Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes

par Kazuhiko AOMOTO

0. Introduction

Il est bien connu depuis Gauss que la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ satisfait aux équations de récurrence suivantes:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x) - \alpha(\gamma-\beta)/\gamma(\gamma+1)\cdot x\cdot F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x) \tag{0.1}$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha+1, \beta, \gamma+1; x) - \beta(\gamma-\alpha)/\gamma(\gamma+1)\cdot x\cdot F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x). \tag{0.2}$$

Moyennant ces formules on a le développement en fraction continue du quotient:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x)/F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x) = 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|2} + \cdots \tag{0.3}$$

où $a_{2\nu} = -(\beta+\nu)(\gamma-\alpha+\nu)/(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)$ et $a_{2\nu+1} = -(\alpha+\nu)(\gamma-\beta+\nu)/(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)$. Ce fait a été étendu par G. D. Birkhoff aux équations aux différences linéaires d'ordre supérieur. Dans cet article on a pour but de l'étendre au cas de plusieurs variables. Dans le premier et le second paragraphes on énonce le théorème d'existence (Théorème 1.2) de la solution des équations aux différences partielles qui est caracterisée par un comportement asymptotique à une direction générique et propose le 'Problème de connexion' (Théorème 2.1) que G. D. Birkhoff appelle 'Problème de monodromie' (voir [5] et [12]). Dans les 3-ième et 4-ième paragraphe on démontre un théorème d'évanouissement (Théorème 4.2) des hypercohomologies associées à l'intégrale:

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int P_1^{\lambda_1}\cdot P_2^{\lambda_2} \cdots P_m^{\lambda_m}\varphi \tag{0.4}$$

où P_j $(1 \leqq j \leqq m)$ désignent polynômes et φ désigne une forme rationnelle de degré différent de la dimension de l'espace envisagé. Ce fait a été énoncé et démontré en gros dans mon article précédent (voir [1] et [2]). La méthode ici est purement algébrique. Dans les 5-ième et 6-ième on donne une méthode pratique pour déduire les équations aux différences partielles de (0.4) qui est une simple consequence de la finitude des hypercohomologies (Théorèmes 5.1 et 5.2). Là on utilise essentiellement la décomposition en fraction partielle d'une fonction rationnelle. Ces équations peuvent être regardées comme une généralisation du second théorème dans l'article de I. H. Bernstein (voir [4] p. 27). Dans le dernier paragraphe on donne des exemples où P_j sont tous linéaires ou quadratiques. Une partie des résultats de ce paragraphe est liée à celui obtenu par T. Kimura et A. Hattori [10].

L'auteur est reconnaissant d'avoir discuté l'aspect topologique du problème avec Prof. M. Kato et A. Hattori. Prof. T. Kimura m'a communiqué des résultats classiques concernant équations aux différences linéaires. Dr. K. Saito m'indiqué le 'Lemme de de Rham' sur un anneau de Cohen-Macaulay qui simplifie les hypothèses originales de l'auteur (voir (H.3.1) et (H.3.2)). L'auteur aussi voudrait sa gratitude au rapporteur qui lui a bien donné de bons conseils.

Table des matières.

1. Théorème d'existence

Soit $E=\{\boldsymbol{e}_i, (1\leq i\leq m)\}$ une base du réseau entier $\boldsymbol{Z}^m$ dans $\boldsymbol{C}^m$. Soient $A_i(x)$ $(1\leq i\leq m)$ fonctions rationnelles de x dans $\boldsymbol{C}^m$ à valeurs dans $GL(N, \boldsymbol{C})$ à-savoir $A_i\in GL(N, \boldsymbol{C}(x))$. On considère dans la suite une équation aux différences partielles par rapport à une fonction matricielle $\Phi(x)$ de la forme suivante:

$$\Phi(x+\boldsymbol{e}_i)=A_i(x)\cdot\Phi(x) \tag{1.1}$$

pour $1\leq i\leq m$. Supposons que les matrices $A_i(x)$ satisfassent à la condition de compatibilité:

$$A_j(x+\boldsymbol{e}_i)\cdot A_i(x)=A_i(x+\boldsymbol{e}_j)\cdot A_j(x) \tag{1.2}$$

pour $1\leq i, j\leq m$ telles qu'elles définissent de façon naturelle un cocycle de la cohomologie $H^1(\boldsymbol{Z}^m, GL(N, \boldsymbol{C}(x)))$. On désigne par $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ les coordonnées de $\boldsymbol{C}^m$ par rapport à la base E et par x' les coordonnées $(x_2, \cdots, x_m)$. Supposons que

(H.1.1) *$A_i(x)$ $(1\leq i\leq m)$ aient les expansions de Laurent en $x_1=\infty$, x' étant fixé, de la forme suivante:*

$$A_i(x)=A_i^{(0)}(x')\cdot x_1^{\mu_i}+A_i^{(1)}(x')\cdot x_1^{\mu_i-1}+\cdots \tag{1.3}$$

où $A_i^{(\nu)}(x')$ désignent fonctions rationnelles de x' et que dans un voisinage $\mathcal{V}$

d'un point $\hat{x}'$ dans C^{m-1} elles satisfassent aux suivantes:

i) *Les déterminants* $\det A_i^{(0)}(x')$ $(1 \leqq i \leqq m)$ *sont différents de zéro.*

ii) $A_i^{(0)}(x')$ $(2 \leqq i \leqq m)$ *ne dépendent pas de x' donc sont égales aux constantes $A_i^{(0)}$ respectivement. Celles-ci sont toutes diagonalisables.*

iii) *Les valeurs propres $\rho_1(x'), \cdots, \rho_N(x')$ de la matrice $A_1^{(0)}(x')$ sont toutes différentes les unes des autres.*

Alors on a le

THÉORÈME 1.1. *A l'hypothèse* (H.1.1) *il existe une suite formelle de Laurent* $S(x)$:

$$S(x) = 1 + S^{(1)}(x')/x_1 + S^{(2)}(x')/x_1^2 + \cdots \tag{1.4}$$

où $S^{(j)}(x')$ $(1 \leqq j < \infty)$ désignent des matrices rationnelles de x' telles que les matrices $B_i(x) = S(x+e_i)^{-1} \cdot A_i(x) \cdot S(x)$ aient les suites formelles suivantes:

$$\begin{cases} B_1(x) = x_1^{\mu_1} \cdot (A_1^{(0)}(x') + A_1^{(1)}(x')/x_1) & \text{et} \\ B_i(x) = x_1^{\mu_i} \cdot (A_i^{(0)} + B_i^{(1)}(x')/x_1 + B_i^{(2)}(x')/x_1^2 + \cdots) \end{cases} \tag{1.5}$$

pour $i \geqq 2$. Ici $A_1^{(0)}(x')$ se montre indépendante de x' qu'on désignera par $A_1^{(0)}$. De plus $A_1^{(1)}(x')$ s'écrit de la forme $A_1^{(1)} + \sum_1^m \mu_j x_j A_1^{(0)}$, où $A_1^{(1)}$ désigne une constante. $B_i^{(\nu)}(x')$ désignent fonctions rationnelles de x'. Enfin $A_i^{(0)}$, $A_1^{(1)}$ et $B_i^{(\nu)}(x')$ $(\nu \geqq 1$ et $i \geqq 2)$ sont commutatives avec $A_1^{(0)}$ et donc diagonalisables au même temps que $A_1^{(0)}$. Elles sont déterminées à la manière unique.

COROLLAIRE. *L'équation* (1.1) *a une solution formelle de la forme suivante:*

$$T(x) = S(x) \cdot \Gamma(x_1)^{\mu_1 - 1} \cdot \Gamma(x_1 + (A_1^{(0)})^{-1} \cdot A_1^{(1)} + \sum_2^m \mu_j x_j) \cdot \exp\left(\sum_1^m x_j \log A_j^{(0)}\right) \tag{1.6}$$

où $\Gamma(x_1)$ désigne la fonction gamma. La suite $S(x)$ est uniquement déterminée par un certain nombre k de ses premiers termes.

DÉMONSTRATION DE THÉORÈME 1.1. *1er étape.* En vue de (1.3) les relations

$$A_i(x+e_1) \cdot A_1(x) = A_1(x+e_i) \cdot A_i(x) \tag{1.7}$$

impliquent $A_i^{(0)} \cdot A_1^{(0)}(x') = A_1^{(0)}(x'+e_i) \cdot A_i^{(0)}$. Par consequent $A_1^{(0)}(x')$ ne dépend pas de x', $A_1^{(0)}(x') = A_1^{(0)}$, vu que $A_i^{(0)}$ sont diagonalisables et $A_1^{(0)}(x')$ est rationnelle. D'où il vient $A_i^{(0)} \cdot A_1^{(0)} = A_1^{(0)} \cdot A_i^{(0)}$.

2ième étape. Par la méthode de G. D. Birkhoff dans le cas d'une variable (voir [5] p. 480) on peut trouver une suite formelle de Laurent $S(x)$ de la forme

(1.4) telle que les matrices $\tilde{A}_i(x)=S(x+e_i)^{-1}\cdot A_i(x)\cdot S(x)$ aient les expressions de (1.5) où $A_1^{(0)}(x')=A_1^{(0)}$, $A_i^{(0)}\cdot A_1^{(1)}(x')=A_1^{(1)}(x')\cdot A_i^{(0)}$ et $A_1^{(0)}\cdot A_i^{(0)}=A_i^{(0)}\cdot A_1^{(0)}$ pour $i\geqq 2$. Par l'hypothèse de $A_1^{(0)}$, $A_1^{(1)}(x')$ aussi commute avec $A_i^{(0)}$. En comparant les termes de $x_1^{\mu_1+\mu_i-1}$ de (1.7) on obtient

$$A_i^{(1)}(x')\cdot A_1^{(0)}+A_i^{(0)}\cdot A_1^{(1)}(x')+\mu_i A_i^{(0)}\cdot A_1^{(0)}=A_1^{(1)}(x'+e_i)\cdot A_i^{(0)}+A_1^{(0)}\cdot A_i^{(1)}(x') . \tag{1.8}$$

Autrement dit,

$$[A_1^{(0)}, A_i^{(1)}(x')]=(-A_1^{(1)}(x'+e_i)+A_1^{(1)}(x'))\cdot A_i^{(0)}+\mu_i A_i^{(0)}\cdot A_1^{(0)} . \tag{1.9}$$

Or $A_1^{(0)}$ est diagonalisable et le second membre commute avec $A_1^{(0)}$, d'où il vient $[A_1^{(0)}, A_i^{(1)}(x')]=0$. Par consequent on a $A_1^{(1)}(x'+e_i)-A_1^{(1)}(x')=\mu_i A_1^{(0)}$. Donc $A_1^{(1)}(x')$ s'écrit de la forme:

$$A_1^{(1)}(x')=(\sum_2^m \mu_j x_j)\cdot A_1^{(0)}+A_1^{(1)} \tag{1.10}$$

où $A_1^{(1)}$ désigne une matrice constante.

3ième étape. En comparaison des termes de $x_1^{\mu_1+\mu_i-\nu}$ de (1.7) on obtient les relations

$$\begin{aligned}(\nu-1)A_i^{(\nu-1)}(x')A_1^{(0)}&=A_i^{(1)}(x')\{(-1)^{\nu-2}A_1^{(1)}(x')+(-1)^{\nu-1}A_1^{(0)}\}+\cdots\\&+A_i^{(\nu-r)}(x')\left\{(-1)^r\frac{(\nu-r,r)}{r!}A_1^{(0)}+(-1)^{r-1}\frac{(\nu-r,r-1)}{(r-1)!}A_1^{(1)}(x')\right\}+\cdots\\&+A_i^{(\nu-2)}(x')\left\{\frac{(\nu-2,2)}{2!}A_1^{(0)}+(-1)\cdot\frac{(\nu-2,1)}{1!}A_1^{(1)}(x')\right\}\\&+\binom{\mu_i}{1}[A_i^{(\nu-2)}(x')\{A_1^{(1)}(x')+(-\nu+2)A_1^{(0)}\}+\cdots\\&+A_i^{(1)}(x')\cdot\{(-1)^{\nu-3}A_1^{(1)}(x')+(-1)^{\nu-2}A_1^{(0)}\}]+\cdots\\&+\binom{\mu_i}{r}[A_i^{(\nu-r)}(x')A_1^{(0)}+A_i^{(\nu-r-1)}(x')\{A_1^{(1)}(x')+(-\nu+r+1)A_1^{(0)}\}+\cdots\\&+A_1^{(1)}(x')\{(-1)^{\nu-r-2}A_1^{(1)}(x')+(-1)^{\nu-r-1}A_1^{(0)}(x')\}]+\cdots+\binom{\mu_i}{n}A_i^{(0)}A_1^{(0)} .\end{aligned} \tag{1.11}$$

Ici (ν, r) désigne $\nu(\nu+1)\cdots(\nu+r-1)$.

Moyennant (1.11) on peut preuver par récurrence sur ν que $A_1^{(0)}$ commute avec $A_i^{(\nu)}(x')$. On peut aussi vérifier que $A_i^{(\nu)}(x')$ $(\nu\geqq 1)$ sont déterminées à la manière unique. Théorème 1.1 est ainsi démontré.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. Il est aisé de voir que la matrice $T(x)$ de (1.6) satisfait à (1.1).

Ceci étant soient $S_d(x)$ et $U_d(x)$ les fonctions rationnelles définies respectivement comme suit:

$$S_d(x)=1+S^{(1)}(x')/x_1+\cdots+S^{(d)}(x')/x_1^d\,, \tag{1.12}$$

$$A_1(x)\cdot S_d(x)=S_d(x+e_1)\cdot\{A_1^{(0)}+(A_1^{(0)}\sum_2^m\mu_jx_j+A_1^{(1)})/x_1+U_d(x)/x_1^{d+1}\}\,. \tag{1.13}$$

On désigne par $T_d(x)$ la suite tronquée de $T(x)$ comme suit:

$$T_d(x)=S_d(x)\cdot\Gamma(x_1)^{\mu_1-1}\cdot\Gamma(x_1+(A_1^{(0)})^{-1}\cdot A_1^{(1)}+\sum_2^m\mu_jx_j)\cdot\exp\,(\sum_1^m x_j\log A_j^{(0)})\,, \tag{1.14}$$

alors $T_d(x+e_1)^{-1}\cdot A_1(x)\cdot T_d(x)$ s'écrit de la forme $1+\Xi_d(x)/x_1^{d+1}$ où $\Xi_d(x)$ désigne

$$\begin{aligned} &x_1^{-\mu_1+1}\cdot\Gamma(x_1+1+(A_1^{(0)})^{-1}\cdot A_1^{(1)}+\sum_2^m\mu_jx_j)^{-1}\cdot(A_1^{(0)})^{-x_1-1}\cdot U_d(x)\\ &\qquad\times(A_1^{(0)})^{x_1}\cdot\Gamma(x_1+(A_1^{(0)})^{-1}\cdot A_1^{(1)}+\sum_2^m\mu_jx_j)\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Soient λ_r $(1\leqq r\leqq m)$ les représentations linéaires du groupe $GL(N, \boldsymbol{C})$ dans $GL\left(\binom{N}{r}, \boldsymbol{C}\right)$ définies moyennant les tenseurs alternatifs de degré r sur $\boldsymbol{C}^m$ (on identifie λ_1 avec la représentation donnée). Alors la raisonnement précédente aussi s'applique à la famille des matrices $(\lambda_r(A_i(x)))$ $(1\leqq i\leqq m)$.

Supposons dans la suite que $A_1^{(0)}$ ainsi que $A_1^{(1)}$ soient diagonales: $A_1^{(0)}=\mathrm{Diag}\,[\rho_1, \cdots, \rho_N]$ et $A_1^{(1)}=\mathrm{Diag}\,[\sigma_1, \cdots, \sigma_N]$ telles que l'on ait $|\rho_1|\geqq|\rho_2|\geqq\cdots\geqq|\rho_N|>0$. On désigne par Ω le domaine défini par

$$\begin{aligned} \Omega(M_1, M_2, d):\ &\|U_d(x-e_1)\|<M_1\,,\\ &\|\exp\{(-\sum_2^m\mu_jx_j-(A_1^{(0)})^{-1}\cdot A_1^{(1)})\cdot\log\,(x_1/(x_1-1))\}\|<M_2 \quad\text{et}\quad \mathrm{Re}\,x_1<0\,, \end{aligned} \tag{1.16}$$

où $\|X\|$ désigne le maximum des valeurs absolues des éléments d'une matrice X, M_i étant constantes.

Choisissons un nombre naturel d tel que

$$d=\max_{1\leqslant r\leqslant m}\ \max_{i_1<\cdots<i_r}\ \mathrm{Re}\left\{\frac{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_r}-\frac{\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_r}}{\rho_{i_1}\rho_{i_2}\cdots\rho_{i_r}}+2\right\} \tag{1.17}$$

où les indices $(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ parcourent toutes les indices telles que $i_1<i_2<\cdots<i_r$. Dans cette situation on a le théorème d'existence suivant d'après la méthode de G. D. Birkhoff:

THÉORÈME 1.2. *A l'hypothèse* (H.1.1) *il existe une et une seule solution* $\Phi(x)$

de (1.1) *à valeurs dans* $GL(N, \boldsymbol{C})$ *qui est méromorphe dans* $\boldsymbol{C}^m$, *ayant la formule asymptotique* (1.6) *dans* Ω.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}$ le sous-groupe triangulaire supérieur et celui unipotent maximal dans $\mathcal{B}$ respectivement. Alors on a, d'après G. D. Birkhoff

$$\Phi(x) \bmod \mathcal{N} = \lim_{\nu\to\infty} A_1(x) \cdots A_1(x-\nu \boldsymbol{e}_1) \cdot T_d(x-\nu \boldsymbol{e}_1) \bmod \mathcal{N} \tag{1.18}$$

et

$$\Phi(x) \bmod \mathcal{B} = \lim_{\nu\to\infty} A_1(x) \cdots A_1(x-\nu \boldsymbol{e}_1) \bmod \mathcal{B} \tag{1.19}$$

respectivement. (1.19) n'est autre chose qu'une généralisation de développement en fraction continue à valeurs dans la variété en drapeau $GL(N, \boldsymbol{C})/\mathcal{B}$.

DÉMONSTRATION DE THÉORÈME 1.2. D'après G. D. Birkhoff il existe une et une seule solution $\Phi(x)$ de l'équation

$$\Phi(x+e_1) = A_1(x) \cdot \Phi(x) \tag{1.20}$$

qui a la formule asymptotique (1.6) pour $\mathrm{Re}\, x_1 \to -\infty$ (voir [5] p. 497). D'autre part $A_j(x)^{-1} \cdot \Phi(x+e_j)$ aussi satisfait à la même condition que $\Phi(x)$ en vue de (1.2), d'où $A_j(x)^{-1} \cdot \Phi(x+e_j) = \Phi(x)$ par unicité.

2. Problème de connexion

La solution unique du Théorème 1.2 est caractérisée par une formule asymptotique à la direction $x_1 \to \infty$. On l'appellera '*solution à la direction de l'axe* x_1'. Par une transformation unimodulaire des coordonnées on peut aussi considerer la solution à la direction d'une autre droite L, l'image de l'axe x_1 par cette transformation. On la désignera par $\Phi_L(x)$.

Supposons qu'il existent deux solutions Φ_{L_1} et Φ_{L_2} aux directions L_1 et L_2 réspectivement. Alors la matrice $P_{L_1L_2}(x)$ définie par

$$\Phi_{L_1}(x) = P_{L_1L_2}(x) \cdot \Phi_{L_2}(x) \tag{2.1}$$

satisfait à l'équation:

$$P_{L_1L_2}(x+\boldsymbol{e}_i) = P_{L_1L_2}(x) \qquad (1 \leqq i \leqq m)\,. \tag{2.2}$$

On appelle cette matrice '*matrice de connexion entre* L_1 *et* L_2'. Soit L_1 le x_1-axe des coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et L_2 une droite transformée de L_1 par une transformation $\sigma \in GL(m, \boldsymbol{Z})$. Soient $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ des coordonnées telles que $x = \sigma \cdot y$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} y_j \qquad (1 \leq i \leq m) . \tag{2.3}$$

Alors $\Phi(\sigma \cdot y)$ satisfait à l'équation

$$\Phi(\sigma \cdot (y+e_i)) = \Phi(\sigma \cdot y + \sigma \cdot e_i) = A_i^*(y) \Phi(\sigma \cdot y) \tag{2.4}$$

où $A_i^*(y)$ désigne la fonction rationnelle de la forme suivante;

$$A_i^* = \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant \nu \leqslant \xi_{mi}}} A_m(\sigma \cdot (y+e_i) - \nu e_m) \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant \nu \leqslant \xi_{m-1,i}}} A_{m-1}(\sigma \cdot (y+e_i) - \xi_{mi} e_m - \nu e_i) \cdots$$

$$\cdots \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant \nu \leqslant \xi_{1i}}} A_1(\sigma \cdot y + \xi_{1i} e_1 - \nu e_1)$$

où on utilise la notation $\overrightarrow{\prod_{1 \leqslant \nu \leqslant j}} H(x+(\nu-1)v)$ représentant le produit

$$H(x) \cdot H(x+v) \cdots H(x+(j-1)v)$$

pour un vecteur v. Réciproquement $A_i(x)$ $(1 \leq i \leq m)$ s'exprime de la même manière moyennent $A_j^*(\sigma^{-1} \cdot x)$. Le lemme suivant est immmédiat.

LEMME 2.1. *Supposons que les deux directions L_1 et L_2 satisfassent à* (H.1.1) *par rapport aux coordonnées* (x) *et* (y) *réspectivement. Alors on a pour $y_1 \to {}^-\infty$,*

$$A_i(\sigma \cdot y) \sim y_1^{\sum_1^m \mu_j^* \xi_{ji}^*} \cdot (A_1^{*(0)})^{\xi_{1i}^*} \cdot (A_2^{*(0)})^{\xi_{2i}^*} \cdots (A_m^{*(0)})^{\xi_{mi}^*} \tag{2.7}$$

et pour $x_1 \to {}^-\infty$

$$A_i^*(\sigma^{-1} \cdot x) \sim x_1^{\sum_1^m \mu_j \xi_{ji}} \cdot (A_1^{(0)})^{\xi_{1i}} \cdot (A_2^{(0)})^{\xi_{2i}} \cdots (A_m^{(0)})^{\xi_{mi}} \tag{2.8}$$

si $A_i^*(y) = A_i^{*(0)} y_1^{\mu_i^*} + A_i^{*(1)}(y') y^{\mu_i - 1} + \cdots$, où la matrice (ξ_{ij}^*) $(1 \leq i,\ j \leq m)$ désigne l'inverse de σ.

D'autre part si l'on prend les deux L_1 et L_2 génériques telles que $A_i(\sigma \cdot y)$ est de degré maximal μ_i, alors le lemme précédent implique la relation

$$\mu_i^* = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \xi_{ji} \qquad (1 \leq i \leq m) . \tag{2.9}$$

$\Phi(\sigma \cdot y)$ a la formule asymptotique suivante dans $\sigma^{-1} \cdot \Omega$

$$\Phi(\sigma \cdot y) \sim \{1 + S^{(1)}(x')/x_1 + \cdots + S^{(d)}(x')/x_1^d\} . \tag{2.10}$$

D'après le Théorème 1.2, $\Phi(\sigma \cdot y)$ a la même formule asymptotique suivante pour $y_1 \to {}^-\infty$ et $x_1 \to {}^-\infty$ dans $\sigma^{-1} \cdot \Omega$:

$$\Phi_{L_1}(\sigma\cdot y)\sim\{1+\tilde{S}^{(1)}(x')/x_1+\cdots+\tilde{S}^{(d)}(x')/x_1^d\} \tag{2.11}$$
$$\times(A_1^{(0)})^{\sum_1^m \xi_{1j}y_j}\cdots(A_n^{(0)})^{\sum_1^m \xi_{nj}y_j}\cdot\Big(\xi_{11}+\sum_2^m \xi_{1j}y_j/y_1\Big)^{\sum_1^m \mu_j^* y_j}\cdot y_1^{\sum_2^m \mu_j^* y_j}$$

moyennant (2.9) où $\tilde{S}^{(j)}(x')$ $(1\leqq j)$ désignent fonctions rationnelles analogues aux $S^{(j)}(x')$. Par consequent si $|y_j/y_1|$ $(2\leqq j\leqq m)$ sont bornées, alors la fonction $\Phi_{L_1}(x)\cdot\Phi_{L_2}(x)^{-1}$ s'acroît au plus exponentiellement, car les deux asymptotes ont la même facteur $y_1^{\left(\sum_2^m \mu_j^* y_j\right)}$. Vu que le domaine ci-dessus est invariant par les déplacements $x\to x+e_i$ $(1\leqq i\leqq m)$, et que $\Phi_{L_1}(x)\cdot\Phi_{L_2}(x)^{-1}$ est une fonction univoque de $\exp(2\pi\sqrt{-1}x_j)$ $(1\leqq j\leqq m)$, on conclut qu'elle est rationelle par rapport à $\exp(2\pi\sqrt{-1}x_j)$. On arrive ainsi au

THÉORÈME 2.1. *Si L_i et L_j sont choisies de sorte qu'*

i) *elles satisfassent* à (H.1.1).

ii) *$A_i(x)$ est de degré μ_i, et $A_i^*(y)$ est de degré μ_i^*.*

iii) *$\sigma^{-1}\cdot\Omega\cap\Omega$ contient un domaine fondamental du groupe de déplacement $\boldsymbol{Z}^m$ dans $\boldsymbol{C}^m$.*

iv) *$|y_j/y_1|$ y sont toutes bornées pour $y_1\to{}^-\infty$ ou $x_1\to{}^-\infty$. Alors la matrice de transition $P_{L_1L_2}(x)$ est fonction rationelle de* $\exp(2\pi\sqrt{-1}x_j)$ $(1\leqq j\leqq m)$.

L'ensemble des directions L forme un espace projectif $\boldsymbol{P}^{m-1}(\boldsymbol{Q})$ sur le corps rationels $\boldsymbol{Q}$. Soient L_1, L_2 et L_3 trois points quelconques de $\boldsymbol{P}^{m-1}(\boldsymbol{Q})$ où les fonctions $\Phi_{L_i}(x)$ sont définies. On a alors

$$P_{L_1L_2}\cdot P_{L_2L_3}=P_{L_1L_3}\,. \tag{2.12}$$

Réciproquement à la manière analogue au cas d'une variable supposons qu'on se donne une famille des matrices rationnelles de $\exp(2\pi\sqrt{-1}x_j)$ telles que l'on ait (2.12). On peut poser la question suivante:

Problème de connexion. Est ce qu'il existe un cocycle $A_i(x)$ de $H^1(\boldsymbol{Z}, GL(N, \boldsymbol{C}(x))$ tel que l'on ait (2.1)? *Y a-t-il une méthode effective déterminant les matrices $P_{L_1L_2}$ quand on se donne les matrices $\{A_i(x)\}$?*

Dans le cas où N est égal à un, M. Sato a déterminé complètement la structure de $H^1(\boldsymbol{Z}, GL(1, \boldsymbol{C}(x)))$ (voir [15]). Dans ce cas la solution de (1.1) est toujours réalisé moyennant la fonction gamma. On calculera matrices de connexion dans un autre exemple (voir (6, 15)).

3. Préliminaires relatives aux hypercohomologies de de Rham

Soit P_j $(1 \leq j \leq m)$ un polynôme irreductible de degré l_j et S_j l'hypersurface algébrique: $P_j(x)=0$ $(1 \leq j \leq m)$ dans l'espace affine C^n. On désigne par S la reunion de $S_j := \bigcup_{j=1}^{m} S_j$. Soit ω la forme rationnelle de l'expression suivante:

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j dP_j/P_j + dP_0 \tag{3.1}$$

où $\lambda \in C^m$. Celle-ci donne une connexion de Gauss-Manin sur $M = C^n - S$ qui y définit l'hypercohomologie $H^*(M, \Omega^\cdot(*S))$ du complexe de de Rham $\Omega^\cdot(*S)$ comme suit (voir [7] et [8]):

$$\longrightarrow \Omega^p(*S) \xrightarrow{\nabla_\omega} \Omega^{p+1}(*S) \longrightarrow \tag{3.2}$$

par $\nabla_\omega(\varphi) = d\varphi + \omega \wedge \varphi$ où $\varphi \in \Omega^p(*S)$. