Sur le problème de Fuchs sur un tore, II

Dédié à Monsieur le Professeur Shigeru Furuya pour son 60^{e} anniversaire

Par Kazuo OKAMOTO

§ 1. Problème.

Suite au mémoire précédent[1], nous considérons dans cette deuxième partie du mémoire le problème de Fuchs pour l'équation différentielle du second ordre du type fuchsien définie sur un tore $\boldsymbol{T}^1$ de dimension complexe un,

$$D^2y+q_1(x)Dy+q_2(x)y=0\,, \tag{1.1}$$

où D désigne une dérivation sur $\boldsymbol{T}^1$ correspondant à une certaine forme différentielle méromorphe de degré un. On suppose que (1.1) ait un schéma de Riemann donné ci-dessous:

$$\begin{array}{cccl} x=\tau & x=t & x=\lambda_j & (j=1, 2, \cdots, m) \\ \sigma_0 & \sigma_t & 0 & \\ \sigma_0' & \sigma_t' & 2 & \end{array}$$

où

$$\sigma_0+\sigma_0'+\sigma_t+\sigma_t'=2-m\,. \tag{1.2}$$

Comme nous l'avons vu dans la section 1 du mémoire précédent (p. 141), l'équation (1.1) est équivalente à une équation linéaire définie sur $\boldsymbol{C}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x, t)\frac{dy}{dx}+p_2(x, t)y=0\,, \tag{1.3}$$

telle que

$$p_1(x, t)=k_1+c_0\zeta(x)+c_t\zeta(x-t)-\sum_{(j)}\zeta(x-\lambda_j)\,,^{2)} \tag{1.4}$$

$$c_0+c_t=m\,, \tag{1.5}$$

$$p_2(x, t)=k_2+b_0\zeta(x)+b_t\zeta(x-t)+\sum_{(j)}b_j\zeta(x-\lambda_j)+a_0\wp(x)+a_t\wp(x-t)\,, \tag{1.6}$$

$$b_0+b_t+\sum_{(j)}b_j=0\,, \tag{1.7}$$

---

1) K. OKAMOTO: On Fuchs's Problem on a torus, I, Funkcial. Ekvac. **14** (1971).

2) Dans la suite de cet article, on désigne par $\sum_{(j)}$ la somme pour j variant de 1 à m et par $\sum_{(l)}^{(j)}$ la somme pour l variant de 1 à m sauf $l=j$.

où $\zeta(u)$ est la ζ-fonction correspondant à la fonction elliptique $\wp(u)$ de Weierstrass. On désigne par $2\omega_1$ et $2\omega_3$ deux périodes de $\wp(u)$ et par Ω l'ensemble de toutes périodes.

La relation (1.2) est appelée celle de Fuchs. C'est facile de voir qu'elle est équivalente à (1.5).

Maintenant nous posons deux hypothèses:

(H.I) *Aucune de singularités* $x=\lambda_j$ *(mod* Ω*) ne soit du type logarithmique.*

(H.II) *Si* $x=0$ *(mod* Ω*)* ($x=t$ *(mod* Ω*) respectivement) soit du type logarithmique, alors* $\sigma_0=\sigma_0'$ ($\sigma_t=\sigma_t'$ *resp.).*

Nous disons que le point singulier d'une équation différentielle du type fuchsien est apparent lorsque tous les exposants en ce point sont des entiers et qu'il satisfait à l'hypothèse (H.I). En employant la méthode de Frobenius, on déduit de (H.I) les relations suivantes:

$$u_j+b_jv_j+b_j^2=0 \tag{1.8$_j$}$$

où

$$u_j=k_2+b_0\zeta(\lambda_j)+b_t\zeta(\lambda_j-t)+\sum_{(l)}^{(j)\;2)}b_l\zeta(\lambda_j-\lambda_l)+a_0\wp(\lambda_j)+a_t\wp(\lambda_j-t)\,, \tag{1.9$_j$}$$

$$v_j=k_1+c_0\zeta(\lambda_j)+c_t\zeta(\lambda_j-t)-\sum_{(l)}^{(j)}\zeta(\lambda_j-\lambda_l)\,. \tag{1.10$_j$}$$

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant:

(P) *Déterminer les coefficients des fonctions* $p_i(x, t)$ $(i=1, 2)$, $k_1, k_2, a_0, a_t, c_0, c_t, b_0, b_t, b_j, \lambda_j$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ *comme fonctions d'un paramètre* t *variant dans un domaine* U *qui ne contient aucun point de* Ω*, de telle manière que l'équation* (1.3) *ait un système fondamental des solutions dont la monodromie associée soit indépendante de* t.

Premièrement il est claire que a_0, a_t, c_0 et c_t ne dépendent pas de t.

Nous emploierons dans ce qui suit des notations différents de celles de la première partie où les études ont été restreintes à l'équation différentielle,

$$\frac{d^2z}{dx^2}=p(x, t)z\,. \tag{1.11}$$

§ 2. Résultat.

