Sur la convergence de solutions formelles d'équations différentielles avec singularités de première classe

par Kazuo OKAMOTO[(*)]

Introduction.

Les études faites ci-dessous sont liées à celles du mémoire [7]. Nous étudions dans cet article des système différentielles de la forme

$$(0.1) \qquad \begin{cases} z\dfrac{dy}{dx}=\lambda+f(x,\ y,\ z) \\ y\dfrac{dz}{dx}=-\mu+g(x,\ y,\ z) \end{cases}$$

où λ, μ sont des nombres entiers positifs tels que, $\lambda-\mu$ soit égal à zéro ou bien à un, f, g, désignant des fonctions holomorphes nulles à l'origine ($y=z=0$), identiquement en x. Rappelons tout d'abord les études du mémoire [7]. Dans la compactification $\bar{\mathscr{P}}=(\bar{E},\ \bar{\pi},\ B)$ canonique de la fibration $\mathscr{P}=(E,\ \pi,\ B)$ associée aux équations de Painlevé, les feuilletages définis par ces équations possèdent des points singuliers. Ils ont été appelés dans [7] *points singuliers de première classe*. Cette singularité est représentée par le système (0.1).

D'ailleurs, le système (0.1) ainsi obtenu a quelques caractères remarquables. D'une part, le système (0.1) se transforme *formellement* en

$$(0.2) \qquad \begin{cases} z\dfrac{dy}{dx}=\lambda \\ y\dfrac{dz}{dx}=-\mu \end{cases}$$

par une transformation

$$(0.3) \qquad \mathbf{T}\,;\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} y(1+P(x,\ y,\ z)) \\ z(1+Q(x,\ y,\ z)) \end{pmatrix}.$$

La forme du système (0.1) est invariante par changement de paramètre local. D'autre part, les coéfficients f, g, du système (0.1) satisfont aux propriétés suivantes : en écrivant

(*) Soutenu partiellement par "The SAKKÔKAI FOUNDATION".

$$f=\sum_{j,k=1}^{\infty} f_{jk}(x)y^j z^k, \qquad g=\sum_{j,k=1}^{\infty} g_{jk}(x)y^j z^k, \tag{0.4}$$

$f_{jk}(x)$ ($g_{jk}(x)$ resp.) n'est pas identiquement nul, si et seulement si l'entier $\lambda j-\mu k$ est positif. Considérons, par exemple, la singularité T_1 du feuilletage associé à la première équation de Painlevé:

$$y''=6y^2+x.$$

T_1 est caractérisée par l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} zy'=2-y^2z(6+xz^2) \\ yz'=-1, \end{array}\right. \tag{0.5}$$

par rapport à certaines coordonnées locales (y, z) ([7], chap. I, § 2. 2). Dans ce cas, $\lambda=2$, $\mu=1$, $g(x, y, z)\equiv 0$ et

$$f(x, y, z)=-6y^2z-xy^2z^3.$$

On peut vérifier facilement que le système (0.5) possède les propriétés mentionnées ci-dessus. Ce fait nous incite à introduire la notion nouvelle de *singularité de première classe,* plus précise et plus restreinte. Nous allons le faire dans la première section.

Dans la suite de ce mémoire, on ne considère que le cas où $\lambda-\mu$ est égal à un. Four l'autre cas ($\lambda-\mu=0$), les études seront encore valables, avec toute fois une modification convenable. Le but de ce mémoire est de montrer que: *si la singularité de* (0.1) *est de première classe, alors la transformation* (0.3) *est convergente.* Nous verrons dans la suite que cette affirmation est déduite de l'existence d'une solution holomorphe de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre,

$$\left((\lambda-f)y\frac{\partial}{\partial y}+(1-\lambda-g)z\frac{\partial}{\partial z}-yz\frac{\partial}{\partial x}\right)u=h, \tag{0.6}$$

($\mu=\lambda-1$). En ce qui concerne des équations du type (0.6), il y a des résultats classiques et modernes ([1], [2], [3], [4], [5], [6]). Pourtant ces études ne peuvent pas être appliquées au cas qui nous occupe.

Dans la première section, nous introduirons quelques notations et définitions concernant les systèmes d'équations

$$\phi(y)dy+y_j(\lambda_j-f_j)dx=0 \qquad (j=1, \cdots, n) \tag{0.7}$$

$$\phi(y)=\prod_{j=1}^{n} y_j,$$

les λ_j étant des nombres entiers non-nuls tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 .$$

Ce système est une généralisation de (0.1). L'existence d'une solution holomorphe de l'équation

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - f_j) y_j \frac{\partial}{\partial y_j} - \psi(y) \frac{\partial}{\partial x}\Big) u = h$$

sera montrée sous les hypothèses que f_j et h appartiennent à une certaine classe de fonctions. En utilisant ce résultat, on pourra démontrer que le système (0.7) se réduit à un système du même type dont les coefficients f_j sont identiquement nuls. Cela caractérise les singularités de première classe.

Enfin, on remarque que les études données dans la suite sont applicable à celles de l'équation de Briot-Bouquet

$$t \frac{dz_i}{dt} = g_i(t, z_1, \cdots, z_n) \qquad (i=1, \cdots, n) .$$

Il est possible d'en déduire immédiatement quelques résultats mais nous ne le ferons pas.

§ 1. Problème et résultat.

1. Notations de définitions.

Soient $\mathcal{A}$ l'anneau des séries convergentes à coefficients dans $\mathbf{C}$

$$\mathcal{A} = \mathbf{C}\{y_1, \cdots, y_n\}$$

et $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{A}$. On désigne par $\hat{\mathcal{A}}$ l'anneau de séries formelles

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathbf{C}[[y_1, \cdots, y_n]]$$

et par $\hat{\mathcal{M}}$ l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{A}}$. On se donne un ensemble fini Λ de n-uple de nombres entiers λ_j $(j=1, \cdots, n)$, non-nuls, tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 . \tag{1.1}$$

Pour tout ensemble Λ fixé, définissons une valuation généralisée (additive) ν_Λ sur $\hat{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathcal{A}$) telle que pour tout $f \in \hat{\mathcal{A}}$,

$$f = \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n = 0}^{\infty} f_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} ,$$

$$si \quad f \neq 0 , \qquad \nu_\Lambda(f) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j \,|\, f_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} \neq 0 \Big\}$$

$$si \quad f=0, \qquad \nu_\Lambda(f)=+\infty .$$

REMARQUE 1.1. *L'ensemble des valeurs de cette valuation est* $\{-\infty\}\cup\mathbf{Z}$ *qui est un monoïde. Par le symbole* $-\infty$ *on entend un nombre inférieur à tout entier fini. On a les règles d'addition*: $-\infty+n=-\infty$ *pour tout* n *de* $\mathbf{Z}$ *et* $-\infty+\infty=+\infty$.

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau local, $\mathbf{C}\{x\}$. Nous introduisons les deux anneaux: $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}=\mathcal{O}\otimes\mathcal{A}$, $\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{O}}=\mathcal{O}\otimes\hat{\mathcal{A}}$, et les deux idéaux: $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}=\mathcal{O}\otimes\mathcal{M}$, $\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{O}}=\mathcal{O}\otimes\hat{\mathcal{M}}$. La valuation ν_Λ définie ci-dessus se prolonge à celle de $\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{O}}$ (resp. $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$) d'une manière naturelle. On la désigne par la même notation ν_Λ. En fixant un ensemble Λ arbitrairement, nous verrons que, pour tout entier ν, il existe un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\nu_\Lambda(f)=\nu$. En effet, $\nu_\Lambda(y_1\cdots y_n)=\sum\lambda_j=1$, $\nu_\Lambda(y_1^{\lambda_1-1}y_2^{\lambda_1}\cdots y_n^{\lambda_1})=\lambda_1(\sum\lambda_j-1)=0$, et enfin, en notant qu'au moins un des λ_j, soit λ_1, est plus grand que 2, on a $\nu_\Lambda(y_1^{\lambda_1-2}y_2^{\lambda_1-1}\cdots y_n^{\lambda_1-1})=\lambda_1(\sum\lambda_j-1)-1=-1$. Les propriétés de la valuation ν_Λ sont résumées par

PROPOSITION 1.1 (a) *L'application* ν_Λ *de* $\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{O}}$ *dans* $\{-\infty\}\cup\mathbf{Z}\cup\{+\infty\}$ *est surjective.*

(b) *Pour tout* $\varphi\neq 0$ *de* $\mathcal{O}$ *(ou* $\mathbf{C}$*),* $\nu_\Lambda(\varphi f)=\nu_\Lambda(f)$

(c) $\nu_\Lambda(f+g)\geqq\min\{\nu_\Lambda(f),\ \nu_\Lambda(g)\}$

(d) $\nu_\Lambda(fg)=\nu_\Lambda(f)+\nu_\Lambda(g)$.

Notons $R_\Lambda(\mathbf{A})$ l'anneau de la valuation ν_Λ:

$$R_\Lambda(\mathbf{A})=\{f\in\mathbf{A}\,|\,\nu_\Lambda(f)\geqq 0\}\ ,$$

et $R_\Lambda^+(\mathbf{A})$ l'idéal de $R_\Lambda(\mathbf{A})$ donné par

$$R_\Lambda^+(\mathbf{A})=\{f\in\mathbf{A}\,|\,\nu_\Lambda(f)>0\}\ ,$$

où $\mathbf{A}$ représente un des anneaux, $\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$, etc. Si l'on note $R_\Lambda^\nu(\mathbf{A})$ le sous-anneau de $R_\Lambda(\mathbf{A})$ des éléments f_ν de valuation ν, tout f de $R_\Lambda^+(\mathbf{A})$ est développable de façon unique sous la forme:

$$f=\sum_{\nu\geqq 1}f_\nu\,,\qquad \nu_\Lambda(f_\nu)=\nu\,.$$

Soit f_ν un élément de $R_\Lambda^\nu(\mathbf{A})$. Par définition, on a

$$f_\nu(y_1,\cdots,y_n)=\Sigma^{(\nu)}f_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n}$$

$\Sigma^{(\nu)}$ désignant la somme pour tous les α_j $(j=1,\cdots,n)$ tels que

$$\sum_{j=1}^n\alpha_j\lambda_j=\nu\,.$$

Il vient donc, pour un paramètre t quelconque,

$$f_\nu(t^{\lambda_1}y_1, \cdots, t^{\lambda_n}y_n)=\sum^{(\nu)} f_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n} t^{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n} y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n}$$
$$=t^\nu f_\nu(y_1, \cdots, y_n).$$

D'ailleurs, il est aussi facile de vérifier que

$$\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\Big) f_\nu(y_1, \cdots, y_n)=\nu f_\nu(y_1, \cdots, y_n).$$

D'où :

PROPOSITION 1.2 *Si*

$$f(y_1, \cdots, y_n)=\sum_{\nu\geqq 1} f_\nu(y_1, \cdots, y_n)$$

est un élément de $R_\Lambda^+(\mathbf{A})$, *alors pour un paramètre* t,

$$f(t^{\lambda_1}y_1, \cdots, t^{\lambda_n}y_n)=\sum_{\nu\geqq 1} t^\nu f_\nu(y_1, \cdots, y_n).$$

De plus, en posant $\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n\,;t)=\sum_{\nu\geqq 1} t^\nu f_\nu(y_1, \cdots, y_n)$ *on a*

$$\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\Big)\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n\,;t)=\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n\,;t)$$
$$=\sum_{\nu\geqq 1}\nu f_\nu(y_1, \cdots, y_n)t^\nu.$$

REMARQUE 1.2 *Lorsque* $f(y_1, \cdots, y_n)$ *est convergent dans un domaine* U, $\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n\,;t)$ *converge dans* $\mathrm{U}\times\{|t|<1\}$.

2. Singularité de première classe.

Dans les deux paragraphes qui suivent, $\mathbf{A}$ désigne un des anneaux $\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$, $\hat{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}$ et $\mathbf{M}$ l'un des idéaux $\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$, $\hat{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ correspondants. Étant donnés n éléments f_j $(j=1, \cdots, n)$ de $\mathbf{M}$, considérons un système différentiel $\omega(\Lambda\,; f_1, \cdots, f_n)$

$$\phi(y)dy_j+y_j(\lambda_j-f_j)dx=0 \qquad (j=1, \cdots, n) \tag{1.2}$$

$$\phi(y)=y_1\cdots y_n \tag{1.3}$$

où λ_j sont des entiers non-nuls satisfaisant à (1.1). Désignons par $\Omega(\Lambda\,;\mathbf{M})$ l'ensemble de tous les systèmes $\omega(\Lambda\,;f_1, \cdots, f_n)$ avec $f_j\in\mathbf{M}$, et par $\Omega(\Lambda\,; R_\Lambda(\mathbf{A})\cap\mathbf{M})$ (resp. $\Omega(\Lambda\,;R_\Lambda^+(\mathbf{A}))$) un ensemble de $\omega(\Lambda\,;f_1, \cdots, f_n)$ tels que f_j soient contenus dans $R_\Lambda(\mathbf{A})\cap\mathbf{M}$ (resp. $R_\Lambda^+(\mathbf{A})$). On remarque que par définition, $R_\Lambda^+(\mathbf{A})$ est inclu dans $\mathbf{M}$.

DÉFINITION 1.1 *Les deux éléments* $\omega(\Lambda\,;f_1, \cdots, f_n)$ *et* $\omega(\Lambda\,;g_1, \cdots, g_n)$, *sont dits équivalents s'il existe une transformation de la forme*

$$\mathbf{T}(y_j)=y_j(1+P_j), \qquad P_j\in\mathbf{M} \tag{1.4}$$

permettant de passer de l'un à l'autre.

On note cette relation d'équivalence par $\sim$ et par $\tilde{\omega}(\Lambda\,; f_1, \cdots, f_n)_{\mathbf{M}}$ la classe d'équivalence de $\omega(\Lambda\,; f_1, \cdots, f_n)$. Ensuite, pour le cas où $\mathbf{A}$ est $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$ ou bien $\mathcal{A}$ (donc $\mathbf{M}=\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$ ou $\mathcal{M}$ respectivement), introduisons le concept suivant.

DÉFINITION 1.2 *Un système a une singularité de première classe s'il est contenu dans une classe d'équivalence d'un système de $\Omega(\Lambda\,; R_\Lambda^+(\mathbf{A}))$.*

REMARQUE 1.3 *Le système* (1.2) *définit un feuilletage dans le complémentaire de $\{y_j=0\}\cap\{y_k=0\}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$.*

Exemple 1.1 Comme nous l'avons vu dans le chap. III, § 3, 3 de [7], la singularité T_1^0 du feuilletage associé à la sixième équation de Painlevé est défini par un système de la forme

$$\left\{\begin{aligned} &z\frac{dy}{dx}=2+\theta_0 z+f(x, y, z)\\ &y\frac{dz}{dx}=-1-\theta_0 z+g(x, y, z), \end{aligned}\right. \tag{1.5}$$

f, g étant des fonctions de $R_\Lambda^+(\mathcal{A}_{\mathcal{O}})$[1]. La singularité T_1^0 est de première classe, car la transformation

$$\mathbf{T}:\begin{pmatrix} y\\ z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} y\left(1+\dfrac{1}{2}\theta_0 z\right)\\[2ex] \dfrac{z}{1+\dfrac{1}{2}\theta_0 z}\end{pmatrix}$$

transforme (1.5) en le système

$$\left\{\begin{aligned} &z\frac{dy}{dx}=2+f^*(x, y, z)\\ &y\frac{dz}{dx}=-1+g^*(x, y, z) \end{aligned}\right.$$

de $\Omega(\Lambda\,; R_\Lambda^+(\mathcal{A}_{\mathcal{O}}))$. En vertu de la symétrie de la fibration que nous avons étudiée, toutes les autres singularités du feuilletage sont aussi de première classe.

---

[1] Dans ce cas, $y_1=y$, $y_2=z$ et $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$.

Exemple 1.2 L'exemple le plus simple de système ayant une singularité de première classe est donné par

$$(1.6)\qquad \phi(y)dy_j+\lambda_j y_j dx=0\,,$$

que nous noterons $\omega(\Lambda\,;0,\cdots,0)$. Il définit un feuilletage hyperbolique dans un voisinage de l'origine. En effet, il possède les intégrales premières (faibles au sens de R. MOUSSU [6]),

$$(1.7)_j\qquad \phi(y)^{\lambda_j}y_j^{-1}\,,\qquad (j=1,\cdots,n)$$

$$(1.8)\qquad \phi(y)+x\,.$$

Puisque

$$\prod_{j=1}^{n}\phi(y)^{\lambda_j}y_j^{-1}=\phi(y)^{\Sigma\lambda_j}(y_1\cdots y_n)^{-1}=1\,,$$

les intégrales $(1.7)_j$ $(j=1,\cdots,n)$ ne sont pas indépendantes. Par contre, $(1.7)_j$ pour $j=1,\cdots,n-1$, et (1.8) en forment un système complet d'intégrales premières.

3. Théorème principal.

Nous énonçons d'abord le théorème.

THÉORÈME A *Tout système de* $\Omega(\Lambda\,;R_\Lambda^+(\mathbf{A}))$ *est équivalent à* $\omega(\Lambda\,;0,\cdots,0)$.

La primière étape de la démonstration de ce théorème consiste à mettre le problème sous une autre forme. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Pour cela, étant donné un système $\omega=\omega(\Lambda\,;f_1,\cdots,f_n)$ de $\Omega(\Lambda\,;R_\Lambda^+(\mathbf{A}))$, on y associe le champ de vecteur

$$(1.9)\qquad \mathcal{X}_\omega=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-f_j)y_j\frac{\partial}{\partial y_j}-\varepsilon(\mathbf{A})\phi(y)\frac{\partial}{\partial x}\,,$$

où

$$\varepsilon(\mathbf{A})=0\qquad \text{si}\quad \mathbf{A}=\hat{\mathcal{A}}\quad \text{ou}\quad \mathcal{A}\,,$$

$$\varepsilon(\mathbf{A})=1\qquad \text{si}\quad \mathbf{A}=\hat{\mathcal{A}}_\mathcal{O}\quad \text{ou}\quad \mathcal{A}_\mathcal{O}\,.$$

Notons que $\nu_\Lambda(\phi(y))=1$ et que les f_j sont dans $R_\Lambda^+(\mathbf{A})$. Nous pouvons regarder $\mathcal{X}_\omega$ comme opérateur différentiel de $R_\Lambda(\mathbf{A})$ (resp. $R_\Lambda^+(\mathbf{A})$) vers $R_\Lambda(\mathbf{A})\cap\mathbf{M}$ (resp. $R_\Lambda^+(\mathbf{A})$).

LEMME *Pour que l'assertion du théorème* A *soit vraie, il suffit que pour tout* $\omega\in\Omega(\Lambda\,;R_\Lambda^+(\mathbf{A}))$,

$$\mathcal{X}_\omega:\ R_\Lambda^+(\mathbf{A})\longrightarrow R_\Lambda^+(\mathbf{A})\,,$$

soit surjectif.

REMARQUE 1.4 *L'ensemble* $\tilde{\Omega}(\Lambda\,; R_\Lambda^+(\mathbf{A}))_{\mathbf{M}}$ *des classes d'équivalence de systèmes de* $\Omega(\Lambda\,; R_\Lambda^+(\mathbf{A}))$ *se réduit à la seule classe* $\tilde{\omega}(\Lambda\,; 0, \cdots, 0)_{\mathbf{M}}$.

REMARQUE 1.5 *Il est clair que le noyau de l'opérateur*

$$\mathfrak{X}_\omega : R_\Lambda(\mathbf{A}) \longrightarrow R_\Lambda(\mathbf{A}) \cap \mathbf{M}$$

coïncide avec l'ensemble des intégrales premières du système $\omega = \omega(\Lambda\,; f_1, \cdots, f_n)$.

En conséquence, le théorème A est une conséquence du

THÉORÈME B *Pour* f_j *fixés dans* $R_\Lambda^+(\mathbf{A})$, *l'opérateur*

$$\mathfrak{X}_\omega : R_\Lambda^+(\mathbf{A}) \longrightarrow R_\Lambda^+(\mathbf{A})$$

est bijectif.

Exemple 1.3 La singularité définie par

$$\text{(1.10)} \qquad \begin{cases} z\,dy + (2 + 2yz^2)dx = 0 \\ y\,dz + (-1 - yz^2)dx = 0 \end{cases}$$

est de première classe, cependant celle du système

$$\text{(1.11)} \qquad \begin{cases} z\,dy + (2 + yz^2)dx = 0 \\ y\,dz + (-1 - yz^2)dx = 0 \end{cases}$$

ne l'est pas. En effect, la transformation

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y(1+yz^2)^2 \\ \dfrac{z}{1+yz^2} \end{pmatrix}$$

transforme le système (1.10) en

$$\begin{cases} z\,dy + 2dx = 0 \\ y\,dz - dx = 0\,. \end{cases}$$

D'ailleurs, les solutions du système (1.11) dépendent de deux constantes arbitraires, c_1, c_2

$$y = (c_1 - x)^2(c_2 + \log(c_1 - x))$$

$$z = \frac{1}{(c_1 - x)(c_2 + \log(c_1 - x))}\,.$$

D'après le théorème A la singularité de (1.11) n'est pas de première classe.

§ 2. Cas des systèmes homogènes.

1. Remarque.

Dans cette section nous allons vérifier le théorème B pour $\hat{\mathcal{A}}$ et pour $\mathcal{A}$. Ajoutons d'abord quelques mots sur les systèmes de $\Omega(\Lambda; R_\Lambda^+(\mathcal{A}))$,

$$\phi(y)dy_j + y_j(\lambda_j - f_j(y_1, \cdots, y_n))dx = 0 \tag{2.1}$$

$$\phi(y) = y_1 \cdots y_n \tag{1.3}$$

qui sont homogènes par rapport à x. Considérons, par exemple, le système

$$\begin{cases} z\dfrac{dy}{dx} = \lambda + f(y, z) \\ y\dfrac{dz}{dx} = 1 - \lambda + g(y, z) \end{cases}$$

f, g étant des éléments de $R_\Lambda^+(\mathcal{A})$ $(\Lambda = (\lambda, 1-\lambda)$, où λ désigne un nombre entier plus grand que deux). Alors l'affirmation du théorème A dit qu'il est équivalent au système

$$\begin{cases} z\dfrac{dy}{dx} = \lambda \\ y\dfrac{dz}{dx} = 1 - \lambda\,. \end{cases}$$

Ce résultat est contenu dans les études de M. HUKUHARA [2] concernant l'équation de Briot-Bouquet

$$y\frac{dz}{dy} = f(y, z)$$

où $f(0, 0) = 0$ et où $\mu = \dfrac{\partial f}{\partial z}(0, 0)$ est un nombre rational négatif. Dans cet article nous sommes intéressés seulement au cas où $\mu = \dfrac{1-\lambda}{\lambda}$. La méthode adoptée pour l'étude du système (2.1) est différente de celle de Hukuhara et elle s'applique, avec une légère modification, au cas plus général.

Récemment, dans l'article [3] de M. KASHIWARA-T. KAWAI-J. SJÖSTRAND, la convergence de solutions formelles d'équations aux dérivées partielles a été étudiée. En appliquant leurs résultats à un opérateur de la forme

$$\mathcal{X} = \sum_{j=1}^{n} (\theta_j - f_j(y_1, \cdots, y_n)) y_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \tag{2.2}$$

θ_j étant des nombres complexes, on obtient: *sous l'hypothèse que* $\sum_{j=1}^{n} \theta_j y_j \bar{y}_j \neq 0$ *sur* $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, *toute solution formelle de l'équation* $\mathcal{X}u=h$ *est convergente pour* h *holomorphe*. Pourtant ce théorème ne peut pas être appliqué à nos études, car son hypothèse n'est pas satisfaite dans le cas où les θ_j sont des entiers satisfaisant à (1.1).

2. Théorie formelle.

Soient f_j $(j=1, \cdots, n)$ et h des éléments de $R_{\Lambda}^{+}(\hat{\mathcal{A}})$. On se donne l'équation

$$\mathcal{X}u=h \tag{2.3}$$

où $\mathcal{X}$ est le champ de vecteur

$$\mathcal{X}=\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - f_j(y_1, \cdots, y_n)) y_j \frac{\partial}{\partial y_j}. \tag{2.4}$$

Comme nous l'avons vu plus haut, f_j et h s'écrivent de façon unique

$$f_j=\sum_{\nu\geq 1} f_{j,\nu}, \qquad h=\sum_{\nu\geq 1} h_\nu \tag{2.5}$$

$f_{j,\nu}$, h_ν étant contenus dans $R_{\Lambda}^{\nu}(\hat{\mathcal{A}})$. Pour chercher une solution de (2.3) sous la forme

$$u=\sum_{\nu\geq 1} u_\nu \tag{2.6}$$

on porte (2.5) et (2.6) dans (2.3). En tenant compte de l'égalité

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\Big) u_\nu = \nu u_\nu,$$

nous avons pour tout ν entire positif,

$$\nu u_\nu = h_\nu + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha+\beta=\nu} f_{j,\alpha} y_j \frac{\partial u_\beta}{\partial y_j}. \tag{2.7}$$

Par conséquent, il existe une et une seule solution formelle de la forme (2.6) de l'équation (2.3), ce qui établit le théorème B pour $\mathbf{A}=\hat{\mathcal{A}}$.

Maintenant, considérons le cas où $\mathbf{A}=\mathcal{A}$. Pour obtenir le résultat que nous désirons, il suffit de prouver que la solution u déterminée formellement par (2.7) est convergente pourvu que f_j et h soient dans $R_{\Lambda}^{+}(\mathcal{A})$. On exprime par la notation

$$f \ll F$$

le fait que F est une série dominante de f. Or, il est possible de choisir des séries dominantes, $F=\sum_{\nu\geqq 1} F_\nu$, $H=\sum_{\nu\geqq 1} H_\nu$, convergentes, de telle manière que

$$f_{j,\nu}\ll F_\nu\,, \qquad h_\nu\ll H_\nu$$

pour tout entier positif ν et pour $j=1, \cdots, n$. Déterminons une série $U=\sum_{\nu\geqq 1} U_\nu$ par

$$\nu U_\nu=H_\nu+\sum_{\alpha+\beta=\nu} F_\nu \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial U_\beta}{\partial y_j}\,. \tag{2.8}$$

Cette série U domine $u=\sum_{\nu\geqq 1} u_\nu$.

PROPOSITION 2.1 *$\sum_{\nu\geqq 1} U_\nu$ est convergente.*

PREUVE. Étant données les séries

$$U=\sum_{\nu\geqq 1} U_\nu\,, \qquad H=\sum_{\nu\geqq 1} H_\nu\,, \qquad F=\sum_{\nu\geqq 1} F_\nu\,,$$

posons

$$\tilde U=\sum_{\nu\geqq 1} U_\nu t^\nu\,, \qquad \tilde H=\sum_{\nu\geqq 1} H_\nu t^\nu\,, \qquad \tilde F=\sum_{\nu\geqq 1} F_\nu t^\nu\,.$$

Alors en utilisant la proposition 1.2 et (2.8), on voit aisément que $\tilde U$ satisfait à l'équation

$$t\frac{\partial}{\partial t}\tilde U=\tilde H+\tilde F\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial \tilde U}{\partial y_j}\,. \tag{2.9}$$

Puisque les séries convergentes $\tilde H$, $\tilde F$ s'écrivent

$$\tilde H=tH^*\,, \qquad \tilde F=tF^*$$

on obtient de (2.9),

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde U=H^*+F^*\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial \tilde U}{\partial y_j}\,, \tag{2.9$'$}$$

H^*, F^* étant des séries convergentes. $\tilde U$ est une solution de cette équation satisfaisant à la condition initiale

$$\tilde U\equiv 0 \qquad \text{pour} \quad t=0\,. \tag{2.10}$$

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewskaja, il existe une et une seule solution $\tilde U$ holomorphe dans un certain voisinage de $t=0$, $(y_1, \cdots, y_n)=0$. Supposons que $\tilde U$ soit convergente pour

$$|t|\leqq\delta\,, \qquad |y_j|\leqq\varepsilon_j\,.$$

Alors, $\tilde U$ se prolonge holomorphiquement dans un domaine

$$|t|\leqq 1+\delta\,, \qquad |y_j|\leqq \varepsilon_j\Big(\frac{\delta}{1+\delta}\Big)^{\lambda_j}.$$

En effet, on a, en tenant compte de (1.3)

$$\begin{aligned}
\tilde{U}\Big(\varepsilon_1\Big(\frac{\delta}{1+\delta}\Big)^{\lambda_1}, \cdots, \varepsilon_n\Big(\frac{\delta}{1+\delta}\Big)^{\lambda_n}; 1+\delta\Big)
&= \sum_{\nu\geqq 1} U_\nu\Big(\varepsilon_1\Big(\frac{\delta}{1+\delta}\Big)^{\lambda_1}, \cdots, \varepsilon_n\Big(\frac{\delta}{1+\delta}\Big)^{\lambda_n}\Big)(1+\delta)^\nu \\
&= \sum_{\nu\geqq 1} U_\nu(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\Big(\frac{\delta}{1+\delta}\Big)^\nu (1+\delta)^\nu \\
&= \tilde{U}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n; \delta) < \infty\,.
\end{aligned}$$

Le théorème B est donc établi pour $\mathbf{A}=\mathcal{A}$.

§ 3. Systèmes non-homogènes.

1. Démonstration du théorème B.

Nous complètons dans cette section la démonstration du théorème B à l'aide de résultats déjà obtenus. Considérons le champ de vecteur

$$\mathfrak{X}=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-f_j)y_j\frac{\partial}{\partial y_j}-\phi(y)\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.1}$$

et l'équation

$$\mathfrak{X}u=h\,, \tag{3.2}$$

f_j, h désignant des éléments de $R_\Lambda^+(\mathcal{A}_\mathcal{O})$. Il est loisible d'admettre que les fonctions f_j et h soient holomorphes et bornées dans le domaine

$$|x|\leqq 1\,, \qquad |y_j|\leqq \varepsilon_j\,.$$

Écrivons f_j, h et u sous les formes

$$f_j=\sum_{\nu\geqq 1} f_{j,\nu}\,, \qquad h=\sum_{\nu\geqq 1} h_\nu\,, \qquad u=\sum_{\nu\geqq 1} u_\nu$$

et portons-les dans (3.2). Alors on obtient pour tout entier ν positif,

$$\nu u_\nu=h_\nu+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha+\beta=\nu} f_{j,\alpha}y_j\frac{\partial u_\beta}{\partial y_j}+\phi(y)\frac{\partial u_{\nu-1}}{\partial x}\,. \tag{3.3}$$

Il en résulte d'abord que l'application

$$\mathfrak{X}:\ R_\Lambda^+(\hat{\mathcal{A}}_\mathcal{O})\longrightarrow R_\Lambda^+(\hat{\mathcal{A}}_\mathcal{O})$$

est bijective. Vérifions que la série $\sum u_\nu$ est convergente. On peut choisir des séries convergentes dans $R_\lambda^+(\mathcal{A})$

$$F=\sum_{\nu\geqq 1} F_\nu\,, \qquad H=\sum_{\nu\geqq 1} H_\nu$$

de telle manière que

$$f_{j,\nu}(x\,;y_1,\cdots,y_n)\ll\frac{1}{1-x}F_\nu(y_1,\cdots,y_n)\,,$$

$$h_\nu(x\,;y_1,\cdots,y_n)\ll\frac{1}{1-x}H_\nu(y_1,\cdots,y_n)\,.$$

De plus, pour tout entier ν positif, la série $\dfrac{1}{(1-x)^\nu}$ domine la série $\dfrac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x}\ll\frac{1}{(1-x)^\nu}\,,$$

de sorte que l'on obtient

$$f_{j,\nu}\ll\frac{1}{(1-x)^\nu}F_\nu\,, \qquad h_\nu\ll\frac{1}{(1-x)^\nu}H_\nu\,.$$

Soit δ un nombre réel positif assez petit. Alors la série

$$\sum_{\nu\geqq 1}\frac{1}{(1-x)^\nu}G_\nu(y_1,\cdots,y_n)$$

converge dans un domaine

$$|x|\leqq 1-\delta\,, \qquad |y_j|\leqq\varepsilon_j(1-\delta)^{\lambda_j}$$

si et seulement si la série

$$\sum_{\nu\geqq 1}G_\nu(y_1,\cdots,y_n)$$

est convergente pour $|y_j|\leqq\varepsilon_j$. Maintenant on construit la série dominante $\sum V_\nu$ de $\sum u_\nu$ par

$$\nu V_\nu=\frac{H_\nu}{(1-x)^\nu}+\sum_{\alpha+\beta=\nu}\frac{F_\alpha}{(1-x)^\alpha}\sum_{j=1}^n y_j\frac{\partial V_\beta}{\partial y_j}+\phi(y)\frac{\partial V_{\nu-1}}{\partial x}\,. \tag{3.4}$$

D'ailleurs, en posant

$$V_\nu(x\,;y_1,\cdots,y_n)=\frac{1}{(1-x)^\nu}U_\nu(x\,;y_1,\cdots,y_n)$$

dans (3.4) on obtient

$$\nu U_\nu=H_\nu+\sum_{\alpha+\beta=\nu}F_\alpha\sum_{j=1}^n y_j\frac{\partial U_\beta}{\partial y_j}+\phi(y)(\nu-1)U_{\nu-1}+(1-x)\phi(y)\frac{\partial U_{\nu-1}}{\partial x}\,.$$

Par induction, on voit que les U_ν ne dépendent pas de x pour tous les entiers positifs ν. Il en résulte que la série $U=\sum U_\nu$ de $R_A^+(\hat{\mathcal{A}})$ satisfait aux équations

$$\nu U_\nu = H_\nu + \sum_{\alpha+\beta=\nu} F_\alpha \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial U_\beta}{\partial y_j} + \phi(y)(\nu-1)U_{\nu-1}. \tag{3.5}$$

Cela montre que U satisfait à l'équation

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \frac{\partial U}{\partial y_j} = H + F \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial U}{\partial y_j} + \phi(y) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \frac{\partial U}{\partial y_j}$$

donc à

$$\sum_{j=1}^{n} [(1-\phi(y))\lambda_j - F] y_j \frac{\partial U}{\partial y_j} = H. \tag{3.6}$$

Par conséquent, si l'on pose

$$F^* = \frac{F}{1-\phi(y)}, \qquad H^* = \frac{H}{1-\phi(y)}$$

qui sont encore contenues dans $R_A^+(\mathcal{A})$, (3.6) s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - F^*) y_j \frac{\partial U}{\partial y_j} = H^*.$$

On est donc dans le cas étudié dans la section précédente. Cela donne la convergence de $\sum U_\nu$ et donc celle de $\sum V_\nu$, la série dominante de la solution u de (3.2).

REMARQUE 3.1 *Dans l'équation* (3.2), *si h est divisible par $\phi(y)$, alors la solution u l'est aussi.* En effet, posons

$$h_\nu = \phi(y) h_{\nu-1}^*, \qquad h_{\nu-1}^* \in R_A^{\nu-1}(\mathcal{A}_\mathcal{O})$$

et supposons par induction que, pour $\mu \leqq \nu - 1$,

$$u_\mu = \phi(y) u_{\mu-1}^*.$$

Alors on obtient d'après (3.3)

$$\begin{aligned} u_\nu &= \phi(y) h_{\nu-1}^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha+\beta=\nu} f_{j,\alpha} y_j \frac{\partial}{\partial y_j} (\phi(y) u_{\beta-1}^*) + \phi(y) \frac{\partial}{\partial x} (\phi(y) u_{\nu-2}^*) \\ &= \phi(y) \Big[h_{\nu-1}^* + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha+\beta=\nu} f_{j,\alpha} \Big(u_{\beta-1}^* + y_j \frac{\partial u_{\beta-1}^*}{\partial y_j} \Big) + \phi(y) \frac{\partial}{\partial x} u_{\nu-2}^* \Big]. \end{aligned}$$

2. Démonstration du lemme.

Supposons qu'il existe une transformation

$$\mathbf{T}(y)_j = y_j(1+P_j)\,,$$

P_j étant contenus dans $R_A^+(\mathbf{A})$, qui transforme le système $\omega(\Lambda; f_1, \cdots, f_n)$ de $\Omega(\Lambda; R_A^+(\mathbf{A}))$ en $\omega(\Lambda; 0, \cdots, 0)$. Alors en tenant compte de l'exemple 1.2 de la première section, le système $\omega(\Lambda; f_1, \cdots, f_n)$ possède un système d'intégrales premières de la forme

$$\phi(y)^{\lambda_j} y_j^{-1}(1+v_j) \qquad j=1, \cdots, n-1 \tag{3.7$_j$}$$

$$\phi(y)(1+v)+x \tag{3.8}$$

où v_j et v sont dans $R_A^+(\mathbf{A})$ et tels que

$$\begin{cases} v_j = \lambda_j P_1 + \cdots + (\lambda_j - 1)P_j + \cdots + \lambda_j P_n + \Phi_j(P_1, \cdots, P_n) \\ \hfill (j=1, \cdots, n-1) \\ v = P_1 + \cdots + P_n + \Phi(P_1, \cdots, P_n)\,, \end{cases} \tag{3.9}$$

Φ_j et Φ étant des polynômes en $(P_1, \cdots, P_n)$ d'ordre supérieur ou égal à deux. D'une part, parce que, pour tout j fixé, $(3.7)_j$ est une intégrale première de $\omega(\Lambda; f_1, \cdots, f_n)$, v_j vérifie

$$\mathscr{X}_\omega v_j = (\lambda_j f_1 + \cdots + (\lambda_j - 1) f_j + \cdots + \lambda_j f_n)(1+v_j)\,,$$

$\mathscr{X}_\omega$ étant le champ de vecteur (1.11). En posant

$$u = \log(1+v_j)$$

on arrive à une équation du type

$$\mathscr{X}_\omega u = h\,. \tag{3.10}$$

D'autre part, on déduit de (3.8)

$$\mathscr{X}_\omega v = \sum_{j=1}^{n} f_j(1+v) - v\,,$$

d'où

$$\mathscr{X}_\omega u = \phi(y) h \tag{3.10$'$}$$

u étant donnée par

$$v = \phi(y) u\,.$$

Réciproquement, si l'équation (3.10) a une solution ou bien pour

$$h = \lambda_j f_1 + \cdots + (\lambda_j - 1) f_j + \cdots + \lambda_j f_n$$

ou bien pour

$$h = (f_1 + \cdots + f_n)\phi(y)\,,$$

nous obtiendrons en vertu de la remarque 3.1 le système d'intégrales $(3.7)_j$, (3.8).

La transformation est déterminée par (3.9) qui peut être résolu par rapport à P_j. Cela établit le lemme.

Bibliographie

[1] Brjuno, A.D., Analytical Form of Differential Equations, Trans. Moscow Math. Soc. **25** (1971), 131.
[2] Hukuhara, M., Sur les points singuliers d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, IV, Proc. Phys-Math. Soc. Japan **20** (1938), 865.
[3] Kashiwara, M., Kawai, T. and J. Sjöstrand, On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge, à paraître.
[4] Majima, H., La deuxième thèse pour le diplôme de Maîtrise à l'Université de Tokyo (en japonais), 1977.
[5] Malgrange, B., Frobenius avec singularités, 2, le cas général. Inventionnes Math. **39** (1977), 67.
[6] Moussu, R., Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, Ann. Inst. Fourier, Grenobre **26** (1976), 171.
[7] Okamoto, K., Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, C.R. Acad. Sci., Paris, **285** (1977), 765.
[8] Okamoto, K., Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales, à paraître dans le "Japanese Journal of Mathematics".

(Reçu le 18 Septembre, 1978)

Département de Mathématique
Faculté des Sciences
Université de Tokyo
Hongo, Tokyo
113 Japon