Quelques résultats de (non) monotonie des valeurs propres du problème de Neumann[(*)]

Dédié à Monsieur Shigeru Furuya pour son 60e anniversaire

Par Kôichi UCHIYAMA

1. Introduction.

Dans le problème de Dirichlet, les valeurs propres augmentent quand le domaine se contracte. Par exemple, on rappelle le

THÉORÈME (Courant-Hilbert [1]). *Soit Ω un domaine borné de $\boldsymbol{R}^2$ et $\lambda_j(\Omega)$ la $j^{\text{ème}}$ valeur propre*[1] *du problème:*

$$L[u]+\lambda\rho u=(pu_x)_x+(pu_y)_y-qu+\lambda\rho u=0$$

$$\text{dans } \Omega \text{ où } p(x,y)>0,\ \rho(x,y)>0\,.$$

$$u\equiv 0 \text{ sur le bord } \partial\Omega\,,$$

alors $\lambda_j(\Omega)\leqq\lambda_j(\omega)$ *pour tout sous-domaine* ω.

On appellera cette propriété la *monotonie* des valeurs propres. Est-ce que la monotonie est valable pour le problème de Neumann? En général, ce n'est pas vrai. Le but de cette note est de donner quelques exemples et contre-exemples de la monotonie.

L'auteur remercie vivement M. S. T. Kuroda qui lui a indiqué l'idée de l'Exemple 2′ et M. T. Kato dont les conseils ont permis d'améliorer les résultats de la section 4. Ma reconnaissance va également à M. T. Ushijima pour ses nombreux encouragements.

2. Tout d'abord, on donne l'exemple le plus simple.

EXEMPLE 1. On considère l'ouvert $\Omega_R=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2<R^2\}$ et le laplacien $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Soit $\lambda_j(\Omega_R)$ la $j^{\text{ème}}$ valeur propre du problème suivant:

(*) Ce travail a été accompli à l'Université de Nice grâce à une bourse du gouvernement français.

1) En tenant compte de la multiplicité: $\lambda_1(\Omega)\leqq\lambda_2(\Omega)\leqq\cdots\leqq\lambda_j(\Omega)\leqq\cdots$.

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda u \text{ dans } \Omega_R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0 \text{ sur } \partial\Omega_R=\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2=R^2\} \\ \qquad \text{où } \dfrac{\partial}{\partial\nu} \text{ est la dérivée normale à } \partial\Omega_R, \end{cases}$$

alors $\lambda_j(\Omega_R)>\lambda_j(\Omega_{R'})$ si $0<R<R'$.

DÉMONSTRATION. Posons $\alpha=R/R'$. Soit $u_n(x)$ une fonction propre associée à $\lambda_n(\Omega_R)$. En posant $\hat{u}_n(x)=u_n(\alpha x)$, on a $-\Delta\hat{u}_n=\lambda_n(\Omega_R)\alpha^2\hat{u}_n$ et $\partial\hat{u}/\partial\nu=0$ sur $\partial\Omega_{R'}$. L'application $L^2(\Omega_R)\ni u_n\leftrightarrow\hat{u}_n\in L^2(\Omega_{R'})$ donne l'isomorphisme entre des espaces propres de deux problèmes. Donc, $\lambda_n(\Omega_{R'})=\lambda_n(\Omega_R)\alpha^2<\lambda_n(\Omega_R)$. C.Q.F.D.

Puis, on va voir que la monotonie n'est plus valable en général, si l'on ajoute au laplacien un terme de potentiel $q(x)$ comme le Théorème du § 1. Pour cela, on prépare un théorème auxiliaire, analogue à celui d'Ōeda [3], sous une forme générale qui est intéressante en elle-même. Soient Ω et ω deux ouverts bornés ayant la propriété de cône (voir Agmon [4]) tels que $\bar{\omega}\subset\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$.

Soit $\mathcal{L}[u,v]=\sum_{|\alpha|\leq m,|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}(x)D_x^\alpha u\overline{D_x^\beta v}$ la forme différentielle sesquilinéaire à coefficients au moins, bornés mesurables sur Ω. Soit $a(x)$ une fonction mesurable dans Ω vérifiant l'hypothèse:

(A) i) il existe $A>0$ telle que $0\leqq a(x)\leqq A$ pour $\forall x\in\Omega$
ii) $a(x)\neq 0$ si et seulement si $x\in\Omega\backslash\omega$.