Posons

$$\Phi(x, t)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int p_1(x, t)dx\right). \tag{2.1}$$

Notons que la transformation

$$y=z\Phi(x, t) \tag{2.2}$$

ramène l'équation (1.3) à une équation de la forme

$$\frac{d^2z}{dx^2}=p(x,t)z \tag{1.11}$$

telle que

$$p(x,t)=-p_2(x,t)+\frac{1}{4}p_1(x,t)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}p_1(x,t)\,. \tag{2.3}$$

En tenant compte de (1.4) et (1.6), on peut écrire

$$\begin{aligned} p(x,t)=k&+\beta_0\zeta(x)+\beta_t\zeta(x-t)+\Sigma_{(j)}\beta_j\zeta(x-\lambda_j)\\ &+\alpha_0\wp(x)+\alpha_t\wp(x-t)+\frac{3}{4}\Sigma_{(j)}\wp(x-\lambda_j)\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\beta_0+\beta_t+\Sigma_{(j)}\beta_j=0\,, \tag{2.5}$$

où les coefficients sont déterminés par le tableau suivant:

Tableau I

$$\begin{aligned} \beta_0&=\frac{1}{2}c_0(k_1-c_t\zeta(t)+\Sigma_{(j)}\zeta(\lambda_j))-b_0\\ \beta_t&=\frac{1}{2}c_t(k_1+c_0\zeta(t)+\Sigma_{(j)}\zeta(\lambda_j-t))-b_t\\ \beta_j&=-\frac{1}{2}(k_1+c_0\zeta(\lambda_j)+c_t\zeta(\lambda_j-t)-\Sigma_{(l)}^{(j)}\zeta(\lambda_j-\lambda_l))-b_j\\ \alpha_0&=-a_0+\frac{1}{4}c_0^2-\frac{1}{2}c_0\\ \alpha_t&=-a_t+\frac{1}{4}c_t^2-\frac{1}{2}c_t\\ k&=-k_2+\frac{1}{4}k_1^2-\frac{1}{4}c_0\Sigma_{(j)}(\zeta(\lambda_j)^2-\wp(\lambda_j))+\frac{1}{4}c_0c_t(\zeta(t)^2-\wp(t))\\ &\quad-\frac{1}{4}c_t\Sigma_{(j)}(\zeta(\lambda_j-t)^2-\wp(\lambda_j-t))\\ &\quad+\frac{1}{4}\Sigma_{(l)}^{(j)}(\zeta(\lambda_j-\lambda_l)^2-\wp(\lambda_j-\lambda_l))\,. \end{aligned}$$

C'est claire que l'équation (1.11) ainsi obtenue satisfait à l'hypothèse (H.I). Dans ce cas, elle se réduit aux relations

$$\begin{aligned} &k+\beta_0\zeta(\lambda_j)+\beta_t\zeta(\lambda_j-t)+\Sigma_{(l)}^{(j)}\beta_l\zeta(\lambda_j-\lambda_l)\\ &\quad+\alpha_0\wp(\lambda_j)+\alpha_t\wp(\lambda_j-t)+\frac{3}{4}\Sigma_{(l)}^{(j)}\wp(\lambda_j-\lambda_l)-\beta_j^2=0\,,\\ &\qquad (j=1,2,\cdots,m)\,. \end{aligned} \tag{1.8$'_j$}$$

Maintenant, nous pouvons énoncer le théorème:

THÉORÈME 1. *Pour que l'équation* (1.3) *ait un système fondamental des solutions dont la monodromie associée soit indépendante de t, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient établies*:
(i) *l'équation* (1.11) *que l'on obtient à partir de l'équation* (1.3) *par la transformation* (2.2) *possède un système fondamental des solutions dont la monodromie associée est indépendante de* t;
(ii) *les fonctions* $k_1(t)$, $\lambda_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ *satisfont aux équations différentielles,*

$$\frac{dk_1}{dt}=0\,, \tag{2.6}$$

$$\sum_{(j)}\frac{d\lambda_j}{dt}=c_t\,. \tag{2.7}$$

Il est visible que l'équation (1.3) contient $6+m$ paramètres indépendants. Par ailleurs, l'ensemble de toutes monodromies d'équations du type (1.3) est muni d'une structure d'une variété analytique complexe de dimension complexe *neuf*. Alors il faut que l'on se donne à l'équation (1.3) au moins trois points singuliers apparents pour que cette équation possède la monodromie donnée de façon générale. En effet, nous obtiendrons le

THÉORÈME 2. *Supposons que* $m=2$. *Si l'équation* (1.3) *a un système fondamental des solutions dont la monodromie associée est indépendante de t, alors elle est nécessairement réductible.*

En outre, pour le cas où $m=3$, nous obtenons un résultat parail à celui de la première partie de ce mémoire. Nous l'étudierons en détail plus loin.

§ 3. Démonstration du théorème 1.

Nous dirons qu'une fonction $f(x, t)$ est uniforme lorsqu'elle est méromorphe sur $C\times U$, ayant deux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$ par rapport à x:

$$f(x+2\omega_h, t)=f(x, t) \qquad (h=1, 3)\,.$$

Les fonctions $p_i(x, t)$ $(i=1, 2)$ sont uniformes sur $C\times U$, si les fonctions $k_1(t)$, $k_2(t)$, $b_0(t)$, $b_t(t)$, $b_j(t)$, $\lambda_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ sont holomorphes dans U.

