Déformation d'une équation différentielle linéaire avec une singularité irrégulière sur un tore

Par Kazuo OKAMOTO*)

0. Introduction.

Soit

$$y''=p(x)y \tag{1}$$

une équation différentielle du second ordre définie sur un tore T^1 de dimension complexe un, où $p(x)$ désigne une fonction elliptique avec les deux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$: on identifie dans la suite T^1 avec C/Ω, Ω étant le reseau engendré par $2\omega_1$ et $2\omega_3$. On se consacre dans l'article présent à l'étude de l'équation (1) telle que

$$p(x)=\bar{a}_0+\bar{a}_1\wp(x)+\bar{a}_2\wp(x)^2+\bar{b}\wp'(x)+\frac{3}{4}\sum_{j=1}^{m}\wp(x-\bar{\lambda}_j)$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\bar{c}_j(\zeta(x-\bar{\lambda}_j)-\zeta(x)+\zeta(\bar{\lambda}_j))$$

$\zeta(x)$ étant la ζ-fonction correspondant à la fonction elliptique $\wp(x)$ de Weierstrass. Cette équation possède sur T^1 la singularité irrégulière du rang un à $x=0$ (mod Ω) et m points singuliers réguliers $x=\bar{\lambda}_j$ (mod Ω). Le schéma de Riemann est:

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad x=0 \quad}} & x=\bar{\lambda}_j\ (j=1,\cdots,m)\ (\mathrm{mod}\ \Omega) \\ \sigma^1 & \tau^1 & \dfrac{3}{2} \\ \sigma^2 & \tau^2 & -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

où

$$\tau^1+\tau^2=2\,.$$

Cette relation est appelée celle de Fuchs pour (1). Dans un voisinage de l'un des points singuliers irréguliers, par exemple $x=0$, il y a les solutions formelles

$$\hat{y}_i(x)=\exp\left(\frac{\sigma^i}{x}\right)x^{\tau^i}\hat{\varphi}_i(x) \qquad (i=1,\ 2)\,, \tag{2}$$

*) Supporté partiellement par "the SAKKOKAI FOUNDATION".

$\hat{\varphi}_i(x)$ désignant des séries formelles en x telles que $\hat{\varphi}_i(0)=1$. Il est visible que σ^i sont les deux racines de l'équation algébrique

$$(\sigma^i)^2=\bar{a}_2 \ (\sigma^1\neq\sigma^2),$$

et que

$$\tau^i=1+\frac{b}{\sigma^i}.$$

En outre, nous supposons qu'aucune des singularités $x=\bar{\lambda}_j$ (mod Ω) ne soit pas du type logarithmique. Cette singularité sera appelée singularité apparente. On en déduit les m relations:

$$\bar{a}_0+\bar{a}_1\wp(\lambda_j)+\bar{a}_2\wp(\bar{\lambda}_j)^2+\bar{b}\wp'(\lambda_j)+\frac{3}{4}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\wp(\bar{\lambda}_j-\bar{\lambda}_l)$$
$$+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\bar{c}_l(\zeta(\bar{\lambda}_j-\bar{\lambda}_l)-\zeta(\bar{\lambda}_j)+\zeta(\lambda_l))=\bar{c}_j^2.$$

Le but de cet article est d'étudier la déformation de l'équation (1) conservant la monodromie invariante. Dans le cas où l'équation (1) est du type fuchsien, nous avons traité ce problème et vu que la telle déformation est donnée par le certain système des équations différentielles non-linéaire ([5], [6]). En ce qui concerne la déformation d'une équation ou d'un système sur $\boldsymbol{P}^1$, il y a tant de travaux classiques et modernes, mathématiques et physiques (par exemple, [1], [2], [3], [4], [7]).

Les résultats donnés ci-dessous concernent en principe le cas où m est égal à deux, tandis que nous ne limiterons pas le nombre m dans les sections 1, 2, 3 et 5: les propositions 1, 2, 3 et 4 sont en effet valables pour le cas plus général. Dans la section 1, on introduira le concept de déformation uniforme. L'uniformité de déformations entraîne l'invariance de multiplicateurs de Stokes définis dans un voisinage d'une singularité irrégulière. Nous n'étudierons dans ce mémoire que la déformation uniforme, bien qu'il soit possible de considérer l'autre.

L'équation de déformation que nous considérons est donnée dans les trois sections suivantes par (4), (7), (13). On verra dans le théorème 1 de la section 4 que la déformation de l'équation (1) déduit le système des équations différentielles nonlinéaires pour les coefficients a_2, b, c_j, λ_j de (7). Il se réduit au système (21) des équations différentielles du second ordre pour λ_j, si l'on prend $\sigma^1(=-\sigma^2)$ comme paramètre de déformation. Ce résultat résumé dans le théorème 2 est une conséquence du théorème 1. Les sections 5, 6 sont consacrées à la démonstration du théorème 1.

Toutes équations linéaires considérées dans la suite sont irréductibles sauf dans la section 7, où on donnera le résultat concernant la déformation de l'équation réductible.

1. Equation de déformation.

Une fonction $\varphi(x, t)$ méromorphe sur $\boldsymbol{C}\times$U, U désignant un domaine de $\boldsymbol{C}$, est dite *uniforme sur* $\boldsymbol{T}^1\times$U, lorsque pour tout t fixe de U elle est une fonction elliptique non-triviale ayant les deux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$ en x. On appelle déformation d'une équation différentielle de la forme (1) l'équation différentielle contenant un paramètre t

$$y''=p(x, t)y \tag{3}$$

telle que $p(x, t)$ soit uniforme sur $\boldsymbol{T}^1\times$U et que pour un certaine point t_0 de U, $p(x, t_0)=p(x)$.

DEFINITION 1. On dit que l'équation (3) est *déformation conservant la monodromie invariante,* ou simplement *déformation M-invariante,* lorsqu'elle a un système fondamental des solutions holomorphes en t dont la monodromie associée est indépendant de t.

Comme nous l'avons vu dans la section 3 de [5], pour que (3) soit M-invariante il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions $\mathcal{A}(x, t)$, $\mathcal{B}(x, t)$ définies sur $\boldsymbol{T}^1\times$U telles que le système des équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=p(x, t)y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}=\mathcal{B}(x, t)y+\mathcal{A}(x, t)\dfrac{\partial y}{\partial x} \end{cases} \tag{4}$$

soit complètement intégrable. De plus, on pourra aisément vérifier que ces fonctions possèdent les propriétés suivantes:

(i) elles sont holomorphe sur $\boldsymbol{T}^1\times$U$-$Y, Y désignant l'ensemble des pôles de $p(x, t)$,

(ii) si l'équation (3) a une singularité *regulière* le long de l'un des composants irréductibles Y_i de l'ensemble analytique Y, alors, elles sont méromorphe en Y_i,

(iii) ces fonctions sont univalentes sur $\boldsymbol{T}^1\times$U; en particulier,

$$\mathcal{A}(x+2\omega_h, t)\equiv\mathcal{A}(x, t),\ \mathcal{B}(x+2\omega_h, t)\equiv\mathcal{B}(x, t).$$

DÉFINITION 2. *L'équation de déformation* (*M-invariante*) est la deuxième équation du système (4). La déformation définie par ce système est dite *uniforme,* lorsque la fonction $\mathcal{A}(x, t)$ est uniforme sur $\boldsymbol{T}^1\times$U.

REMARQUE 1. *Dans le cas où l'équation* (3) *est du type fuchsien,* $\mathcal{A}(x, t)$ *est nécessairement uniforme.*

La condition d'intégrabilité complète du système (4) est donnée par le système des équations différentielles pour $\mathcal{A}(x, t)$ et $\mathcal{B}(x, t)$:

$$(5)\qquad\begin{cases} 2\dfrac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}=0 \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x^2}+2p(x,\ t)\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}+\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,\ t)\cdot\mathcal{A}=\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,\ t).\end{cases}$$

D'où nous obtenons

PROPOSITION 1. *$\mathcal{A}(x, t)$ est solution de l'équation*

$$(6)\qquad \frac{\partial^3 \mathcal{A}}{\partial x^3}-4p(x,\ t)\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}-2\frac{\partial p}{\partial x}(x,\ t)\cdot\mathcal{A}+2\frac{\partial p}{\partial t}(x,\ t)=0.$$

Cette équation est équivalente à la condition d'intégrabilité complète du système (4).

Nous pouvons poser, d'après (5),

$$\mathcal{B}(x,\ t)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}(x,\ t).$$

En effet, soit $\mathfrak{Y}(x, t)$ un système fondamental des solutions de (3) dont la monodromie associée est indépendante de t. Alors, pour une fonction holomorphe quelconque $e(t)$ de t, la monodromie associée à l'autre système $\mathfrak{Z}(x, t)$ défini par

$$\mathfrak{Y}(x,\ t)=e(t)\mathfrak{Z}(x,\ t)$$

l'est aussi. Si $\mathfrak{Y}(x, t)$ est solution du système (4), alors $\mathfrak{Z}(x, t)$ satisfait à

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathfrak{Z}(x,\ t)=p(x,\ t)\mathfrak{Z}(x,\ t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{Z}(x,\ t)=\Big(\mathcal{B}(x,\ t)-\frac{de}{dt}(t)\Big)\mathfrak{Z}(x,\ t)+\mathcal{A}(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{Z}(x,\ t).$$

Dans la suite de ce mémoire, nous supposons que la fonction $\mathcal{A}(x, t)$ soit uniforme sur $\boldsymbol{T}^1\times$U. L'uniformité de $\mathcal{B}(x, t)$ en est déduite immédiatement.

2. Problème.

Soit

$$(3)\qquad y''=p(x,\ t)y$$

la déformation de l'équation (1) telle que

$$(7)\qquad p(x,\ t)=a_0+a_1\wp(x)+a_2\wp(x)^2+b\wp'(x)+\frac{3}{4}\sum_{(j)}\wp(x-\lambda_j)+\sum_{(j)}c_jf_j(x)^{1)},$$

où

$$f_j(x)=\zeta(x-\lambda_j)-\zeta(x)+\zeta(\lambda_j).$$

1) Dans la suite de cet article, on désigne par $\sum_{(j)}$ la somme pour j variant de 1 à m et par $\sum_{(l)}^{(j)}$ celle pour l variant de 1 à m sauf $l=j$.

On considère les coefficients $a_k (k=0, 1, 2)$, b, c_j et λ_j $(j=1, \cdots, m)$ comme fonctions analytiques d'un paramètre *implicite* t variant dans un domaine U: $p(x, t)$ est une fonction uniforme sur $\boldsymbol{T}^1 \times \mathrm{U}$. Puisque $p(x, t_0)=p(x)$ en le certain point t_0 de U, on a $a_k(t_0)=\bar{a}_k$, $b(t_0)=\bar{b}$, $c_j(t_0)=\bar{c}_j$, $\lambda_j(t_0)=\bar{\lambda}_j$. L'équation (3) donnée par (7) a des solutions formelles (2), où les exposants caractéristiques σ^i, τ^i, qui peuvent dépendre de t, sont définis par les équations algébriques

$$(\sigma^i)^2=a_2, \qquad \tau^i=1+\frac{b}{\sigma^i}.$$

Maintenant nous posons deux hypothèses:

(H.I) *Aucune de singularités $x=\lambda_j \pmod{\Omega}$ ne soit pas du type logarithmique.*
(H.II) *$\tau^1-\tau^2$ ne soit pas entier.*

