque $\{x^2+y^2<1\}$ de R^2. Le vecteur $u=(u_1, u_2)=(1-x^2-y^2, 1-x^2-y^2)$ s'annule au bord de Ω, donc $u\in\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)$. Mais $P_ru=u-\mathrm{grad}\,(\varphi_1+\varphi_2)$ où $\varphi_1=(1-x^2-y^2)(x+y)/4$ est la solution de (2), et $\varphi_2=(x+y)/2$ est la solution de (3). Donc on a

$$P_ru=(1/4)(1-x^2-3y^2+2xy,\ 1-3x^2-y^2+2xy)\,.$$

$(P_ru)_n=0$ sur Γ mais P_ru n'est pas nul, donc $P_ru\notin\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)$.

REMARQUE 2. Soit B_r l'opérateur $-\Delta$ dans l'espace $\boldsymbol{L}_r(\Omega)$ dont le domaine de définition $D(B_r)$ est $\boldsymbol{W}_r^2(\Omega)\cap\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)$. Soit A_r l'opérateur $-P_r\Delta$ dont le domaine de définition $D(A_r)$ est $D(B_r)\cap X_r$ (cf. [1]). La Remarque 1 montre que $P_rD(B_r)\neq D(A_r)$, pour $\Omega=\{x^2+y^2<1\}$.

Maintenant on va montrer que $\boldsymbol{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathring{\boldsymbol{W}}_r^1(\Omega)\cap X_r$. Pour $r=2$, le résultat est connu ([2]). Plus généralement on a

PROPOSITION 5. $\overline{\boldsymbol{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{W_r^m(\Omega)}=\mathring{\boldsymbol{W}}_r^m(\Omega)\cap X_r$, *où* $m=1, 2, \cdots, 1<r<+\infty$.

DÉMONSTRATION. L'inclusion $\overline{\boldsymbol{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{W_r^m}\subset\mathring{\boldsymbol{W}}_r^m(\Omega)\cap X_r$ est évidente. Pour simplifier les notations, on pose

$$X_r^m=\overline{\boldsymbol{C}_{0,\sigma}^\infty}^{W_r^m},\quad \tilde{X}=\mathring{\boldsymbol{W}}_r^m(\Omega)\cap X_r\,.$$

On va montrer l'inclusion inverse. Soit L la forme linéaire continue sur $\tilde{X}$, nulle sur X_r^m. D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut représenter L (de façon non unique) par

$$L(v)=\sum_{i=1}^N(L_i,\ v_i),\qquad L_i\in W_{r'}^{-m}(\Omega),\qquad 1/r+1/r'=1\,.$$

L est nulle sur X_r^m, donc sur $\boldsymbol{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$. D'après le théorème de de Rham, il existe

$S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$L_i = \frac{\partial}{\partial x_i} S, \ i=1, \cdots, N.$$

Main d'après le résultat de [4], $S \in W_r^{-m+1}(\Omega)$. Dans ces conditions, on a

$$L(v) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, v_i \right) = -(S, \operatorname{div} v) = 0, \ \forall v \in \tilde{X},$$

d'où le résultat suit.

Références

[1] Fujiwara, D. and H. Morimoto, An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, **24** (1977), 685-700.

[2] Lions, J.L., Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969.

[3] Lions, J.L. ed E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei (III), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1961), 39-101.

[4] Morimoto, H., Une remarque sur l'opérateur gradient, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA **28** (1981), 57-64.

(Reçu le 27 octobre, 1979)

School of Engineering
Meiji University
Ikuta, Tama-ku, Kawasaki
214 Japan