Rappelons d'abord le résultat donné dans la section 3 de la première partie. Il dit ceci:

PROPOSITION 3.1. *Supposons que la fonction* $p(x, t)$ *soit uniforme sur* $C\times U$. *Alors pour que l'équation*

$$\frac{d^2z}{dx^2}=p(x, t)z \tag{1.11}$$

ait un système fondamental des solutions dont la monodromie associée soit indé-

pendante de t, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $A(x, t)$, uniforme sur $\boldsymbol{C}\times U$, satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}-4p(x, t)\frac{\partial A}{\partial x}-2\frac{\partial p}{\partial x}(x, t)A+2\frac{\partial p}{\partial t}=0. \tag{3.1}$$

En outre, nous pourrons montrer pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x, t)\frac{dy}{dx}+p_2(x, t)y=0 \tag{1.3}$$

le résultat suivant:

PROPOSITION 3.2. *Supposons que les fonctions $p_i(x, t)$ soient uniformes sur $\boldsymbol{C}\times U$. Alors l'équation* (1.3) *a un système fondamental des solutions dont la monodromie associée est indépendante de t, si et seulement s'il existe deux fonctions $A_1(x, t)$, $A_2(x, t)$, uniformes sur $\boldsymbol{C}\times U$, telles que*

$$2\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(p_1(x, t)A_2)-\frac{\partial p_1}{\partial t}(x, t), \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}2\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}-4p_2(x, t)\frac{\partial A_2}{\partial x}-2\frac{\partial p_2}{\partial x}(x, t)A_2+2\frac{\partial p_2}{\partial t}\\=p_1(x, t)\Big(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}(p_1(x, t)A_2)+\frac{\partial p_1}{\partial t}(x, t)\Big).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ce résultat comprend la proposition 3.1. En effet, on obtient, en éliminant A_1 dans (3.2) et (3.3), l'équation différentielle

$$\frac{\partial^3 A_2}{\partial x^3}-4p(x, t)\frac{\partial A_2}{\partial x}-2\frac{\partial p}{\partial x}(x, t)A_2+2\frac{\partial p}{\partial t}(x, t)=0, \tag{3.1$'$}$$

telle que

$$p(x, t)=-p_2(x, t)+\frac{1}{4}p_1(x, t)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial p_1}{\partial x}(x, t). \tag{3.4}$$

Nous remarquons que cette relation (3.4) n'est rien autre que (2.3).

Maintenant, on suppose qu'il existe une solution de l'équation différentielle (3.1)$'$, $A_2(x, t)$, uniforme sur $\boldsymbol{C}\times U$. Posons

$$\Psi(x, t)=\int\frac{\partial p_1}{\partial t}dx.$$

D'une part, on peut déduire de (3.2)

$$\Psi(x, t)=p_1(x, t)A_2(x, t)-2A_1(x, t)-\frac{\partial A_2}{\partial x}(x, t).$$

Alors le système des équations différentielles (3.2) et (3.3) a une solution

$(A_1(x, t), A_2(x, t))$ dont chaque élément est une fonction uniforme sur $C\times U$, si et seulement si $\Psi(x, t)$ est uniforme sur $C\times U$. D'autre part, en tenant compte de (1.4) on obtient

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=c_t\wp(x-t)-\sum_{(j)}\frac{d\lambda_j}{dt}\wp(x-\lambda_j)+\frac{dk_1}{dt},$$

donc

$$\Psi(x, t)=-c_t\zeta(x-t)+\sum_{(j)}\frac{d\lambda_j}{dt}\zeta(x-\lambda_j)+\frac{dk_1}{dt}x.$$

Il en résulte que

$$\frac{dk_1}{dt}=0, \tag{2.6}$$

$$\sum_{(j)}\frac{d\lambda_j}{dt}=c_t. \tag{2.7}$$

Cela établit le théorème.

COROLLAIRE. *Soit* $\mathfrak{Y}(x, t)$ *un système fondamental des solutions de* (1.3) *dont la monodromie associée est indépendante de t. Alors celle du système fondamental des solutions de* (1.11)

$$\mathfrak{Z}(x, t)=\mathfrak{Y}(x, t)\Phi(x, t)$$

est aussi indépendante de t.

PREUVE. Nous pouvons vérifier que $\Phi(x, t)$ satisfait aux identités suivantes;

$$\Phi(x+2\omega_h, t)=e_h(t)\Phi(x, t) \qquad (h=1, 3),$$

où

$$e_h(t)=\exp(-k_1\omega_h+\zeta(\omega_h)(c_t\cdot t-\sum_{(j)}\lambda_j)).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $e_h(t)$ soit indépendante de t est donnée par

$$-\frac{dk_1}{dt}\omega_h+\zeta(\omega_h)\left(c_t-\sum_{(j)}\frac{d\lambda_j}{dt}\right)=0 \qquad (h=1, 3).$$

Ces équations sont équivalentes à (2.6) et (2.7) en raison de la relation de Legendre:

$$\omega_1\zeta(\omega_3)-\omega_3\zeta(\omega_1)=-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\pi.$$

§ 4. Système d'équations différentielles.

On se donne une proposition suivante:

PROPOSITION 4.1. $A_2(x, t)$ *possède les propriétés suivantes:*

(i) $x=0$ $(\mathrm{mod}\ \Omega)$ *est un zéro de degré au moins un,*
(ii) $A_2(x, t)$ *est holomorphe à* $x=t$ $(\mathrm{mod}\ \Omega)$,
(iii) *chaque* $x=\lambda_j$ $(\mathrm{mod}\ \Omega)$ *doit être un pôle de degré un.*

Ce résultat a été donné dans la première partie pour l'équation (1.11). La même preuve s'applique, avec une légère modification, au cas qui nous occupe.

Posons d'après la proposition 4.1

$$A_2(x, t)=L+\Sigma_{(j)}M_j\zeta(x-\lambda_j)\,, \tag{4.1}$$

où

$$\Sigma_{(j)}M_j=0\,. \tag{4.2}$$

Si $m=0$ ou 1, $A_2(x, t)$ n'est pas dépendante de x. Alors nous supposons que m soit supérieur ou égal à deux.

Nous allons d'abord dériver un système des équations différentielles pour les coefficients de $p(x, t)$, k, β_0, β_t, β_j, λ_j, $(j=1, 2, \cdots, m)$ et ensuite le récrire en un système concernant b_0, b_t, b_j, λ_j, au moyen du tableau I. Pour cela, on porte (2.4) et (4.1) dans l'équation (3.1) et fait des calculs d'une même manière que ceux de la première partie. Après des calculs attentifs, on obtient

$$L-\Sigma_{(j)}M_j\zeta(\lambda_j)=0\,, \tag{4.3}$$

$$L-\Sigma_{(j)}M_j\zeta(\lambda_j-t)=-1\,, \tag{4.4}$$

$$\frac{d\lambda_j}{dt}+2\beta_jM_j+L+\Sigma_{(l)}^{(j)}M_l\zeta(\lambda_j-\lambda_l)=0\,, \tag*{(4.5)$_{(j)}$}$$

des coefficients de $\wp'(x)$, $\wp'(x-t)$, $\wp'(x-\lambda_j)$,

$$\begin{aligned}&k+\beta_0\zeta(\lambda_j)+\beta_t\zeta(\lambda_j-t)+\Sigma_{(l)}^{(j)}\beta_l\zeta(\lambda_j-\lambda_l)\\&\qquad+\alpha_0\wp(\lambda_j)+\alpha_t\wp(\lambda_j-t)+\frac{3}{4}\Sigma_{(l)}^{(j)}\wp(\lambda_j-\lambda_l)-\beta_j^2=0\,,\end{aligned} \tag*{(4.6)$_{(j)}$}$$

des coefficients de $\wp(x-\lambda_j)$,

$$\frac{d\beta_0}{dt}+\beta_0\Sigma_{(j)}M_j\wp(\lambda_j)-\alpha_0\Sigma_{(j)}M_j\wp'(\lambda_j)=0\,, \tag{4.7}$$

$$\frac{d\beta_t}{dt}+\beta_t\Sigma_{(j)}M_j\wp(\lambda_j-t)-\alpha_t\Sigma_{(j)}M_j\wp'(\lambda_j-t)=0\,, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d\beta_j}{dt}-\beta_0M_j\wp(\lambda_j)-\beta_tM_j\wp(\lambda_j-t)+\Sigma_{(l)}^{(j)}(\beta_jM_l-\beta_lM_j)\wp(\lambda_j-\lambda_l)\\&\qquad+\alpha_0M_j\wp'(\lambda_j)+\alpha_tM_j\wp'(\lambda_j-t)+\frac{3}{4}\Sigma_{(l)}^{(j)}(M_j+M_l)\wp'(\lambda_j-\lambda_l)=0\,,\end{aligned} \tag*{(4.9)$_j$}$$

des coefficients de $\zeta(x)$, $\zeta(x-t)$, $\zeta(x-\lambda_j)$ et enfin

$$(4.10)\qquad \frac{dk}{dt}=\beta_0\Sigma_{(j)}M_j\Big(\wp(\lambda_j)\zeta(\lambda_j)+\frac{1}{2}\wp'(\lambda_j)\Big)$$
$$+\beta_t\Sigma_{(j)}M_j\Big(\wp(\lambda_j-t)\zeta(\lambda_j-t)+\frac{1}{2}\wp'(\lambda_j-t)\Big)$$
$$-\Sigma_{(j)}\beta_j\Sigma_{(l)}^{(j)}M_l\Big(\wp(\lambda_j-\lambda_l)\zeta(\lambda_j-\lambda_l)+\frac{1}{2}\wp'(\lambda_j-\lambda_l)\Big)$$
$$-\alpha_0\Sigma_{(j)}M_j(\wp'(\lambda_j)\zeta(\lambda_j)+2\wp(\lambda_j)^2)$$
$$-\alpha_t\Sigma_{(j)}M_j(\wp'(\lambda_j-t)\zeta(\lambda_j-t)+2\wp(\lambda_j-t)^2)$$
$$-\frac{3}{4}\Sigma_{(j)}M_j\Sigma_{(l)}^{(j)}(\wp'(\lambda_j-\lambda_l)\zeta(\lambda_j-\lambda_l)+2\wp(\lambda_j-\lambda_l)^2)\,.$$

Les relations $(4.6)_j$ ne sont pas autres que $(1.8)'_j$. De plus, nous pourrons vérifier que les premiers membres de $(4.6)_j$ et

$$(2.5)\qquad \beta_0+\beta_t+\Sigma_{(j)}\beta_j=0$$

seront les integrales premières des équations $(4.5)_j$, (4.7), (4.8), $(4.9)_j$ et (4.10). Toutes les équations données ci-dessus sont compatibles parmi elles.