Soit $l[f,g]=\int_\omega \mathcal{L}[f,g]dx$, on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

(B_ω) 1) symétrie: $l[f,g]=\overline{l[g,f]}$ pour tout $f,g\in C_0^\infty(\omega)$,
2) ellipticité: il existe des constantes $\delta, C>0$ telles que:

$$l[f]\geqq C\|f\|_m^2-\delta\|f\|_0^2 \text{ pour tout } f\in C_0^\infty(\omega)^{2)}.$$

Soit V un espace linéaire fermé tel que $H_0^m(\Omega)\subset V\subset H^m(\Omega)$.

En posant $l_0[u,v]=\int_\Omega \mathcal{L}[u,v]dx$, on suppose que pour l_0 et V, les hypothèses suivantes sont vérifiées: (voir Agmon [4])

(B_Ω) 1) symétrie: $l_0[u,v]=\overline{l_0[v,u]}$ pour tout $u,v\in V$,
2) ellipticité: il existe des constantes δ, $C>0$ telles que

$$l_0[u]\geqq C\|u\|_m^2-\delta\|u\|_0^2$$

pour tout $u\in V$.

On définit $l_n[u,v]=l_0[u,v]+n\int_\Omega a(x)u(x)\overline{v(x)}dx$. Chaque l_n vérifie la condition

2) $l[f]=l[f,f]$.

(B_Ω) pour $n=0,1,2,\cdots$. La forme l_n sur V (resp. l sur $H_0^m(\omega)$), possède une extension fermée unique symétrique à laquelle on sait associer un opérateur autoadjoint L_n (resp. L) dans $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\omega)$). On a $D(L)\subset H_0^m(\omega)$ et $D(L_n)=D(L_0)\subset H^m(\Omega)$. Les opérateurs L_n, L ont des spectres discrets. On désigne leur $j^{\text{ème}}$ valeur propre (en tenant compte de la multiplicité) par $\lambda_j(L_n)$ et $\lambda_j(L)$ respectivement.

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* (A) (B), *on a* $\lambda_j(L_n)\nearrow\lambda_j(L)$ *quand* n *tend vers* ∞.

La démonstration est analogue à celle d'Ōeda [3]. La suite $\{(L_n+\delta)^{-1}\}_n$ est monotone décroissante positive donc admet une limite forte qui est encore un opérateur autoadjoint dans $L^2(\Omega)$ que l'on désignera par M (voir Kato [2]).

LEMME 1. (i) $\operatorname{Im} M=\{\tilde{f}\in L^2(\Omega)\,;\ f\in D(L)\}$[3)]

(ii) $Mu=M[(u_\omega)^\sim]=[(L+\delta)^{-1}u_\omega]^\sim$ *pour* $\forall u\in L^2(\Omega)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. En fixant un élément arbitraire $u\in L^2(\Omega)$, on pose $v=Mu$ et $v_n=(L_n+\delta)^{-1}u$. On a $v_n\in H^m(\Omega)$ et que $v_n\to v$ dans $L^2(\Omega)$.

Or: $$|((L_n+\delta)^{-1}u,u)|=|(v_n,(L_n+\delta)v_n)|$$
$$=(l_n+\delta)[v_n]=(l_0+\delta)[v_n]+n(v_n,av_n)$$
$$\geqq C\|v_n\|_m^2+n(v_n,av_n)\,.$$

En majorant le premier membre, on a:

$$C'\|u\|_0^2\geqq C\|v_n\|_m^2+n(v_n,av_n)\,.$$

Comme $(v_n,av_n)\to 0$ quand n tend vers ∞, il en résulte que $\operatorname{supp} v\subset\bar{\omega}$. Comme $\{\|v_n\|_m\}$ est bornée en n, on peut supposer, par extraction de sous-suite, que v_n converge à v dans $H^m(\Omega)$ faible.

Soit $h=u-(u_\omega)^\sim$. Posons encore $v_n=(L_n+\delta)^{-1}h$.

$$\|h\|\|v_{n,K}\|\geqq(h,v_n)=((L_n+\delta)v_n,v_n)\geqq C\|v_n\|_m^2 \quad \text{où on a posé} \quad K=\Omega\backslash\omega\,.$$

Comme $\|v_{n,K}\|\to 0$ quand $n\to\infty$, $Mh=\lim_n v_n=0$. Donc $Mu=M[(u_\omega)^\sim]$.