En employant la méthode de Frobenius, on deduit de (H. I) les m relations:

$$(8)_j \qquad a_0+a_1\wp(\lambda_j)+a_2\wp(\lambda_j)^2+b\wp'(\lambda_j)+\frac{3}{4}\sum_{(l)}^{(j)}\wp(\lambda_j-\lambda_l)+\sum_{(l)}^{(j)}c_l f_{lj}=c_j^2,$$

$$f_{lj}=-f_{jl}=\zeta(\lambda_j-\lambda_l)-\zeta(\lambda_j)+\zeta(\lambda_l).$$

Notre problème est ceci: *sous les hypothèses* (H.I), (H.II), *déterminer les fonctions de t, $a_k=a_k(t)$, $b=b(t)$, $c_j=c_j(t)$, $\lambda_j=\lambda_j(t)$, de telle manière que la déformation donnée par l'équation* (3), (7) *soit M-invariante.* Si la déformation (3) conserve la monodromie de (1) invariante, alors il est loisible de désire que τ^i ne dépende pas de t. Cette assertion est équivalente à dire que

$$(9) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{b^2}{a_2}\right)=0.$$

Nons montrons en effet dans la section 5 que

PROPOSITION 2. *Les exposants caractéristiques τ^i sont indépendants de t.*

3. La fonction $\mathcal{A}(x, t)$.

Nous considérons la déformation uniforme définie par le système (4) et donnons dans cette section les deux propositions concernant la fonction $\mathcal{A}(x, t)$. Soit $\mathfrak{Y}(x, t)$ un système fondamental des solutions de (4). Montrons tout d'abord que:

PROPOSITION 3. *Pour que la fonction $\mathcal{A}(x, t)$ soit uniforme sur $\boldsymbol{T}^1 \times \mathrm{U}$, il faut et il suffit que tous les multiplicateurs de Stokes associés à $\mathfrak{Y}(x, t)$ soient indépendants de t.*

PREUVE. En raison de périodicité, il suffit de considérer le comportement de $\mathfrak{Y}(x, t)$ dans un voisinage du point singulier irrégulier $x=0$. Soit S un secteur et $\hat{\mathfrak{Y}}(x, t)$ un système des solutions formelles tel que

$$\mathfrak{Y}(x,\ t)\cong\hat{\mathfrak{Y}}(x,\ t)\ (x\in S,\ x\longrightarrow 0).$$

D'ailleurs, on se donne l'autre système des solutions $\mathfrak{Y}'(x, t)$ de (4) admettant dans un autre secteur S' le développement asymptotique

$$\mathfrak{Y}'(x,\ t)\cong\hat{\mathfrak{Y}}(x,\ t)\ (x\in S',\ x\longrightarrow 0).$$

Le multiplicateur de Stokes $C=C(S, S')$ est par définition la matrice telle que pour tout x de $S\cap S'$

$$\mathfrak{Y}'(x,\ t)=C\cdot\mathfrak{Y}(x,\ t). \tag{10}$$

Parce que le déterminant wronskien associé à l'équation (3)

$$W=\left|\mathfrak{Y}(x,\ t),\ \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{Y}(x,\ t)\right|=\left|\mathfrak{Y}'(x,\ t),\ \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{Y}'(x,\ t)\right|$$

est indépendant de x, on a

$$\det C=1. \tag{11}$$

Supposons maintenant que $\mathcal{A}(x, t)$ soit uniforme sur $\boldsymbol{T}^1\times \mathrm{U}$. Alors on déduit de (4)

$$W\cdot\mathcal{A}(x,\ t)=\left|\hat{\mathfrak{Y}}(x,\ t),\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathfrak{Y}}(x,\ t)\right|=\left|\mathfrak{Y}(x,\ t),\ \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{Y}(x,\ t)\right|$$
$$=\left|\mathfrak{Y}'(x,\ t),\ \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{Y}'(x,\ t)\right|,$$

car l'allure de la fonction uniforme $\mathcal{A}(x, t)$ en le point $x=0$ est déterminée par $\hat{\mathfrak{Y}}(x, t)$. Il en résulte d'après (11) que

$$\left|C\mathfrak{Y}(x,\ t),\ \frac{dC}{dt}\mathfrak{Y}(x,\ t)\right|=0,$$

d'où on a

$$\frac{dC}{dt}=0. \tag{12}$$

En effet, posons

$$C=\begin{pmatrix}c_{11}, & c_{12}\\ c_{21}, & c_{22}\end{pmatrix}\qquad (c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=1),\qquad \mathfrak{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}.$$

Alors, puisque les deux fonctions de x, y_1, y_2 sont linéairement indépendantes, on obtient

$$c_{11}^{-1}\frac{dc_{11}}{dt}=c_{12}^{-1}\frac{dc_{12}}{dt}=c_{21}^{-1}\frac{dc_{21}}{dt}=c_{22}^{-1}\frac{dc_{22}}{dt},$$

qui montre

$$\frac{dC}{dt}=k(t)\cdot C\,,$$

$k(t)$ étant une fonction de t. En tenant compte de (11), nous avons (12). Réciproquement, l'équation (12) entraîne

$$W\cdot\mathcal{A}(x,\ t)=\left|\mathfrak{Y}(x,\ t),\ \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{Y}(x,\ t)\right|=\left|\mathfrak{Y}'(x,\ t),\ \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{Y}'(x,\ t)\right|.$$

Par conséquent, il est possible de vérifier que $\mathcal{A}(x,\ t)$ admet un développement assymptotique de la forme

$$\mathcal{A}(x,\ t)\cong x\hat{\varphi}(x,\ t)$$

dans un *tout* voisinage du point $x=0$, où $\hat{\varphi}(x,\ t)$ désigne une série formelle en x. L'uniformité de $\mathcal{A}(x,\ t)$ en est déduite en vertu de la théorie de développements asymtotiques, ce qui établit la proposition 3.

Le résultat suivant sera montré facilement de la même manière que le cas où l'équation (3) est du type fuchsien. Alors nous ne faisons pas la preuve.

PROPOSITION 4. *Sous les hypothèses* (H.I), (H.II), *la fonction uniforme* $\mathcal{A}(x,\ t)$ *possède les propriétés suivantes*:

(i) $x=0$ *(mod* Ω*) est un zéro de degré au moins un,*

(ii) *chaque* $x=\lambda_j$ *(mod* Ω*) peut être un pôle de degré un.*

Posons vu cette proposition

$$\mathcal{A}(x,\ t)=\sum\nolimits_{(j)}M_j f_j(x)\,,\qquad f_j(x)=\zeta(x-\lambda_j)-\zeta(x)+\zeta(\lambda_j)\,,\tag{13}$$

$$\sum\nolimits_{(j)}M_j=0\,.\tag{14}$$

La condition (14) implique que $\mathcal{A}(x,\ t)$ est holomorphe en $x=0$ (mod Ω).