En tenant compte du tableau I, on obtient

$$(4.11)_j\qquad \frac{d\lambda_j}{dt}=2M_jb_j+M_j(k_1+c_0\zeta(\lambda_j)+c_t\zeta(\lambda_j-t))-\Sigma_{(l)}^{(j)}(M_j+M_l)\zeta(\lambda_j-\lambda_l)-L\,,$$

à partir des équations $(4.6)_j$ et

$$(4.12)\qquad \frac{db_0}{dt}+\Sigma_{(j)}M_j(b_0+c_0b_j)\wp(\lambda_j)-a_0\Sigma_{(j)}M_j\wp'(\lambda_j)=0\,,$$

$$(4.13)\qquad \frac{db_t}{dt}+\Sigma_{(j)}M_j(b_t+c_tb_j)\wp(\lambda_j-t)-a_t\Sigma_{(j)}M_j\wp'(\lambda_j-t)=0\,,$$

$$(4.14)_j\qquad \frac{db_j}{dt}-(b_0+c_0b_j)M_j\wp(\lambda_j)-(b_t+c_tb_j)M_j\wp(\lambda_j-t)$$
$$+\Sigma_{(j)}^{(l)}(M_j+M_l)(b_j-b_l)\wp(\lambda_j-\lambda_l)+a_0M_j\wp'(\lambda_j)+a_t\wp'(\lambda_j-t)=0$$

à partir de (4.7), (4.8), $(4.9)_j$.

En outre, nous avons deux équations differentielles.

$$(2.6)\qquad \frac{dk_1}{dt}=0\,,$$

$$(2.7)\qquad \Sigma_{(j)}\frac{d\lambda_j}{dt}=c_t\,,$$

et les relations $(1.8)_j$ qui sont équivalentes à l'hypothèse (H.I). Nous montrons que

PROPOSITION 4.2. *L'équation différentielle* (2.7) *est compatible avec le système obtenu ci-dessus, si et seulement si*

$$\Sigma_{(j)} M_j b_j = 0 . \tag{4.15}$$

PREUVE. Posons d'abord

$$f_j = \zeta(\lambda_j - t) - \zeta(\lambda_j) + \zeta(t) ,$$

$$f_{jl} = \zeta(\lambda_j - \lambda_l) - \zeta(\lambda_j) + \zeta(\lambda_l) .$$

En tenant compte de (4.3) et

$$c_0 + c_t = m , \tag{1.5}$$

on obtient à partir de $(4.11)_j$

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = 2M_j b_j + M_j k_1 + c_t M_j f_j + \Sigma_{(l)}^{(j)} (M_j + M_l) f_{jl} - M_j (\Sigma_{(l)} \zeta(\lambda_l) - c_t \zeta(t)) , \tag{4.11$'_j$}$$

dont on déduit

$$\Sigma_{(j)} \frac{d\lambda_j}{dt} = 2\Sigma_{(j)} M_j b_j + c_t \Sigma_{(j)} M_j f_j . \tag{4.16}$$

D'ailleurs, on obtient à partir de (4.3) et (4.4)

$$\Sigma_{(j)} M_j f_j = 1 , \tag{4.17}$$

de sorte que (4.16) se réduit d'après (2.7) à (4.15).

Cette proposition nous donne une relation que les coefficients M_j de la fonction $A_2(x, t)$ doivent remplir.

§ 5. Démonstration du théorème 2.

Lorsque $m=2$, on obtient à partir de (4.2) et (4.5)

$$M_1 = \frac{1}{f_1 - f_2} , \qquad M_2 = -M_1 .$$

En outre, nous avons d'après (4.15) la relation

$$-M_1 b_1 = M_2 b_2 ,$$

qui se réduit à

$$b_1 = b_2 .$$

Posons

$$b=b_1=b_2\,.$$

D'une part, les équations $(4.14)_j$ s'écrivent

$$\frac{db}{dt}=(b_0+c_0b)M_j\wp(\lambda_j)+(b_t+c_tb)M_j\wp(\lambda_j-t)+a_0M_j\wp'(\lambda_j)+a_tM_j\wp'(\lambda_j-t)\,,$$

pour $j=1, 2$, de sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned}(5.1)\qquad &(b_0+c_0b)(\wp(\lambda_1)+\wp(\lambda_2))+(b_t+c_tb)(\wp(\lambda_1-t)+\wp(\lambda_2-t))\\ &\quad -a_0(\wp'(\lambda_1)+\wp'(\lambda_2))-a_t(\wp'(\lambda_1-t)+\wp'(\lambda_2-t))=0\,.\end{aligned}$$

D'autre part, on déduit de $(1.8)_j$ la relation

$$(u_1-u_2)+b(v_1-v_2)=0\,.$$

En portant $(1.9)_j$, $(1.10)_j$ dans cette relation, on obtient

$$\begin{aligned}&(b_0+c_0b)(\zeta(\lambda_1)-\zeta(\lambda_2))+(b_t+c_tb)(\zeta(\lambda_1-t)-\zeta(\lambda_2-t))\\ &\quad +a_0(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))+a_t(\wp(\lambda_1-t)-\wp(\lambda_2-t))=0\,.\end{aligned}$$