Soient $\varphi\in C_0^\infty(\omega)$ et $f\in L^2(\omega)$. $\tilde{\varphi}\in C_0^\infty(\Omega)$ et $\tilde{f}\in L^2(\Omega)$. Posons $w_n=(L_n+\delta)^{-1}\tilde{f}$ et $w=M\tilde{f}$.

$$(f,\varphi)_\omega=(\tilde{f},\tilde{\varphi})_\Omega$$
$$=((L_n+\delta)w_n,\tilde{\varphi})_\Omega$$

3) Pour $u\in L^2(\Omega)$, u_ω désigne sa restriction à ω et pour $f\in L^2(\omega)$, $\tilde{f}$ est la fonction de $L^2(\Omega)$ obtenue en prolongeant f par zéro en dehors de ω.

$$=(w_n, (L_n+\delta)\tilde{\varphi})_\Omega$$
$$=(w_n, (L_0+\delta)\tilde{\varphi})_\Omega$$
$$=(l_0+\delta)[w_n, \tilde{\varphi}]$$
$$=(l_0+\delta)[w, \tilde{\varphi}],$$

parce que, par extraction de sous-suite, w_n converge vers w dans $H^m(\Omega)$ faible et que $(l_0+\delta)[\ ,\ ]$ est bornée dans $H^m(\Omega)$. Le dernier terme est $(l+\delta)[w_\omega, \varphi]$. Pour chaque $g\in D(L)\subset H_0^m(\omega)$ il existe $\varphi_n\in C_0^\infty(\omega)$ telle que $\varphi_n\to g$ dans $H^m(\omega)$. Donc,

$$(f, g)_\omega=(l+\delta)[w_\omega, g]$$
$$=(w_\omega, (L+\delta)g) \qquad \text{pour tout } g\in D(L).$$

Comme

$$(f, g)_\omega=((L+\delta)(L+\delta)^{-1}f, g)_\omega$$
$$=((L+\delta)^{-1}f, (L+\delta)g)_\omega,$$

on a

$$(L+\delta)^{-1}f=w_\omega=(M\tilde{f})_\omega.$$

Comme

$$(Mu)_\omega=(M\tilde{u}_\omega)_\omega=(L+\delta)^{-1}(u_\omega),$$

on a

$$(Mu)_\omega\in D(L).$$

Ainsi, on a démontré le lemme.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Par le principe du mini-max, on a

$$(\lambda_j(L_1)+\delta)^{-1}\geqq \cdots \geqq(\lambda_j(L_n)+\delta)^{-1}\geqq(\lambda_j(L_{n+1})+\delta)^{-1}\geqq \cdots \geqq\lambda_j(M).^{4)}$$

Donc il existe une constante $\mu_j\geqq\lambda_j(M)$ telle que $\lim_{n\to\infty}(\lambda_j(L_n)+\delta)^{-1}=\mu_j$. Comme la suite des fonctions propres orthonormalisées $\varphi_j(L_n)$ associées à $\lambda_j(L_n)$ est précompacte dans $L^2(\Omega)$, on peut supposer qu'il existe une fonction $\psi_j\in L^2(\Omega)$ telle que $\lim_{n\to\infty}\varphi_j(L_n)=\psi_j$ dans $L^2(\Omega)$ et que ψ_j soient orthonormalisées. Puisque $(L_n+\delta)^{-1}\varphi_j=(\lambda_j(L_n)+\delta)^{-1}\varphi_j$, on a $M\psi_j=\mu_j\psi_j$ et $\mu_i=\lambda_i(M)$. Par le lemme, $\operatorname{supp}\psi_j\subset\bar{\omega}$ et $\psi_{j,\omega}\in D(L)$. De plus, $(M\psi_j)_\omega=\mu_j(\psi_{j,\omega})=(L+\delta)^{-1}(\psi_{j,\omega})$. Donc, $\psi_{j,\omega}$ est la fonction propre orthonormalisée associée à valeur propre $\mu_j^{-1}-\delta$ de L. On en déduit que $\lambda_j(M)=(\lambda_j(L)+\delta)^{-1}$ grâce au (ii) du lemme. Donc, $\lambda_j(L)=\lim_{n\to\infty}\lambda_j(L_n)$.

CONTRE-EXEMPLE 2. Soit $a(t)\in C^\infty([-1, 1])$, $a(t)>0$ pour $t\in]0, 1]$, $a(t)=0$ pour $t\leqq0$.

$$(N, N)_n \qquad \begin{cases} -u''+na(t)u=\lambda u & \text{pour } t\in]-1, 1[, \\ u'(-1)=u'(1)=0. \end{cases}$$

---

4) Ici, on numérote les valeurs propres positives de M telles que $\lambda_1(M)\geqq\lambda_2(M)\geqq\cdots\geqq\lambda_j(M)\geqq\cdots>0$.

Le problème restreint à l'intervalle $]-1, 0[$ est :

$$(N, \nu) \qquad \begin{cases} -u''=\lambda u & \text{dans }]-1, 0[\\ u'(-1)=u'(0)=0 \,. \end{cases}$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_j=\pi^2(j-1)^2$, $j=1, 2, \cdots$. D'autre part, quand n tend vers ∞, les valeurs propres de $(N, N)_n$ se rapprochent, par le théorème précédent, de celles du problème

$$(N, d) \qquad \begin{cases} -u''=\lambda u & \text{dans }]-1, 0[\\ u'(-1)=u(0)=0 \end{cases}$$

qui sont $\lambda_j=\pi^2(j-1/2)^2$, $j=1, 2, \cdots$. En conséquence, pour j fixé, la monotonie de j-ème valeur propre n'est pas vérifiée pour le problème $(N, N)_n$ avec n assez grand.

CONTRE-EXEMPLE 2′. Nous pouvons voir plus concrètement le comportement des valeurs propres dans le cas où $a(t)$ est discontinue. Soit

$$a(t)=\begin{cases} 1 & t\in[0, 1] \\ 0 & t\in[-1, 0[\,. \end{cases}$$

Considérons le problème :

$$(N, N)_n \qquad \begin{cases} -u''+nau=\lambda u & \text{pour } t\in]-1, 1[\\ u'(-1)=u'(1)=0 & \cdots \text{ condition aux limites} \\ u(+0)=u(-0), \quad u'(+0)=u'(-0) & \cdots \text{ condition de joint}\,. \end{cases}$$

Soit $n>\lambda$. On peut facilement trouver la solution de $(N, N)_n$. Soit

$$u(t)=\begin{cases} Ae^{\sqrt{n-\lambda}\,t}+Be^{-\sqrt{n-\lambda}\,t} & 0<t<1 \\ A'\cos\sqrt{\lambda}\,t+B'\sin\sqrt{\lambda}\,t & -1<t<0 \,. \end{cases}$$

Par la condition de joint, $A=\frac{1}{2}\Big(A'+\sqrt{\frac{\lambda}{n-\lambda}}B'\Big)$ et $B=\frac{1}{2}\Big(A'-\sqrt{\frac{n}{n-\lambda}}B'\Big)$. De plus, les valeurs propres vérifient l'équation

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}=\sqrt{\frac{n-\lambda}{\lambda}}\ \operatorname{th}\sqrt{n-\lambda} \qquad \text{pour } n>\lambda\,.$$

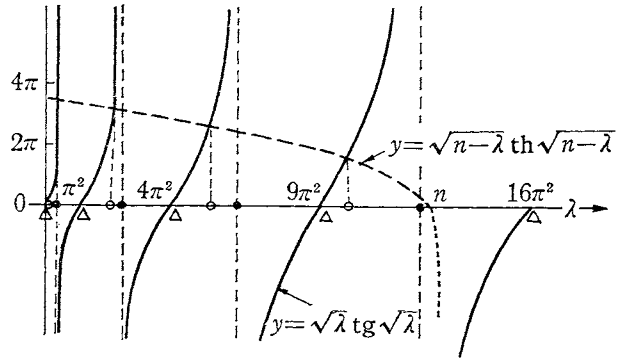

Fig. 1.

$\lambda_j(N, d)$: $\lambda_1=(1/4)\pi^2$, $\lambda_2=(9/4)\pi^2$, ··· indiqués par le signe ●.

$\lambda_j(N, N)_n$: $\lambda_1 \doteqdot (1/4)\pi^2$, $\lambda_2 \doteqdot (9/4)\pi^2$, ··· indiqués par le signe ○.

$\lambda_j(N, \nu)$: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\pi^2$, ··· indiqués par le signe △.

REMARQUE. Si $n<\lambda$, la solution de l'équation $(N, N)_n$ est

$$u(t)=\begin{cases} A\cos\sqrt{\lambda-n}\,t+B\sin\sqrt{\lambda-n}\,t & 0<t<1\,, \\ A'\cos\sqrt{\lambda}\,t+B'\sin\sqrt{\lambda}\,t & -1<t<0\,. \end{cases}$$

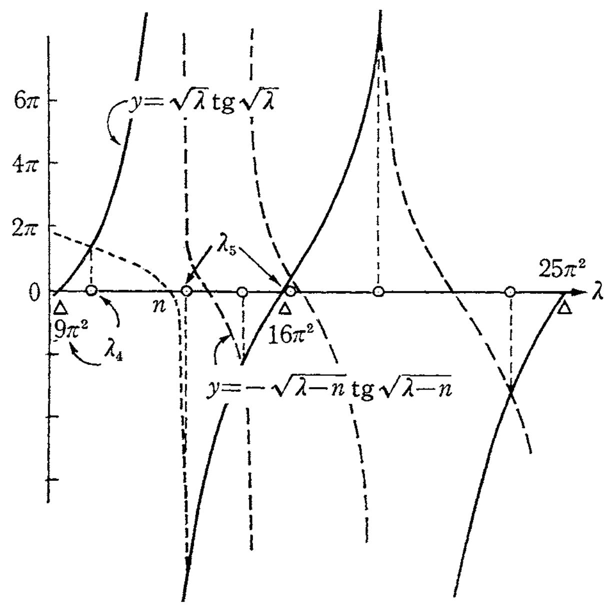

Fig. 2.

On a $A=A'$, $B=\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-n}}B'$ par les conditions de joint.

De plus, par la condition aux limites, on a l'équation des valeurs propres $\lambda>n$:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}=-\sqrt{\frac{\lambda-n}{\lambda}}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda-n}\ .$$

On a

$$\lambda_j((N, N)_n)<\lambda_j(N, \nu) \quad \text{si} \quad \lambda_j((N, N)_n)>n\,.$$

Ce fait montre que la convergence dans le Théorème 1 n'est pas uniforme en j.

3. On se restreint au cas du laplacien sans le terme inférieur :

$$-\Delta u=\lambda u\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}=0\,.$$

CONTRE-EXEMPLE 3 (domaine avec coin). Soit

$$\Omega=\{(r, \theta)\in \boldsymbol{R}^2\,|\,r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq\alpha\pi\}\ .$$

Considérons le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda u \qquad \text{dans } \Omega\,, \\ u(x)=A(r)B(\theta)\,, \\ A(0)<+\infty, \qquad \dfrac{dA}{dr}(1)=0\,, \\ B'(0)=B'(\alpha\pi)=0\,. \end{cases}$$

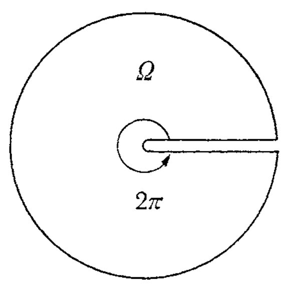

Fig. 3.

Par la séparation des variables,

$$B_{\theta\theta}+k^2B=0$$
$$B'(0)=B'(\alpha\pi)=0\,.$$

$B(\theta)=C_1\cos k\theta+C_2\sin k\theta$ et par condition aux limites,

$$B(\theta)=C\cos k\theta,\text{ où } k\in\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{Z}\equiv\left\{0,\ \pm\frac{1}{\alpha},\ \pm\frac{2}{\alpha},\ \cdots\right\}.$$

Donc, $A(r)=\text{const. } J_k(\sqrt{\lambda}r)$, $k\geqq 0$ où J_k est la fonction de Bessel. L'équation des valeurs propres est $J'_k(\sqrt{\lambda})=0$. Par exemple, posons $\alpha=2$ (voir Fig. 3). On peut voir que la 2ème valeur propre est plus petite que celle du domaine $D=\{(r,\theta)|r\leqq 1\}$ où l'équation des valeurs est $J'_k(\sqrt{\lambda})=0$, $k=1, 2, \cdots$.

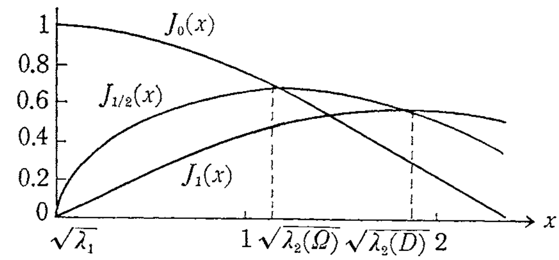

Fig. 4.

CONTRE-EXEMPLE 4. Considérons le problème de Neumann dans un domaine quelconque Ω. On peut le contracter afin que la 2ème valeur propre devienne aussi petite que l'on veut. Cet exemple a été présenté par Courant-Hilbert [1] pour montrer la discontinuité de la valeur propre par rapport au domaine.

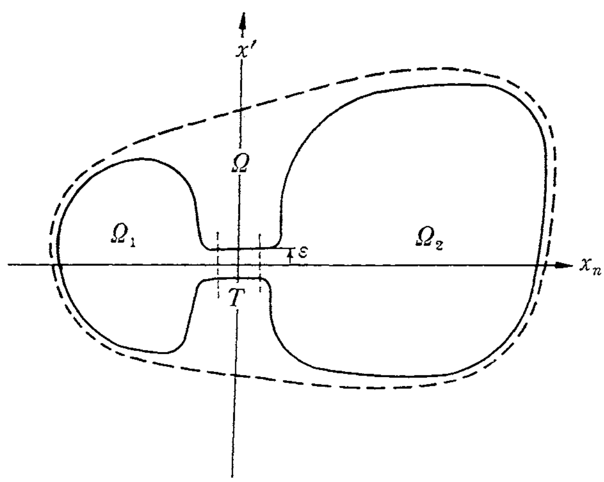

Fig. 5.

On prend un sous-domaine ω tel que

1) $\omega=\Omega_1\cup T\cup\Omega_2$
2) $T=\{x\in\boldsymbol{R}^n|\,x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2=|x'|^2\leqq\varepsilon^2,\ |x_n|\leqq\theta\}$

3) mesure $(\Omega_i)=\omega_i<+\infty$, $i=1,2$ et $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$.

La 2ème valeur propre du problème de Neumann s'écrit

$$\lambda_2(\omega)=\min_{\substack{\varphi\in H^1(\omega)\\ \int_\omega \varphi\cdot 1dx=0}} \frac{\int_\omega |\nabla\varphi|^2dx}{\int_\omega |\varphi|^2dx}.$$

Soit

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\,, & x\in\Omega_1 \\ \dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2\theta}x_n\,, & x\in T \\ b\,, & x\in\Omega_2 \end{cases}$$

où a, b sont les constantes telles que

$$\int\varphi(x)\cdot 1dx=a\omega_1+b\omega_2+\int_T\varphi dx$$

$$=a\omega_1+b\omega_2+\frac{a+b}{2}\,\mathrm{mes}\,(T)=0\,.$$

Comme $\int|\varphi|^2dx\geqq a^2\omega_1+b^2\omega_2$ et que

$$\int|\nabla\varphi|^2dx=\int_T\left|\frac{b-a}{2\theta}\right|^2dx=\frac{|b-a|^2}{2\theta}\int_{|x'|\leqq\varepsilon}dx_1\cdots dx_{n-1}$$

$$=\mathrm{const.}\ \frac{|b-a|^2}{2\theta}\varepsilon^{n-1}\,,$$

on a

$$\lambda_2(\omega)\leqq\frac{\mathrm{const.}|b-a|^2\varepsilon^{n-1}}{(a^2\omega_1+b^2\omega_2)(2\theta)}\,.$$

Donc, $\lambda_2(\omega)$ devient infiniment petite quand ε tend vers 0.

4. Il semble difficile de caractériser la déformation du domaine qui conserve la monotonie même pour le simple laplacien. On donnera une condition suffisante et quelques exemples. Pour cela, on emploie la formulation variationnelle du problème de Neumann pour le laplacien.

Soit Ω un domaine borné de $\boldsymbol{R}^n$ ayant la propriété de cône. On définit le quotient de Rayleigh pour $u\in H^1(\Omega)$

$$\rho_\Omega(u)=\frac{\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx}{\int_\Omega|u(x)|^2du}. \tag{4.1}$$

Alors la j-ème valeur propre $\lambda_j(\Omega)$ est définie par

$$\lambda_j(\Omega)=\sup_M \inf_u \rho_\Omega(u) \tag{4.2}$$

où M parcourt tous les sous-espaces de dimension $j-1$ dans $L^2(\Omega)$ et où u parcourt $H^1(\Omega)$ avec $u\perp M$ dans $L^2(\Omega)$. On considère deux domaines ω et Ω bornés de $\boldsymbol{R}^n$ et un homéomorphisme f surjectif de $\bar{\Omega}$ sur $\bar{\omega}$:

$$f:\Omega\ni x \longrightarrow (f_1(x),\cdots,f_n(x))\in\omega\,. \tag{4.3}$$

En posant $f'(x)=(\partial f_p(x)/\partial x_q)_{1\leq p,q\leq n}$, on suppose que $f'(x)$ soit bornée mesurable et que $\det f'(x)>0$ pour $x\in\bar{\Omega}$.

THÉORÈME 2. *Soient ω et Ω deux domaines bornés ayant la propriété de cône. Si on peut choisir $f(x)$ définie ci-dessus telle que*

$$\|f'(x)\|^2\leqq \frac{\operatorname*{ess.\,inf}_{x\in\Omega} \det f'(x)}{\operatorname*{ess.\,sup}_{x\in\Omega} \det f'(x)} \tag{4.4}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur déduite de la norme l^2 de $\boldsymbol{R}^n$, alors $\lambda_j(\omega)\geqq\lambda_j(\Omega)$.

COROLLAIRE 3. *Dans le cas où $\det f'(x)=const.$, si*

$$\|f'(x)\|\leqq 1\,, \tag{4.5}$$

alors $\lambda_j(\omega)\geqq\lambda_j(\Omega)$.

REMARQUE. Ce théorème a été démontré par l'auteur d'abord avec une condition plus forte sur $f(x)$ par la méthode de perturbation analytique du bord. Une discussion avec T. Kato nous a permis d'améliorer les résultats et de mettre au point une démonstration plus simple et plus directe.

DÉMONSTRATION. On note $\nabla_x u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n}$.

$$\rho_\Omega(u)=\int_\Omega \|\nabla_x u\|^2_{R^n}\,dx\Big/\int_\Omega |u(x)|^2 dx$$

$$=\int_\omega \|f'\cdot\nabla_y v\|^2_{R^n} \det\left(\frac{dx}{dy}\right)dy\Big/\int_\omega |v|^2 \det\left(\frac{dx}{dy}\right)dy$$

où $v(y)=u(x(y))$ avec $y=f(x)$. Par l'hypothèse (4.4), on a

$$\rho_\Omega(u)\leqq\int_\omega \|\nabla_y v\|^2_{R^n}(\operatorname*{ess.\,inf}_{x\in\Omega} \det f'(x)) \det\left(\frac{dx}{dy}\right)dy\Big/$$

$$\int_\omega |v|^2(\operatorname*{ess.\,sup}_{x\in\Omega} \det f'(x)) \det\left(\frac{dx}{dy}\right)dy$$

$$\leqq\int_\omega \|\nabla_y v\|^2_{R^n}\,dy\Big/\int_\omega |v|^2 dy=\rho_\omega(v)\,.$$

Pour un sous-espace M de dimension $j-1$ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\min_u \{\rho_\Omega(u)\,;\ u\perp M,\ u\in H^1(\Omega)\} \leqq \min_u \{\rho_\omega(v)\,;\ u\perp M,\ u\in H^1(\Omega)\}$$

$$=\min_v \{\rho_\omega(v)\,;\ v\perp M^*,\ v\in H^1(\omega)\}$$

où

$$M^*=\left\{\phi(x(y))\det\left(\frac{dx}{dy}\right);\ \phi\in M\right\}\subset L^2(\omega)\,.$$

Ainsi, on a

$$\lambda_j(\Omega)=\sup_{\dim M=j-1}\ \inf_{u\perp M}\rho_\Omega(u)$$

$$\leqq \sup_{\dim M^*=j-1}\ \inf_{v\perp M^*}\rho_\omega(v)=\lambda_j(\omega)\,.$$

EXEMPLE 5. Soit $f(x)=(\alpha_1 x_1, \cdots, \alpha_n x_n)$ où $0<\alpha_i\leqq 1$, $i=1, 2, \cdots, n$. Alors on a $\det(f'(x))=\alpha_1\cdots\alpha_n$ et $\|f'\|=\max\alpha_i\leqq 1$.

EXEMPLE 6 ($n=2$). Soit $f(x_1, x_2)=(\alpha_1 x_1+\varepsilon g(x_2), \alpha_2 x_2)$ où $0<\alpha_1$, $\alpha_2<1$. On a $\|f'(x)\|<1$ dans un domaine borné si la constante ε est assez petite.

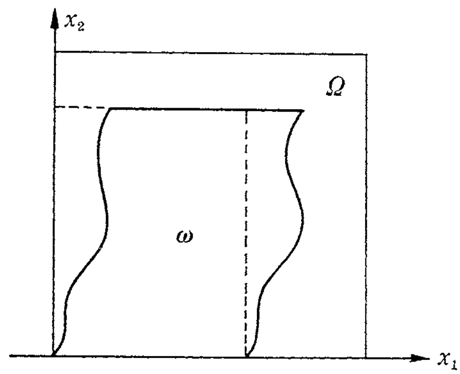

Fig. 6.

EXEMPLE 7 ($n=2$). Soit ω le triangle de sommets O, A', B' et Ω le triangle de sommets O, A, B. En posant

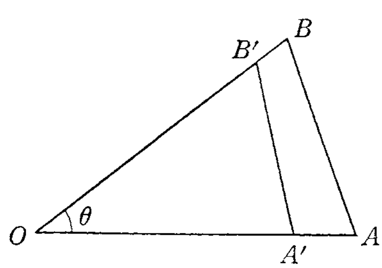

Fig. 7.

$$\alpha\, \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'} \quad \text{et} \quad \beta\, \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}\,,$$

on suppose que

$$|\beta-\alpha|\,|\cot\theta|+|\beta|\leqq 1\,, \qquad |\beta-\alpha|\,|\cot\theta|+|\alpha|\leqq 1\,. \tag{4.6}$$

Evidemment, il existe une transformation affine f unique telle que $f(\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA'}$, $f(\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OB'}$. On a $\det f'=\alpha\beta$ et $\|f'\|\leqq 1$ grâce à (4.6).