Dans la suite de ce mémoire, nous étudierons en détail le cas où le nombre des singularités apparentes m et égal à deux.

4. Résultats.

Nous énonçons tout d'abord le théorème.

THÉORÈME 1. *Supposons que* m *soit égal à deux. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que* (3) *soit la déformation uniforme conservant la monodromie invariante est donnée par les suivantes*:

(I) a_2, b, c_1, c_2, λ_1 *et* λ_2 *satisfont aux équations différentielles*:

$$\frac{da_2}{dt}-2a_2M(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))=0\,,\tag{15}$$

$$\frac{db}{dt}-bM(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))=0, \tag{16}$$

$$\frac{dc_1}{dt}+M(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))\Big[a_2\wp'(\lambda_1)+2b(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_1+\lambda_2))$$
$$+\frac{\wp'(\lambda_1)}{(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))^2}(c_1+c_2)\Big(c_1-c_2+\frac{1}{2}\frac{\wp''(\lambda_1)}{\wp'(\lambda_1)}-2(\zeta(\lambda_1-\lambda_2)-\zeta(\lambda_1)+\zeta(\lambda_2))\Big]$$
$$=0, \tag{17$_1$}$$

$$\frac{dc_2}{dt}+M(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))\Big[a_2\wp'(\lambda_2)+2b(\wp(\lambda_2)-\wp(\lambda_2+\lambda_1))$$
$$+\frac{\wp'(\lambda_2)}{(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))^2}(c_1+c_2)\Big(c_2-c_1+\frac{1}{2}\frac{\wp''(\lambda_2)}{\wp'(\lambda_2)}-2(\zeta(\lambda_2-\lambda_1)-\zeta(\lambda_2)+\zeta(\lambda_1))\Big]$$
$$=0, \tag{17$_2$}$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt}+M[2c_1-\zeta(\lambda_1-\lambda_2)+\zeta(\lambda_1)-\zeta(\lambda_2)]=0, \tag{18$_1$}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt}-M[2c_2-\zeta(\lambda_2-\lambda_1)+\zeta(\lambda_2)-\zeta(\lambda_1)]=0, \tag{18$_2$}$$

(II) a_0 et a_1 *sont données par*

$$a_0=\frac{1}{2}[a_1(\wp(\lambda_1)+\wp(\lambda_2))+a_2(\wp(\lambda_1)^2+\wp(\lambda_2)^2)+b(\wp'(\lambda_1)+\wp'(\lambda_2))]$$
$$-\frac{3}{4}\wp(\lambda_1-\lambda_2)+\frac{1}{2}(c_1^2+c_2^2)+\frac{1}{2}(c_1-c_2)(\zeta(\lambda_1-\lambda_2)-\zeta(\lambda_1)+\zeta(\lambda_2)), \tag{19}$$

$$a_1=-a_2(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))-b\cdot\frac{\wp'(\lambda_1)-\wp'(\lambda_2)}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}$$
$$+\frac{1}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}(c_1+c_2)(c_1-c_2-\zeta(\lambda_1-\lambda_2)+\zeta(\lambda_1)-\zeta(\lambda_2)). \tag{20}$$

Dans ce cas, l'équation de déformation associée à (3) *est donnée par*:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}(x,\ t)y+\mathcal{A}(x,\ t)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$\mathcal{A}(x,\ t)=M(\zeta(x-\lambda_1)+\zeta(\lambda_1)-\zeta(x-\lambda_2)-\zeta(\lambda_2)).$$

Les équations données dans ce théorème contiennent la fonction indéterminée $M=M(t,\lambda_1,\lambda_2)$ en raison de l'indétermination du paramètre t. Avant faire la démonstration du théorème, nous considérerons le cas où le paramètre t est donné d'une manière explicite.

Prenons en particulier le coefficient b comme le paramètre t:

$$b=\beta t, \quad (\beta: \text{constante}).$$

En tenant compte de (15), (16), nous obtenons

$$a_2=\alpha^2 t^2$$

$$M=\frac{1}{t(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))},$$

α désignant une constante arbitraire non-nulle. Les exposantes caractéristiques σ^i, τ^i sont donnés par

$$\sigma^1=\alpha t, \qquad \sigma^2=-\alpha t, \qquad \tau^1=1+\frac{\beta}{\alpha}, \qquad \tau^2=1-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Dans ce cas, les équations $(17)_j$, $(18)_j$ $(j=1, 2)$ se réduisent à un système des équations différentielles non-linéaires en λ_1, λ_2. En effet, pour éliminer c_1, c_2, portons

$$c_1=-\frac{1}{2M}\frac{d\lambda_1}{dt}+\frac{1}{2}(\zeta(\lambda_1-\lambda_2)-\zeta(\lambda_1)+\zeta(\lambda_2))$$

$$c_2=\frac{1}{2M}\frac{d\lambda_2}{dt}-\frac{1}{2}(\zeta(\lambda_1-\lambda_2)-\zeta(\lambda_1)+\zeta(\lambda_2))$$

dans $(17)_j$. On obtiendra enfin le système suivant:

$$\frac{d^2\lambda_1}{dt^2}+\frac{1}{2}Mt\wp'(\lambda_1)\left(\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right)^2\right)-Mt\wp'(\lambda_2)\frac{d\lambda_1}{dt}\frac{d\lambda_2}{dt}+\frac{1}{t}\left(\frac{d\lambda_1}{dt}-\frac{d\lambda_2}{dt}\right)$$
$$-4\beta M(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_1+\lambda_2))-2\alpha^2 Mt\wp'(\lambda_1)=0,$$

$$\frac{d^2\lambda_2}{dt^2}-\frac{1}{2}Mt\wp'(\lambda_2)\left(\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right)^2\right)+Mt\wp'(\lambda_1)\frac{d\lambda_1}{dt}\frac{d\lambda_2}{dt}-\frac{1}{t}\left(\frac{d\lambda_1}{dt}-\frac{d\lambda_2}{dt}\right)$$
$$+4\beta M(\wp(\lambda_2)-\wp(\lambda_1+\lambda_2))+2\alpha^2 Mt\wp'(\lambda_2)=0,$$

où

$$M=\frac{1}{t(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))}.$$

En faisant le résumé des résultats, on arrive à

THÉORÈME 2. *Pour que l'équation*

$$y''=p(x, t)y,$$

$$p(x, t)=a_0+a_1\wp(x)+\alpha^2 t^2\wp(x)^2+\beta t\wp'(x)+\frac{3}{4}(\wp(x-\lambda_1)+\wp(x-\lambda_2))$$
$$+c_1(\zeta(x-\lambda_1)-\zeta(x)+\zeta(\lambda_1))+c_2(\zeta(x-\lambda_2)-\zeta(x)+\zeta(\lambda_2)),$$

ait un système fondamental des solutions dont la monodromie associées soit indépendante de t, il faut et il suffit que:

(I) $\lambda_1=\lambda_1(t)$, $\lambda_2=\lambda_2(t)$ *satisfassent aux équations différentielles*

$$(21)_1 \qquad \delta^2\lambda_1+\frac{1}{2}\frac{\wp'(\lambda_1)}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}((\delta\lambda_1)^2+(\delta\lambda_2))^2-\frac{\wp'(\lambda_2)}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}(\delta\lambda_1)(\delta\lambda_2)-\delta\lambda_2$$

$$-4\beta t\cdot\frac{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_1+\lambda_2)}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}-2\alpha^2t^2\cdot\frac{\wp'(\lambda_1)}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}=0\,,$$

$$(21)_2 \qquad \delta^2\lambda_2-\frac{1}{2}\frac{\wp'(\lambda_2)}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}((\delta\lambda_1)^2+(\delta\lambda_2))^2+\frac{\wp'(\lambda_1)}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}(\delta\lambda_1)(\delta\lambda_2)-\delta\lambda_1$$

$$+4\beta t\frac{\wp(\lambda_2)-\wp(\lambda_1+\lambda_2)}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}+2\alpha^2t^2\cdot\frac{\wp'(\lambda_2)}{\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)}=0\,,$$

où

$$\delta=t\frac{d}{dt}\,,$$

(II) *a_0, a_1, c_1, c_2 soient les fonctions rationnelles de $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$ dont les coefficients soient les fonctions méromorphes de t, λ_1, λ_2.*

5. Système des équations différentielles.

Dans cette section, on considère l'équation (3) ayant m singularités apparentes sur le tore T^1. Nous allons d'abord dériver un système des équations différentielles pour les coefficients de $p(x, t)$, $a_k(k=0, 1, 2)$, b, c_j et λ_j $(j=1, \cdots, m)$. Pour cela, on porte (7) et (13) dans l'équation (6) et fait des calculs en utilisant les formules suivantes:

$$f_j(x)^2=\wp(x-\lambda_j)+\wp(x)+\wp(\lambda_j)\,,$$

$$(f_j(x)=\zeta(x-\lambda_j)-\zeta(x)+\zeta(\lambda_j))\,,$$

$$f_j(x)f_l(x)=\wp(x)+\wp(\lambda_j)+\wp(\lambda_l)+f_{jl}f_l(x)+f_{lj}f_j(x)\,,\ (j\neq l)$$

$$(f_{jl}=-f_{lj}=\zeta(\lambda_l-\lambda_j)-\zeta(\lambda_l)+\zeta(\lambda_j))\,,$$

$$\wp(x)f_j(x)=\frac{1}{2}\wp'(x)+\frac{1}{2}\wp'(\lambda_j)+\wp(\lambda_j)f_j(x)\,,$$

$$\wp(x-\lambda_j)f_j(x)=-\frac{1}{2}\wp'(x-\lambda_j)+\frac{1}{2}\wp'(\lambda_j)+\wp(\lambda_j)f_j(x)\,,$$

$$\wp(x-\lambda_j)f_l(x)=f_{lj}(\wp(x-\lambda_j)-\wp(\lambda_j))+(\wp(\lambda_j)-\wp(\lambda_j-\lambda_l))f_j(x)$$
$$+\wp(\lambda_j-\lambda_l)f_l(x)+\wp'(\lambda_j)\ (j\neq l)\,.$$

Ces identités seront facilement déduites de la théorie élémentaire de fonctions elliptiques.

Après des calculs attentifs, on obtient

(22) $$\frac{db}{dt}-b\Sigma_{(j)}M_j\wp(\lambda_j)=0\,,$$

(23) $$\frac{da_2}{dt}-2a_2\Sigma_{(j)}M_j\wp(\lambda_j)=0\,,$$

(24) $$\frac{da_1}{dt}+b\Sigma_{(j)}M_j\wp'(\lambda_j)+2a_2\Sigma_{(j)}M_j\wp(\lambda_j)^2=0\,,$$

des coefficients de $\wp'(x)$, $\wp(x)^2$, $\wp(x)$,

$(25)_j$ $$\frac{d\lambda_j}{dt}+2c_jM_j+\Sigma_{(l)}^{(j)}M_lf_{lj}=0\,,$$

de ceux de $\wp'(x-\lambda_j)$, et puis

$(26)_j$ $$a_0+a_1\wp(\lambda_j)+a_2\wp(\lambda_j)^2+b\wp'(\lambda_j)+\frac{3}{4}\Sigma_{(l)}^{(j)}\wp(\lambda_j-\lambda_l)+\Sigma_{(l)}^{(j)}c_lf_{lj}=c_j^2\,,$$

des termes de $\wp(x-\lambda_j)$, ensuite

$(27)_j$ $$\frac{dc_j}{dt}+M_j[b\wp''(\lambda_j)+(a_1+2a_2\wp(\lambda_j))\wp'(\lambda_j)+(\Sigma_{(l)}c_l)\wp(\lambda_j)]$$
$$+\Sigma_{(l)}^{(j)}(c_jM_l-c_lM_j)\wp(\lambda_j-\lambda_l)+\frac{3}{4}\Sigma_{(l)}^{(j)}(M_j+M_l)\wp'(\lambda_j-\lambda_l)=0\,,$$