Il vient ensuite

$$(5.2)\qquad b_t+c_tb+a_0(M_1\wp(\lambda_1)+M_2\wp(\lambda_2))+a_t(M_1\wp(\lambda_1-t)+M_2\wp(\lambda_2-t))=0\,,$$

car

$$(5.3)\qquad b_0+c_0b+b_t+c_tb=b_0+b_t+2b=0\,.$$

On déduit de (5.1) et (5.2) la relation

$$\begin{aligned}(5.4)\qquad &a_0(\wp'(\lambda_1)+\wp'(\lambda_2)+N(M_1\wp(\lambda_1)+M_2\wp(\lambda_2))\\ &\quad +a_t(\wp'(\lambda_1-t)+\wp'(\lambda_2-t)+N(M_1\wp(\lambda_1-t)+M_2\wp(\lambda_2-t))=0\,,\end{aligned}$$

où

$$N=\wp(\lambda_1-t)-\wp(\lambda_1)+\wp(\lambda_2-t)-\wp(\lambda_2)\,.$$

En tenant compte des identités

$$N=(f_1-f_2)(f_1-f_2-2\zeta(\lambda_1-\lambda_2))\,,$$

$$\wp'(\lambda_1)+\wp'(\lambda_2)=2(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))f_{12}\,,$$

$$\wp'(\lambda_1-t)+\wp'(\lambda_2-t)=2(\wp(\lambda_1-t)-\wp(\lambda_2-t))(\zeta(\lambda_1-\lambda_2)-\zeta(\lambda_1-t)+\zeta(\lambda_2-t)),$$

qui sont aisément vérifiées, nous avons

$$\wp'(\lambda_1)+\wp'(\lambda_2)+N(M_1\wp(\lambda_1)+M_2\wp(\lambda_2))=(f_1-f_2)(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))\,,$$

$$\wp'(\lambda_1-t)+\wp'(\lambda_2-t)+N(M_1\wp(\lambda_1-t)+M_2\wp(\lambda_2-t))=(f_1-f_2)(\wp(\lambda_1-t)-\wp(\lambda_2-t))\,.$$

Alors (5.4) s'écrit

$$a_0(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))+a_t(\wp(\lambda_1-t)-\wp(\lambda_2-t))=0\,.$$

Cette relation peut être établie si et seulement si

$$a_0=a_t=0\,.$$

Maintenant, (5.1) et (5.2) montrent

$$b_0+c_0b=b_t+c_tb=0\,,$$

de sorte que l'on obtient

$$\frac{db_0}{dt}=\frac{db_t}{dt}=\frac{db}{dt}=0\,,$$

$$k_2+bk_1+b^2=0\,,$$

d'après (4.12), (4.13), $(4.14)_j$, $(1.8)_j$. Les paramètres, k_1, k_2, b_0, b_t et b, sont indépendants de t.

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}p_2(x,t)&=-b(b+k_1+c_0\zeta(x)+c_t\zeta(x-t)-\zeta(x-\lambda_1)-\zeta(x-\lambda_2))\\&=-b(b+p_1(x,t))\,,\end{aligned}$$

de sorte que l'équation (1.3) s'écrit

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x,t)\frac{dy}{dx}-b(b+p_1(x,t))y=0\,,$$

ou bien également

$$\Big(\frac{d}{dx}+b+p_1(x,t)\Big)\Big(\frac{d}{dx}-b\Big)y=0\,.$$

Cela établit le théorème.

§ 6. Etudes du cas où $m=3$.

Dans cette section, nous allons étudier en détail le cas où $m=3$. Notons d'abord que les coefficients de $A_2(x,t)$, M_j, s'écrivent d'après (4.2) et (4.5) dans la forme suivante:

(6.1) $$M_j=n_j(\mu-f_j)\qquad(j=1,2,3)\,,$$

où μ désigne le nouveau paramètre et que

$$n_j=\prod\nolimits_{(l)}^{(j)}m_{jl}\,,\text{[3]}$$

[3] $\prod_{(l)}^{(j)}$ désigne le produit pour l variant de 1 à 3 sauf $l=j$.

$$m_{jl}=\frac{1}{f_j-f_l} \qquad (j,\, l=1,\, 2,\, 3,\;\; j\neq l)\,.$$

Supposons dans la suite que l'équation (1.3) ne soit pas réductible. Cette hypothèse signifie qu'il existe au moins deux indices, j, l $(j\neq l)$, tels que

$$b_j(t)\neq b_l(t)\,.$$

En effet, nous montrons la

PROPOSITION 6.1. *Supposons que les coefficients des fonctions* $p_i(x, t)$ $(i=1, 2)$ *satisfassent comme fonctions de* t,

$$b_1=b_2=b_3\,,$$

en plus du système donnés dans la section 4. *Alors, l'équation* (1.3) *est nécessairement réductible.*

PREUVE. Posons

$$b=b_1=b_2=b_3\,.$$

En l'occurence, $(1.8)_j$ s'écrivent

$$k_2+bk_1+b^2+(b_0+c_0b)\zeta(\lambda_j)+(b_t+c_tb)\zeta(\lambda_j-t)+a_0\wp(\lambda_j)+a_t\wp(\lambda_j-t)=0\,.$$

Il vient ensuite

$$k_2+bk_1+b^2+(b_t+c_tb)(f_j-\zeta(t))+a_0\wp(\lambda_j)+a_t\wp(\lambda_j-t)=0\,,$$

car

$$b_0+c_0b+b_t+c_tb=b_0+b_t+3b=0\,.$$

On déduit de ces relations la relation,

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{(j)}n_j(k_2+bk_2+b^2)+(b_t+c_tb)\sum_{(j)}n_j(f_j-\zeta(t))&\\ +a_0\textstyle\sum_{(j)}n_j\wp(\lambda_j)+a_t\sum_{(j)}n_j\wp(\lambda_j-t)&=0\,,\end{aligned}$$

qui se réduit à

$$a_0\textstyle\sum_{(j)}n_j\wp(\lambda_j)+a_t\sum_{(j)}n_j\wp(\lambda_j-t)=0\,,$$

car

$$\textstyle\sum_{(j)}n_j=0\,, \qquad \sum_{(j)}n_jf_j=0\,.$$

Il en résulte que

$$a_0=a_t=0\,,$$

et par suite on obtient

$$b_0+c_0b=b_t+c_tb=0\,,$$

$$\frac{db_0}{dt}=\frac{db_t}{dt}=\frac{db}{dt}=0\,,$$

$$k_2+bk_1+b^2=0\,.$$

La proposition est établie d'une même manière que la preuve du théorème 2.

Supposons, par exemple, que

$$b_1(t) \neq b_2(t)\,.$$

On déduit de $(1.8)_j$ la relation

$$(u_1-u_2)+b_1v_1-b_2v_2+b_1^2-b_2^2=0\,,$$

qui ne contient pas k_2. En différentiant cette relation par rapport à t et en utilisant $(4.11)_j$, (4.12), (4.13), $(4.14)_j$, nous obtenons l'équation différentielle

$$\begin{aligned}(b_1-b_2)\frac{dk_1}{dt}&+2M_3[(\wp(\lambda_1-\lambda_2)-\wp(\lambda_1-\lambda_3))(u_1+b_1v_1+b_1^2)\\ &+(\wp(\lambda_2-\lambda_3)-\wp(\lambda_2-\lambda_1))(u_2+b_2v_2+b_2^2)\\ &+(\wp(\lambda_3-\lambda_1)-\wp(\lambda_3-\lambda_2))(u_3+b_3v_3+b_3^2)]\\ &+(f_1-f_2)\textstyle\sum_{(j)}b_jM_j=0\,.\end{aligned}$$

En tenant compte de $(1.8)_j$, (4.15), on déduit de cette équation

$$\frac{dk_1}{dt}=0\,. \tag{2.6}$$

Alors, nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION 6.2. *L'équation* (2.6) *est compatible avec le système donné dans la section* 4.

Nous allons dériver le système des équations différentielles pour λ_j et μ. Récrivons d'abord $(1.8)_j$ dans la forme suivante:

$$k_2+b_jk_1+b_j^2+B_j+L_j=0\,, \tag{6.2$_j$}$$

où

$$B_j=a_0\wp(\lambda_j)+a_t\wp(\lambda_j-t)\,,$$

$$L_j=(b_t+c_tb_j)(f_j-\zeta(t))-\textstyle\sum_{(l)}^{(j)}(b_j-b_l)(f_{jl}-\zeta(\lambda_l))\,.$$

Calculons

$$\textstyle\sum_{(j)}M_j(k_2+b_jk_1+b_j^2+B_j+L_j)=0\,.$$

En tenant compte de (4.2), $(4.11)'_j$, (4.15), (4.17), on obtient

$$\begin{aligned}b_t=-\frac{1}{4}\textstyle\sum_{(j)}\dfrac{1}{M_j}\Big(\dfrac{d\lambda_j}{dt}\Big)^2+\dfrac{1}{4}\textstyle\sum_{(j)}\dfrac{1}{M_j}(F_j+M_jF)^2\\ +\frac{1}{2}k_1c_t-\textstyle\sum_{(j)}M_jB_j\,,\end{aligned} \tag{6.3}$$

et ensuite

$$b_0=\frac{1}{4}\Sigma_{(j)}\frac{1}{M_j}\Big(\frac{d\lambda_j}{dt}-1\Big)^2-\frac{1}{4}\Sigma_{(j)}\frac{1}{M_j}(F_j+M_jF-1)^2 \tag{6.4}$$

$$+\frac{1}{2}k_1c_0+\Sigma_{(j)}M_jB_j\,,$$

où

$$F_j=c_tM_j+\Sigma_{(l)}^{(j)}(M_j+M_l)f_{jl}\,,$$

$$F=c_t\zeta(t)-\Sigma_{(l)}\zeta(\lambda_l)\,.$$

Par ailleurs, nous avons d'après $(4.11)'_j$

$$b_j=\frac{1}{2M_j}\frac{d\lambda_j}{dt}+\frac{1}{2M_j}F_j+\frac{1}{2}F-\frac{1}{2}k_1\,. \tag{6.5$_j$}$$

Portons (6.3), (6.4), $(6.5)_j$ dans l'équation différentielle $(4.14)_j$. Alors nous aurons un système des équations différentielles pour λ_j, μ. Pour écrire ce système, utilisons quelques notations auxiliaires:

$$E_j=\wp(\lambda_j-t)-\wp(\lambda_j)\,,$$

$$E_{jl}=\wp(\lambda_j-\lambda_l)-\wp(\lambda_j)\qquad (j=1,2,3)\,,$$

$$X_1=m_{12}+m_{31}\,,\qquad X_2=m_{23}+m_{12}\,,\qquad X_3=m_{31}+m_{23}\,,$$

$$Y_1=f_{12}+f_{31}\,,\qquad Y_2=f_{23}+f_{12}\,,\qquad Y_3=f_{31}+f_{23}\,,$$

$$n=m_{12}m_{23}m_{31}\,,$$

$$C_j=a_0M_j\wp'(\lambda_j)+a_tM_j\wp'(\lambda_j-t)\,.$$

En tenant compte des relations que l'on peut déduire de (6.1),

$$\frac{dM_j}{dt}=(M_j\Sigma_{(l)}^{(j)}m_{jl}+n_j)E_j\frac{d\lambda_j}{dt}-M_j\Sigma_{(l)}^{(j)}m_{jl}E_l\frac{d\lambda_j}{dt}+n_j\frac{d\mu}{dt}$$

