Une correction et un complement à l'article "Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes"

Par Kazuhiko AOMOTO

(Communicated by N. Iwahori)

Théorème 4.2 et 4.3 dans [1] sont inexacts et seront corrigés dans cette note. Ensuite les analogues seront obtenus *dans le cas de singularités exponentielles à l'infini.* On suivera les términologies de [1].

1. On note par h (ou $\bar{h}$) l'application canonique de $\Omega^n(*S)$ (ou $\Omega^n(*\bar{S})$) dans $H^n(\Omega^\cdot(*S), \nabla)$ (ou $H^n(\Omega^\cdot(*\bar{S}), \bar{\nabla})$ respectivement). Alors

$$\text{(C. 1)} \qquad \begin{aligned} h &: (P_1 \cdots P_m)^{-k}\tilde{\Omega}^n \longrightarrow H^n(\Omega^\cdot(*S), \nabla) \\ \bar{h} &: (\bar{P}_1 \cdots \bar{P}_m)^{-k}\tilde{\Omega}^n \longrightarrow H^n(\Omega^\cdot(*\bar{S}), \bar{\nabla}) \end{aligned}$$

sont surjectives, pour k un entier positif assez grand. En remplaçant λ_j par λ_j+k+1, si necéssaire, on peut supposer que h (ou $\bar{h}$) est un épimorphisme de $P_1 \cdots P_m\tilde{\Omega}^n$ (ou $\bar{P}_1 \cdots \bar{P}_m\Omega^n$) dans $H^n(\Omega^\cdot(*S), \nabla)$ (ou $H^n(\Omega^\cdot(*\bar{S}), \bar{\nabla})$ réspectivement).

LEMME C.1. *Dans les hypothèses* (H.3.1) *et* (H.3.2), *on a* $h(\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n)=H^n(\Omega^\cdot(*S), \nabla)$ *et* $\bar{h}(\bar{\rho}_0^n\mathfrak{F}_0^n)=H^n(\Omega^\cdot(*\bar{S}), \bar{\nabla})$ *respectivement.*

En effet la définition de $\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n$ ou $\bar{\rho}_0^n\bar{\mathfrak{F}}_0^n$ implique l'inclusion $\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n \supset P_1 \cdots P_m\tilde{\Omega}^n$ ou $\bar{\rho}_0^n\bar{\mathfrak{F}}_0^n \supset \bar{P}_1 \cdots \bar{P}_m\tilde{\Omega}^n$ respectivement.

LEMME C.2. $H^n(\Omega^\cdot(*S), \nabla)=\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n/\nabla\rho_0^{n-1}\mathfrak{F}_0^{n-1}$.

En effet on a $\hat{\Omega}^{n-1}=\rho_0^{n-1}\mathfrak{F}_0^{n-1}$, d'après Prop. 3. 1 dans [1].

Dans Théorème 4. 2 de [1], on a posé l'hypothèse (H. 3. 3), qui est actuellement inutile pour le premier énoncé. Donc, en supprimant la dernière partie du Théorème, on a

CORRECTION à THÉORÈME 4.2. *Dans les hypothèses* (H.3.1), (H.3.2) *et* (H.4.1), $H^p(\rho_0\mathfrak{F}_0, \nabla)$ *ainsi que* $H^p(\rho_0\mathfrak{F}_0\otimes \boldsymbol{C}(\lambda), \nabla)$ *s'annulent pour* $p\neq n$.

DÉMONSTRATION. Sans l'hypothèse (H.3.3), Lemmes 4.3 et 4.4 sont valables, si l'on considère $\sum_{p=0}^{n-2}\hat{\Omega}^p+\mathrm{Ker}\,\nabla\cap\hat{\Omega}^{n-1}$ ou $\sum_{p=0}^{n-2}\hat{\bar{\Omega}}^p+\mathrm{Ker}\,\bar{\nabla}\cap\hat{\bar{\Omega}}^{n-1}$ au lieu de $\hat{\Omega}^\cdot$ ou

$\hat{\tilde{\Omega}}^{\cdot}$ respectivement. La suite spectrale $\{E_r^{\mu,\nu}, \nabla^\mu\}$ dans Lemme 4.4 est donc dégénérée, d'où Théorème 4.1 implique l'énoncé.

Dans ce cas-là

Correction à Théorème 4.3. *Dans les hypothèses* (H.3.1), (H.3.2) *et* (H.4.1) *on a* i) $H^n(\Omega^{\cdot}(*\bar{S}), \bar{\nabla})=\bar{\rho}_0^n\bar{\mathfrak{F}}_0^n/\mathfrak{J}$ *et* $H^n(\Omega^{\cdot}(*\bar{S})\otimes \boldsymbol{C}(\lambda), \bar{\nabla})=\bar{\rho}_0^n\bar{\mathfrak{F}}_0^n\otimes \boldsymbol{C}(\lambda)/\mathfrak{J}\otimes \boldsymbol{C}(\lambda)$.

ii) $H^n(\Omega^{\cdot}(*S), \nabla)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n)/(\bar{\mathfrak{J}}(\mu)+\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n-1))$ *et* $H^n(\Omega^{\cdot}(*S)\otimes \boldsymbol{C}(\lambda), \nabla)$ $=\sum_{\mu=0}^{\infty}\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n)/(\bar{\mathfrak{J}}(\mu)+\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n-1))\otimes \boldsymbol{C}(\lambda)$ *où* $\bar{\mathfrak{J}}(\mu)$ *désigne* $\bar{\Omega}^n(\mu+n)\cap\mathfrak{J}$.

Démonstration. En vue de (C.1), la démonstration est tout à fait analogue à celle de Théorème 4.3, sauf que l'on doit prendre $\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n$ ou $\bar{\rho}_0^n\bar{\mathfrak{F}}_0^n$ au lieu de $\tilde{\Omega}^n$. On n'a qu'à remarquer

$$\nabla\rho_0^{n-1}\mathfrak{F}_0^{n-1}(\mu+n)+\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n-1)\cong\bar{\mathfrak{J}}(\mu)+\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n-1).$$

2. Dans la suite en plus de (H.3.1), (H.3.2) et (H.4.1), on posera les deux hypothèses suivantes:

(H.1)$_\infty$ *Soient* $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r$ *r polynômes différents quelconques d'entre les* P_j $(0\leqq j\leqq m)$. *Alors l'idéal homogène*

$$H(dQ_1\wedge dQ_2\wedge\cdots\wedge dQ_r\wedge dx_j\wedge\cdots\wedge dx_n, Q_1, \cdots, Q_s)$$

est de Cohen-Macaulay dans $\boldsymbol{C}[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ *pour* $r\leqq n$, $0\leqq s\leqq r$ *et* $r+1\leqq j\leqq n+1$.

(H.2)$_\infty$ *L'idéal homogène* $(d\bar{Q}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{Q}_r\wedge dx_j\wedge\cdots\wedge dx_n, \bar{Q}_1, \cdots, \bar{Q}_s)$ *est de Cohen-Macaulay dans* $\boldsymbol{C}[x_1, \cdots, x_n]$ *pour* $0\leqq r\leqq n-1$, $r+1\leqq j\leqq n$ *et* $0\leqq s\leqq r$.

Lemme (C.3). *Soit* $\varphi\in\tilde{\Omega}^p$, $p\leqq n-1$. *La relation*

$$d\bar{Q}_1\wedge d\bar{Q}_2\wedge\cdots\wedge dQ_r\wedge\bar{\varphi}\equiv 0(\bar{Q}_1, \cdots, \bar{Q}_s) \tag{2.1}$$

implique

$$\varphi\equiv 0(d\bar{Q}_1, \cdots, d\bar{Q}_r, \bar{Q}_1, \cdots, \bar{Q}_s) \tag{C.3}$$

pour $0\leqq r\leqq n$, $r+p\leqq n$ *et* $0\leqq s<r$.

Moyennant Lemme de de Rham ([2]) la démonstration est faite à manière analogue à Lemme 3.2 dans [1]. Ce lemme est faux dans le cas $s=r$.

On posera $\omega_0=dP_0+\sum_1^m\lambda_j\, dP_j/P_j$ et $\bar{\omega}_0=d\bar{P}_0+\sum_1^m\lambda_j\, d\bar{P}_j/\bar{P}_j$. On note par ∇_0 $=\nabla_{\omega_0}$ et $\bar{\nabla}_0=\nabla_{\bar{\omega}_0}$ les dérivées covariantes correspondantes respectives. De même que Lemme 3.4 dans [1], Lemme C.1 entraine le suivant:

Lemme C.4. *Soit* $\varphi\in\tilde{\Omega}^p$, $(0\leqq p\leqq n-2)$, *tel que* $d\bar{P}_0\wedge d\bar{P}_j\wedge\varphi\equiv 0$ *mod* $(\bar{P}_j)$ *pour toutes les indices* $1\leqq j\leqq m$. *Alors* φ *s'écrit comme* $\varphi\equiv 0$ *mod* $(\bar{\rho}_0^p\bar{\mathfrak{F}}_0^p, d\bar{P}_0\wedge\tilde{\Omega}^{p-1})$.

COROLLAIRE. *Soit* $\varphi\in\tilde{\Omega}^p,(0\leqq p\leqq n-1)$, *tel que* $d\bar{P}_0\wedge\varphi=0$, $d\bar{P}_j\wedge\varphi\equiv 0$ *mod* $(\bar{P}_j)$, $1\leqq j\leqq m$. *Alors* $\varphi\equiv 0$ *mod* $(d\bar{P}_0\wedge\bar{\rho}_0^{p-1}\bar{\mathfrak{F}}_0^{p-1})$.

En effet φ s'écrit $\varphi=d\bar{P}_0\wedge\psi$, $\psi\in\tilde{\Omega}^{p-1}$. On a alors $d\bar{P}_0\wedge d\bar{P}_j\wedge\psi=0$. D'après Lemme C.4 $\psi\equiv 0(\bar{\rho}_0^{p-1}\bar{\mathfrak{F}}_0^{p-1},\ d\bar{P}_0\wedge\tilde{\Omega}^{p-2})$, autrement dit $\varphi=d\bar{P}_0\wedge\psi\equiv 0(d\bar{P}_0\wedge\bar{\rho}_0^{p-1}\bar{\mathfrak{F}}_0^{p-1})$.

THÉORÈME C.1. $H^p(\Omega^\cdot(*\bar{S}),\ \bar{\nabla}_0)\cong 0$, *pour* $p\neq n$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\varphi\in(\bar{P}_1\cdots\bar{P}_m)^{-k}\tilde{\Omega}^p$ satisfasse à $\bar{\nabla}_0\varphi=0$. Posons $\varphi=u/(\bar{P}_1\cdots\bar{P}_m)^{-k}$, $u\in\tilde{\Omega}^p$. Soit $\bar{u}$ la partie homogène de degré le plus haut de u. Alors $d\bar{P}_0\wedge\bar{u}=0$ et $d\bar{P}_j\wedge\bar{u}\equiv 0(\bar{P}_j)$, $1\leqq j\leqq m$. Grâce à Corollaire de Lemme C.4, $u\equiv 0\,(d\bar{P}_0\wedge\bar{\rho}_0^{p-1}\bar{\mathfrak{F}}_0^{p-1})$. Par suite il existe un $v\in\bar{\rho}_0^{p-1}\bar{\mathfrak{F}}_0^{p-1}$ tel que $\deg(u-\bar{\nabla}_0 v)<\deg u$, autrement dit $(\bar{P}_1\cdots\bar{P}_m)^k[\varphi-\bar{\nabla}_0(v/(\bar{P}_1\cdots\bar{P}_m)^k]\in\tilde{\Omega}^p$ est de degre plus petit que u. En répetant ce procédé jusqu'au bout, φ lui-même devient cohomologue à zéro. C. Q. F. D.

THÉORÈME C.2. $H^p(\Omega^\cdot(*S),\ \nabla_0)\cong 0$, *pour* $p\neq n$.

DÉMONSTRATION. A cause de Prop. 3.1 dans [1] on n'a qu'à démontrer les suivants: $\nabla_0(\rho_0^{p-1}\mathfrak{F}_0^{p-1})=\mathrm{Ker}\,\nabla_0\cap\rho_0^p\mathfrak{F}_0^p$ pour $p\leqq n-1$. Soit $\varphi\in\rho_0^p\mathfrak{F}_0^p(\mu+p)$. Alors d'après (3.20) dans [1], φ s'écrit de la forme $\varphi=\rho_0^p(\{\varphi_{i_1\cdots i_\nu}\})$, où $\varphi_{i_1\cdots i_\nu}\in\tilde{\Omega}^{p-\nu}(-L+\mu+p)$. Supposons que $\nabla_0\varphi=0$. Soit $\varphi_{i_1\cdots i_\nu}=\bar{\varphi}_{i_1\cdots i_\nu}+\varphi'_{i_1\cdots i_\nu}$ où $\bar{\varphi}_{i_1\cdots i_\nu}$ désigne la partie de degré le plus haut de $\varphi_{i_1\cdots i_\nu}$. On a donc

$$\sum_{i_1<\cdots<i_\nu} d\bar{P}_0\wedge d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}_{i_\nu}/\bar{P}_{i_\nu}\wedge\bar{\varphi}_{i_1\cdots i_\nu}=0\,. \tag{C.5}$$

Par consequent, en utilisant Lemme C.3 à maintes fois, on peut supposer que $\bar{\varphi}_{i_1\cdots i_\nu}$ s'écrit de la forme $d\bar{P}_0\wedge\bar{\psi}_{0i_1\cdots i_\nu}$ où $\bar{\psi}_{0i_1\cdots i_\nu}\in\tilde{\Omega}^{p-\nu-1}(-L+\mu+p-l_0)$. Autrement dit φ s'écrit de la forme

$$\begin{aligned}\varphi=P_1\cdots P_m[&\textstyle\sum dP_{i_1}/P_{i_1}\wedge\cdots\wedge dP_{i_\nu}/P_{i_\nu}\wedge dP_0\wedge\bar{\psi}_{0i_1\cdots i_\nu}\\ &+\textstyle\sum dP_{i_1}/P_{i_1}\wedge\cdots\wedge dP_{i_\nu}/P_{i_\nu}\wedge\varphi'_{i_1\cdots i_\nu}]\end{aligned} \tag{C.6}$$

où $\varphi'_{i_1\cdots i_\nu}\in\tilde{\Omega}^{p-\nu}(-L+\mu+p-1)$. Par consequent, le degré de

$$\varphi'=\varphi-\nabla_0(P_1\cdots P_m\textstyle\sum dP_{i_1}/P_{i_1}\wedge\cdots\wedge dP_{i_\nu}/P_{i_\nu}\wedge\bar{\psi}_{0i_1\cdots i_\nu}(-1)^\nu)$$

est plus petit que celui de φ. En répétant ce procédé jusqu'au bout, φ devient cohomologue à zéro. Théorème C.1 est donc démontré.

Théorème C.2 est démontré à la manière analogue.

On désigne par $\mathfrak{F}_0$ le module homogène de $\tilde{\Omega}^n$ engendré par

$$d\bar{P}_0\wedge(d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}_{i_\nu}/\bar{P}_{i_\nu})\bar{P}_1\cdots\bar{P}_m,\ 0\leqq\nu\leqq n-1\,,$$

dans $\tilde{\Omega}^\cdot$ et par $\bar{\mathfrak{F}}_0(\mu)$, la partie homogène de degré μ de $\mathfrak{F}_0$: $\mathfrak{F}_0=\sum_{\mu=0}^{\infty}\bar{\mathfrak{F}}_0(\mu)$. Alors on a

THÉORÈME C.3. $H^n(\Omega^\cdot(*S), \nabla_0) \cong \sum_{\mu=0}^{\infty} \{\rho_0^n \mathfrak{F}_0^n(\mu+n)/(\mathfrak{J}_0(\mu)+\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n-1))\}$.

THÉORÈME C.4. $H^n(\Omega^\cdot(*\bar{S}), \bar{\nabla}_0) \cong \sum_{\mu=0}^{\infty} \rho_0^n \bar{\mathfrak{F}}_0^n(\mu+n)/\bar{\mathfrak{J}}_0(\mu)$.

DÉMONSTRATION DE THÉORÈME C.3. Soit $\phi=\rho_0^{n-1}(\{\phi_{i_1\cdots i_\nu}\})\in\rho_0^{n-1}\mathfrak{F}_0^{n-1}(\mu+n)$, où $\phi_{i_1\cdots i_\nu}\in\Omega^{n-1-\nu}(-L+\mu+n)$. Alors la partie de degré le plus haut $\bar{\phi}$ de ϕ s'écrit comme $\bar{\rho}_0^{n-1}(\{\bar{\phi}_{i_1\cdots i_\nu}\})$ d'après Lemme 3.2 dans [1]. Supposons d'abord $d\bar{P}_0\wedge\bar{\phi}\neq 0$. Ceux-ci engendrent $\bar{\mathfrak{J}}_0(\mu)$. Par suite $\nabla_0\rho_0^{n-1}\mathfrak{F}_0^{n-1}(\mu+n)+\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n-1)$ contient $\bar{\mathfrak{J}}_0(\mu)$. Supposons ensuite $d\bar{P}_0\wedge\bar{\phi}=0$. Alors

$$\sum d\bar{P}_0\wedge d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}_{i_\nu}/\bar{P}_{i_\nu}\wedge\bar{\phi}_{i_1\cdots i_\nu}=0. \tag{C.5}$$

D'après Lemme C.3, $\bar{\phi}$ s'écrit comme $\bar{\rho}_0^{n-1}\mathfrak{F}_0^{n-1}\{d\bar{P}_0\wedge\bar{\chi}_{0i_1\cdots i_\nu}\}$ où

$$\bar{\chi}_{0i_1\cdots i_\nu}\in\tilde{\Omega}^{n-2-\nu}(-L-l_0+\mu+n).$$

$\deg(\phi-\nabla_0\rho_0^{n-1}(\{\bar{\chi}_{0i_1\cdots i_\nu}(-1)^\nu\}))<\deg\phi$, d'où il vient que ϕ s'écrit comme $'\phi+''\phi$, où $'\phi=\rho_0^{n-1}(\{dP_0\wedge\bar{\chi}_{0i_1\cdots i_\nu}\})$ et $''\phi=\rho_0^{n-1}(\{\phi'_{i_1\cdots i_\nu}\})$ pour certains $\phi'_{i_1\cdots i_\nu}\in\tilde{\Omega}^{n-1-\nu}(-L+\mu+n-1)$, donc $\deg{}'\phi>\deg{}''\phi$. Par suite $\overline{\nabla_0\phi}=\bar{\nabla}'\bar{\phi}$, $d\bar{P}_0\wedge{}''\bar{\phi}_0$ ou $\bar{\nabla}'\bar{\phi}+d\bar{P}_0\wedge{}''\bar{\phi}$, suivant que $\deg{}'\phi>\deg{}''\phi+l_0$, $\deg{}'\phi<\deg{}''\phi+l_0$ ou $\deg{}'\phi=\deg{}''\phi+l_0$ si $\bar{\nabla}'\bar{\phi}+d\bar{P}_0\wedge{}''\bar{\phi}\neq 0$. Dans ce cas on a $\overline{\nabla_0\phi}\in\bar{\mathfrak{J}}_0$. Supposons enfin $\deg{}'\phi=\deg{}''\phi+l_0$ et $\bar{\nabla}'\bar{\phi}+d\bar{P}_0\wedge{}''\bar{\phi}=0$. D'après Lemme C.3, par induction decroissante par rapport à ν, on peut chercher $\phi^*\in\hat{\Omega}^{n-1}$, $\phi\equiv\phi^*$ mod $\nabla_0\hat{\Omega}^{n-2}$ et deg $\phi=$deg ϕ^*, de sorte que $''(\phi^*)=0$. Par consequent on s'est réduit au précédent. Donc $\nabla_0\rho_0^{n-1}\mathfrak{F}_0^{n-1}(\mu+n)+\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n-1)$ est contenu dans $\mathfrak{J}_0(\mu)+\rho_0^n\mathfrak{F}_0^n(\mu+n-1)$. C. Q. F. D.

Théorème C.4 peut être démontré à la manière analogue.

Exemple. Soit $\bar{P}_0$ la quadratique $-\frac{1}{2}\sum_1^n x_j^2$ et les P_j toutes linéaires, $1\leqq j\leqq m$. *Supposons que $S_0, S_1, \cdots, S_m$ soient en position générale.* Alors Théorème C.3 implique

$$H^n(\Omega^\cdot(*S), \nabla_0)\cong\{dP_{j_1}/P_{j_1}\wedge\cdots\wedge dP_{j_\nu}/P_{j_\nu}\wedge dx_{\nu+1}\wedge\cdots\wedge dx_n,$$
$$1\leqq j_1<j_2<\cdots<j_\nu\leqq m,\ 0\leqq\nu\leqq n\}.$$

Le rang est donc égal à $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m}{\nu}$. De même Théorème C.4 implique $H^n(\Omega^\cdot(*\bar{S}), \bar{\nabla}_0)$ $=\{d\bar{P}_{j_1}/\bar{P}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}_{j_\nu}/\bar{P}_{j_\nu}\wedge dx_{\nu+1}\wedge\cdots\wedge dx_n, 1\leqq j_1<\cdots<j_\nu\leqq m, 0\leqq\nu\leqq n\}$, avec les relations fondamentales

$$0=\sum_{\sigma=1}^{n+1}(-1)^{\sigma-1}d\bar{P}_{j_1}/\bar{P}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}_{j_{\sigma-1}}/\bar{P}_{j_{\sigma-1}}\wedge d\bar{P}_{j_{\sigma+1}}/\bar{P}_{j_{\sigma+1}}\wedge\cdots \wedge d\bar{P}_{j_{n+1}}/\bar{P}_{j_{n+1}}, \tag{C.7}$$

pour $1 \leqq j_1 < \cdots < j_{n+1} \leqq m$ quelconque. Le rang est donc égal à

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{m}{\nu} + \sum_{\sigma=0}^{m-n} (-1)^\sigma \binom{m}{n+\sigma}.$$

Ils sont aussi égaux aux nombres de composantes connexes de $\boldsymbol{R}^n - S \cap \boldsymbol{R}^n$ *ou* $\boldsymbol{R}^n - \bar{S} \cap \boldsymbol{R}^n$ *respectivement, pourvu que* P_j *sont tous réels.*

References

[1] Aomoto, K., Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, **22** (1975), 271-297.

[2] Saito, K., On a generalization of de Rham lemma, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **26** (1976), 165-170.

(Reçu le 4 décembre, 1978)

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Nagoya
Nagoya
464 Japan