de ceux de $f_j(x)$ et enfin

(28) $$\frac{da_0}{dt}+3b\Sigma_{(j)}M_j\wp(\lambda_j)\wp'(\lambda_j)+2a_1\Sigma_{(j)}M_j\wp(\lambda_j)^2$$
$$+a_2\Sigma_{(j)}M_j(\wp''(\lambda_j)-2\wp(\lambda_j)^2)\wp(\lambda_j)+\Phi(t,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=0\,,$$

où

$$\Phi(t,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=\frac{1}{4}\Sigma_{(j)}M_j\wp''(\lambda_j)+\frac{3}{4}\Sigma_{(j)}\Sigma_{(l)}^{(j)}M_lf_{lj}\wp'(\lambda_j)$$
$$-\frac{3}{2}\Sigma_{(j)}\Sigma_{(l)}^{(j)}M_l\wp(\lambda_j-\lambda_l)\wp(\lambda_j)$$
$$+\frac{1}{2}(\Sigma_{(l)}c_l)(\Sigma_{(j)}M_j\wp'(\lambda_j))+\frac{1}{2}\Sigma_{(j)}c_jM_j\wp'(\lambda_j)$$
$$+\Sigma_{(j)}c_j\wp(\lambda_j)\Sigma_{(l)}^{(j)}M_lf_{lj}-\Sigma_{(j)}c_j\frac{d\lambda_j}{dt}\wp(\lambda_j)=0\,.$$

Les relations $(26)_j$ ne sont pas autre que $(8)_j$. Désignons par $\boldsymbol{L}_j$ le premier membre de $(26)_j$. Alors il est facile de vérifier que les équations $(27)_j$ s'écrivent sous les formes plus simples:

(29) $$\frac{dc_j}{dt}+\Sigma_{(l)}M_l\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\boldsymbol{L}_l=0\,,$$

ou bien d'après $(27)_j$,

$$\frac{dc_j}{dt}+\Sigma_{(l)}M_l\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(c_l^2)=0. \tag{29$'$}$$

D'ailleurs, on déduit de (22), (23), l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b^2}{a_2}\right)=0,$$

ce qui montre la Proposition 2.

En utilisant ces résultats, nous allons démontrer le Théorème 1.

6. Démonstration du théorème 1.

Lorsque $m=2$, on peut poser en vertu de (14)

$$M=M_1=-M_2.$$

En tenant compte des résultats de la section précédent, nous avons toute suite le système $(\boldsymbol{S})$ des équations différentielles pour $a_k(k=0, 1, 2)$, b, c_1, c_2, λ_1 et λ_2. $(\boldsymbol{S})$:

$$\frac{da_2}{dt}-2a_2M(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))=0, \tag{30}$$

$$\frac{db}{dt}-bM(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))=0, \tag{31}$$

$$\frac{da_1}{dt}+bM(\wp'(\lambda_1)-\wp'(\lambda_2))+2a_2M(\wp(\lambda_1)^2-\wp(\lambda_2)^2)=0, \tag{32}$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt}+2c_1M-Mf_{21}=0, \tag{33_1}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt}-2c_2M+Mf_{12}=0, \tag{33_2}$$

$$\boldsymbol{L}_j=c_j^2,\ (j=1, 2), \tag{34_j}$$

$$\frac{dc_1}{dt}+M\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_1}-\frac{\partial\boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}\right)=0, \tag{35_1}$$

$$\frac{dc_2}{dt}+M\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}-\frac{\partial\boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_2}\right)=0, \tag{35_2}$$

$$\begin{aligned}\frac{da_0}{dt}&+3bM(\wp(\lambda_1)\wp'(\lambda_1)-\wp(\lambda_2)\wp'(\lambda_2))+2a_1M(\wp(\lambda_1)^2-\wp(\lambda_2)^2)\\&+a_2M(\wp''(\lambda_1)\wp(\lambda_1)-2\wp(\lambda_1)^3-\wp''(\lambda_2)\wp(\lambda_2)+2\wp(\lambda_2)^3)\\&+\Phi(t, \lambda_1, \lambda_2)=0,\end{aligned} \tag{36}$$

où

$$(37)_1 \qquad \boldsymbol{L}_1 = a_0 + a_1\wp(\lambda_1) + a_2\wp(\lambda_1)^2 + b\wp'(\lambda_1) + \frac{3}{4}\wp(\lambda_1-\lambda_2) + c_2 f_{21}\,,$$

$$(37)_2 \qquad \boldsymbol{L}_2 = a_0 + a_1\wp(\lambda_2) + a_2\wp(\lambda_2)^2 + b\wp'(\lambda_2) + \frac{3}{4}\wp(\lambda_1-\lambda_2) + c_1 f_{12}\,.$$

En outre, on obtient de (28), $(33)_j$,

$$(38) \qquad \begin{aligned} \Phi(t,\lambda_1,\lambda_2) = {} & \frac{1}{2}M[(c_1+c_2)(\wp'(\lambda_1)-\wp'(\lambda_2)) + c_1\wp'(\lambda_1) - c_2\wp'(\lambda_2) \\ & \qquad -4(c_1^2\wp(\lambda_1) - c_2^2\wp(\lambda_2))] \\ & -2\Big(c_1\wp(\lambda_1)\frac{d\lambda_1}{dt} + c_2\wp(\lambda_2)\frac{d\lambda_2}{dt}\Big) \\ = {} & \frac{1}{2}M[c_1(2\wp'(\lambda_1) - \wp'(\lambda_2) + 4\wp(\lambda_1)(c_1+f_{12})) \\ & \qquad - c_2(2\wp'(\lambda_2) - \wp'(\lambda_1) + 4\wp(\lambda_2)(c_2+f_{21}))]\,. \end{aligned}$$

Notons d'abord que les relations (19), (20), sont équivalentes à $(34)_j$.

Alors, pour établir le Théorème 1, il suffit de vérifier que les relations $(34)_j$ sont compatibles avec les équations (30), (31), (32), $(33)_j$, $(35)_j$, (36).

Remarque 2. *Les équations* $(35)_j$ *s'écrivent dans le cas qui nous occupe*

$$\frac{dc_1}{dt} + M[(a_1+2a_2\wp(\lambda_1))\wp'(\lambda_1) + b\wp''(\lambda_1) + (c_1+c_2)(\wp(\lambda_1) - \wp(\lambda_1-\lambda_2))] = 0\,,$$

$$\frac{dc_2}{dt} - M[(a_1+2a_2\wp(\lambda_2))\wp'(\lambda_2) + b\wp''(\lambda_2) + (c_1+c_2)(\wp(\lambda_2) - \wp(\lambda_1-\lambda_2))] = 0\,.$$

On en déduit les équations $(17)_j$, *en faisant la substitution de* (20).

Maintenant nous montrons que

Lemme. $\qquad \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{L}_j - c_j^2) \equiv 0 \ (mod\ (\boldsymbol{S}))$.

Preuve. Introduisons d'abord la notation

$$\Delta_j = a_0 + a_1\wp(\lambda_j) + a_2\wp(\lambda_j)^2 + b\wp'(\lambda_j) \qquad (j=1,2).$$

Nous avons d'une part

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{L}_1}{dt} &= \frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial t} \\ &= -2c_1M\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_1} + M\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_1}f_{21} + \frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dt} + \frac{dc_2}{dt}f_{21} + \frac{\partial\Delta_1}{\partial t} \quad \text{(d'après } (33)_1) \end{aligned}$$

$$=-2c_1M\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_1}-\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}\right)+\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dt}-M\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_1}f_{12}$$

$$-2c_1M\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}-\frac{dc_2}{dt}f_{12}+\frac{\partial \Delta_1}{\partial t}.$$

Il vient donc d'après $(35)_j$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_1}{dt}=2c_1\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dt}-M\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_1}f_{12}-2c_1M\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}$$

$$+M\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}-\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}\right)f_{12}+\frac{\partial \Delta_1}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{L}_1-c_1^2)=\Psi_1(t,\ \lambda_1,\ \lambda_2),$$

$$\Psi_1(t,\ \lambda_1,\ \lambda_2)=\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dt}-M\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_1}f_{12}-2c_1M\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}$$

$$+M\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}-\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_2}\right)f_{12}+\frac{\partial \Delta_1}{\partial t}.$$

On obtient de même,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{L}_2-c_2^2)=\Psi_2(t,\ \lambda_1,\ \lambda_2),$$

$$\Psi_2(t,\ \lambda_1,\ \lambda_2)=\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dt}-M\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_2}f_{12}+2c_2M\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}$$

$$-M\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_1}-\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}\right)f_{12}+\frac{\partial \Delta_2}{\partial t}.$$

D'autre part, les équations (30), (31), (32) entraîne

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial t}-\frac{\partial \Delta_2}{\partial t}=\frac{da_1}{dt}(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))+\frac{da_2}{dt}(\wp(\lambda_1)^2-\wp(\lambda_2)^2)$$

$$+\frac{db}{dt}(\wp'(\lambda_1)-\wp'(\lambda_2))=0.$$

En conséquence, on a d'après $(33)_j$

$$\Psi_1-\Psi_2=\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_2}{dt}+Mf_{12}\right)-\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}\left(\frac{d\lambda_1}{dt}-Mf_{21}\right)$$

$$-2M\left(c_1\frac{\partial \boldsymbol{L}_2}{\partial\lambda_1}+c_2\frac{\partial \boldsymbol{L}_1}{\partial\lambda_2}\right)$$

$$=\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_2}\Big(\frac{d\lambda_2}{dt}-2c_2M+Mf_{12}\Big)-\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_1}\Big(\frac{d\lambda_1}{dt}+2c_1M-Mf_{21}\Big)$$
$$=0\,.$$

Mintenant on affirme: $\Psi_1+\Psi_2=0$.

En effet,

$$\Psi_1+\Psi_2=\frac{\partial \Delta_1}{\partial t}+\frac{\partial \Delta_2}{\partial t}-2Mf_{12}\Big(\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1}+\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2}\Big)$$
$$+\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_2}\Big(\frac{d\lambda_2}{dt}+2Mc_2+Mf_{12}\Big)+\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_1}\Big(\frac{d\lambda_1}{dt}-2Mc_1-Mf_{21}\Big)$$
$$=\frac{\partial \Delta_1}{\partial t}+\frac{\partial \Delta_2}{\partial t}+\Gamma,$$

où

$$\Gamma=4M\Big(c_2\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_2}-c_1\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_1}\Big)-2Mf_{12}\Big(\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1}+\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2}\Big).$$

De plus, en utilisant les égalités

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1}=\frac{\partial \Delta_1}{\partial \lambda_1}+\frac{3}{4}\wp'(\lambda_1-\lambda_2)+c_2(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_1-\lambda_2))\,,$$
$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2}=\frac{\partial \Delta_2}{\partial \lambda_2}+\frac{3}{4}\wp'(\lambda_2-\lambda_1)+c_1(\wp(\lambda_2)-\wp(\lambda_2-\lambda_1))\,,$$
$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_2}=-\frac{3}{4}\wp'(\lambda_1-\lambda_2)+c_2(\wp(\lambda_2-\lambda_1)-\wp(\lambda_2))\,,$$
$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_1}=-\frac{3}{4}\wp'(\lambda_2-\lambda_1)+c_1(\wp(\lambda_1-\lambda_2)-\wp(\lambda_1))\,,$$

nous obtenons

$$\Gamma=\frac{\partial \Delta_1}{\partial \lambda_1}+\frac{\partial \Delta_2}{\partial \lambda_2}-2Mf_{12}\{c_1(\wp(\lambda_2)-\wp(\lambda_1-\lambda_2))+c_2(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_1-\lambda_2))\}$$
$$+4M\Big\{-\frac{3}{4}c_2\wp'(\lambda_1-\lambda_2)+c_2^2(\wp(\lambda_2-\lambda_1)-\wp(\lambda_2))\Big\}$$
$$-4M\Big\{-\frac{3}{4}c_1\wp'(\lambda_2-\lambda_1)+c_1^2(\wp(\lambda_1-\lambda_2)-\wp(\lambda_1))\Big\}$$
$$=\frac{\partial \Delta_1}{\partial \lambda_1}+\frac{\partial \Delta_2}{\partial \lambda_2}+2\Phi(t,\,\lambda_1,\,\lambda_2)-4M\wp(\lambda_1-\lambda_2)(c_1+c_2)(c_1-c_2+f_{12})\,.$$

En suite, on peut vérifier que

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial t}+\frac{\partial \Delta_2}{\partial t}+\frac{\partial \Delta_1}{\partial \lambda_1}+\frac{\partial \Delta_2}{\partial \lambda_2}+2\Phi(t, \lambda_1, \lambda_2)$$
$$=4M\wp(\lambda_1-\lambda_2)[a_1(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))+a_2(\wp(\lambda_1)^2-\wp(\lambda_2)^2)+b(\wp'(\lambda_1)-\wp'(\lambda_2))],$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned}\Psi_1+\Psi_2&=4M\wp(\lambda_1-\lambda_2)[a_1(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))+a_2(\wp(\lambda_1)^2-\wp(\lambda_2)^2)\\&\quad+b(\wp'(\lambda_1)-\wp'(\lambda_2))-(c_1+c_2)(c_1-c_2+f_{12})]\\&=4M\wp(\lambda_1-\lambda_2)[(\boldsymbol{L}_1-c_1^2)-(\boldsymbol{L}_2-c_2^2)]\\&=0,\end{aligned}$$

ce qui établit le lemme, donc le théorème.

7. Equation réductible.

Nous considérons enfin la déformation de l'équation differentielle réductible. La déformation

$$(4)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-p(x, t)y=0, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}(x, t)y+\mathcal{A}(x, t)\dfrac{\partial y}{\partial x},\end{cases}$$

est dite *réductible* lorsqu'il existe deux fonctions $r(x, t)$, $s(x, t)$ uniformes sur $\boldsymbol{T}^1\times \mathrm{U}$ telles que

$$\frac{d^2}{dx^2}-p(x, t)=\left(\frac{d}{dx}-r(x, t)\right)\left(\frac{d}{dx}-s(x, t)\right).$$

On en déduit

$$r(x, t)+s(x, t)=0,\ p(x, t)=\frac{\partial s}{\partial x}(x, t)-r(x, t)s(x, t)$$

de sorte que:

$$(39)\qquad p(x, t)=\frac{\partial s}{\partial x}(x, t)+s(x, t)^2.$$

Nous posons alors

$$(40)\qquad \begin{aligned}&s(x, t)=s_0+s_1\wp(x)+\rho_1 f_1(x)+\rho_2 f_2(x) \qquad (s_0\neq 0)\\&\mathcal{A}(x, t)=M(f_1(x)-f_2(x)).\end{aligned}$$

Il est possible de prendre $\rho_1=\rho_2=-\frac{1}{2}$, car on a d'après (4) et (39) les équations

$$\frac{3}{4}=\rho_j^2-\rho_j.$$

Dans ce cas, on montrera que:

THEOREME 3. *Dans la supposition de* (39), (40), *pour que le système* (4) *des équations aux dérivées partielles soit complèment intégrable, il faut et il suffit que* s_0, s_1, λ_1, λ_2 *satisfassent le système* (**SR**) *des équations différentielles*:

$$(\mathbf{SR})\qquad \begin{cases} \dfrac{ds_1}{dt}-s_1M(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))=0\,, \\ \dfrac{ds_0}{dt}+M(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))(s_0+s_1(\wp(\lambda_1)+\wp(\lambda_2))=0\,, \\ \dfrac{d\lambda_1}{dt}-2M(s_0+s_1\wp(\lambda_1))=0\,, \\ \dfrac{d\lambda_2}{dt}+2M(s_0+s_1\wp(\lambda_2))=0\,. \end{cases}$$

Ce système possède l'intégrale première

$$\lambda_1+\lambda_2-2s_1.$$

PREUVE. On déduit d'abord de (39), (40) le tableau suivant:

$$a_2=s_1^2\,,$$

$$a_1=2s_0s_1\,,$$

$$a_0=s_0^2+\frac{3}{4}(\wp(\lambda_1)+\wp(\lambda_2))-\frac{1}{2}s_1(\wp'(\lambda_1)+\wp'(\lambda_2))\,,$$

$$b=0\,,$$

$$c_1=-s_0-s_1\wp(\lambda_1)+\frac{1}{2}f_{21}\,,$$

$$c_2=-s_0-s_1\wp(\lambda_2)+\frac{1}{2}f_{12}\,.$$

Alors le système (**SR**) sera une conséquence immédiate du système (**S**). D'ailleurs, il est claire que (**SR**) entraîne

$$\frac{d}{dt}(\lambda_1+\lambda_2-2s_1)=0\,.$$

On note que, dans ce cas, les relations $(34)_j$ et les équations $(35)_j$ sont établies automatiquement.

REMARQUE 3. *Le système des équations différentielles* $(21)_j$ *donné dans le théorème* 2 *possède les solutions particulières*

$$\lambda_1+\lambda_2-2\alpha t=constante,$$

lorsque $\beta=0$.

Bibliographie

[1] Fuchs, R., Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegene wesentlich singulären Stellen, Math. Ann. **63** (1907), 301-321.

[2] Garnier, R., Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **29** (1912), 1-126.

[3] Jimbo, M., Miwa, T. and M. Sato, Monodromy preserving deformation of linear differential equations and quantum field theory, RIMS preprint 246, 1978.

[4] MacCoy, B.M., Tracy, C.A. and T.T. Wu, Connection between the KdV equation and the two-dimensional ising model, Phys. Lett. **61** A n°5 (1977), p. 283.

[5] Okamoto, K., On Fuchs's problem on a torus, I, Funkcial. Ekvac. **14** (1971), 137-152.

[6] Okamoto, K., Sur le problème de Fuchs sur un tore, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **24** (1977), 357-372.

[7] Ueno, K., Monodromy Preserving Deformation of Linear Differential Equations with Irregular Singular Points, RIMS preprint 301 (October 1979).

(Reçu le 27 avril, 1979)

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Tokyo
Hongo, Tokyo
113 Japon