$$-(M_j\Sigma_{(l)}^{(j)}m_{jl}+n_j)\wp(\lambda_j-t)+M_j\Sigma_{(l)}^{(j)}m_{jl}\wp(\lambda_l-t)\,,$$

nous obtenons le système suivant:

$$\frac{1}{2M_j}\frac{d^2\lambda_j}{dt^2}+\frac{1}{4}M_jE_j\Sigma_{(j)}\frac{1}{M_j}\Big(\frac{d\lambda_j}{dt}\Big)^2 \tag{EQ$_j$}$$

$$+\frac{1}{2M_j^2}\frac{d\lambda_j}{dt}\Sigma_{(l)}^{(j)}m_{jl}\Big(M_lE_j\frac{d\lambda_j}{dt}-M_jE_l\frac{d\lambda_l}{dt}\Big)$$

$$-\frac{1}{2M_j^2}\Big(nY_j+n_j\frac{d\lambda_j}{dt}\Big)\frac{d\mu}{dt}+\frac{1}{2}\Sigma_{(l)}^{(j)}\Big(\frac{M_l}{M_j}E_{lj}-\frac{M_j}{M_l}E_{jl}\Big)\frac{d\lambda_l}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2M_j^2}\frac{d\lambda_j}{dt}\sum_{(l)}^{(j)} m_{jl}(M_l\wp(\lambda_j-t)-M_j\wp(\lambda_l-t)) \\
&-\frac{1}{2M_j^2}Y_j\sum_{(l)}X_lE_l\frac{d\lambda_l}{dt}+\frac{1}{2M_j^2}Y_j\sum_{(l)}X_l\wp(\lambda_l-t) \\
&-\frac{1}{4}M_jE_j\Big(\sum_{(l)}\frac{1}{M_l}F_l+2c_t\frac{F_j}{M_j}-4\sum_{(l)}M_lB_l\Big)+C_j \\
&-\frac{1}{2}M_j\wp(\lambda_j)\sum_{(l)}^{(j)}\Big(\frac{F_j}{M_j}-\frac{F_l}{M_l}\Big) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{(l)}^{(j)}(M_j+M_l)\wp(\lambda_j-\lambda_l)\Big(\frac{F_j}{M_j}-\frac{F_l}{M_l}\Big)=0\,,
\end{aligned}
$$

où

$$M_j=n_j(\mu-f_j)\,.$$

Ces équations différentielles $(\mathrm{EQ})_j$ et l'équation

$$\sum_{(j)}\frac{d\lambda_j}{dt}=c_t \tag{2.7}$$

constituent le système des équations différentielles pour λ_j, μ.

Soient $\lambda_j=\lambda_j(t)$, $\mu=\mu(t)$ un système des solutions, holomorphes dans un certain domaine U'. Chaque solution contient "neuf" paramètres; en effet, trois constantes, a_0, a_t, c_t, et six paramètres correspondant aux conditions initiales, $\lambda_j(t_0)=\lambda_j^0$, $\mu(t_0)=\mu^0$, $\frac{d\lambda_j}{dt}(t_0)=\lambda'^0_j(\sum_{(j)}\lambda'^0_j=c_t)$. Nous pouvons déterminer les fonctions $b_0(t)$, $b_t(t)$, $b_j(t)$ par (6.3), (6.4), $(6.5)_j$ et ensuite $k_2(t)$, $k_1(t)$ par $(6.2)_j$. La fonction $k_1(t)$ ainsi obtenue n'est pas dépendante de t, comme nous l'avons montré plus haut. Ces fonctions k_1, $k_2(t)$, $b_0(t)$, $b_t(t)$, $b_j(t)$, $\lambda_j(t)$ et les constantes a_0, a_t, c_0, c_t définissent une équation du type (1.3) qui satisfait aux hypothèses (H.I), (H.II). Cette équation possède un système fondamental des solutions dont la monodromie associée est indépendante de t. Alors nous arrivons au

THÉORÈME 3. *Pour qu'il existe les fonctions $k_1(t)$, $k_2(t)$, $b_0(t)$, $b_t(t)$, $b_j(t)$, $\lambda_j(t)$ $(j=1, 2, 3)$, holomorphes dans un domaine U contenant aucun point de Ω, telles que l'équation différentielle du type fuchsien* (1.3) *ait un système fondamental des solutions dont la monodromie associée soit indépendante de t, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient établies*:

(I) *il existe la fonction $\mu(t)$ telle que $\lambda_j(t)$, $\mu(t)$ soient les solutions holomorphes des équations différentielles $(EQ)_j$,* (2.7),

(II) *$k_2(t)$, $b_0(t)$, $b_t(t)$, $b_j(t)$ soient les fonctions rationnelles de $\frac{d\lambda_j}{dt}$ dont les coefficients soient les fonctions méromorphes de t, λ_j, μ,*

(III) *k_1 soit indépendante de t.*

Pour le cas où m est supérieur à trois, les études nécessiterons des calculs beaucoup plus compliqués.

(Reçu le 24 décembre 1976)

Département de Mathématique
Faculté des Sciences
Université de Tokyo
Hongo, Tokyo,
113 Japon

et

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire Associé au C. N. R. S.
Université Louis Pasteur
67084 Strasbourg
France