EXEMPLE 8 ($n=2$). Soient Ω le polygone de sommets $A_1, A_2, \cdots, A_n$ et ω le polygone de sommets $A_1', \cdots, A_n'$ tels qu'il y a un point O dans ω:

$$\begin{cases} \alpha_k \overrightarrow{OA_k}=\overrightarrow{OA_k'} & \text{pour } k=1, 2, \cdots, n \\ 0<\alpha_k<1\,. \end{cases}$$

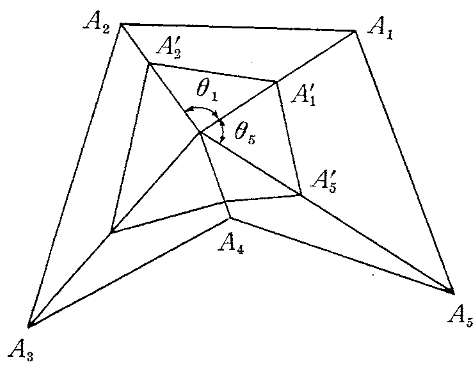

Fig. 8.

On suppose que

$$\begin{cases} |\alpha_k|+|\alpha_{k+1}-\alpha_k|\,|\cot\theta_k|\leqq\gamma \\ |\alpha_{k+1}|+|\alpha_{k+1}-\alpha_k|\,|\cot\theta_k|\leqq\gamma \\ k=1, 2, \cdots, n \qquad (\alpha_{n+1}=\alpha_1)\,, \end{cases} \tag{4.7}$$

où on a posé $\gamma=\min_k \alpha_k\alpha_{k+1}/\max_k \alpha_k\alpha_{k+1}$. Alors $\lambda_j(\omega)\geqq\lambda_j(\Omega)$.

En utilisant cet Exemple 8 et l'approximation du domaine régulier par des polygones, on a enfin

PROPOSITION. *Considérons deux domaines ω et Ω bornés étoilés par rapport à un point $O\in\omega$ dans $\boldsymbol{R}^2$:*

$$\omega=\{(r, \theta)\in\boldsymbol{R}^2\,;\ r<\varphi(\theta)\}$$

$$\Omega=\{(r, \theta)\in\boldsymbol{R}^2\,;\ r<\Phi(\theta)\}\,.$$

On suppose que φ, Φ soient de classe C^1. Si, en posant

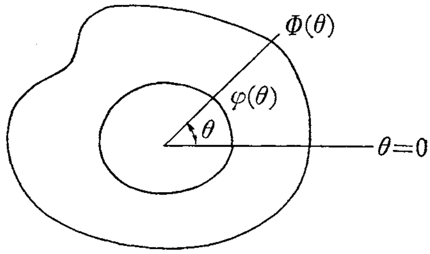

Fig. 9.

$$\alpha(\theta)=\varphi(\theta)/\Phi(\theta)\,,$$

$$|\alpha'(\theta)|+\alpha(\theta)<\min_{\theta}\alpha^2(\theta)/\max_{\theta}\alpha^2(\theta)\,,$$

alors $\lambda_j(\omega)\geqq\lambda_j(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. On a seulement à noter que

$$|\alpha(\theta')-\alpha(\theta)||\cot(\theta'-\theta)|=\left|\frac{\alpha(\theta')-\alpha(\theta)}{\theta'-\theta}\right|\left|\frac{\theta'-\theta}{\sin(\theta'-\theta)}\right||\cos(\theta'-\theta)|\,.$$

REMARQUE. Même pour deux domaines convexes tels que l'un contienne l'autre, la monotonie n'est pas vraie en général. Soient

$$\omega=\{x\in\boldsymbol{R}^3\,;\ |x_j|\leqq\pi/2,\ j=1,2,3\}$$

et

$$\Omega=\{x\in\boldsymbol{R}^3\,;\ |x|=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}\leqq(\sqrt{3}/2)\pi\}\,.$$

Alors $\lambda_2(\omega)=1$ mais $\lambda_2(\Omega)>1$.[5)]

Bibliographie

[1] Courant, R. and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, I, Interscience, New York, 1953.

[2] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, Berlin, 1966.

[3] Ōeda, K., Approximation of obstacles by high potentials convergence of eigenvalues, Proc. Japan Acad. **46** (1970), 663-667.

[4] Agmon, S., Lecture on elliptic boundary value problems, Van Nostrand Math. Studies, Princeton, 1965.

(Reçu le 30 novembre 1976)

Département de Mathématiques
Université Jôchi
7, Kioicho, Chiyoda-ku, Tokyo
102 Japon

5) Communiqué par J. Ralston.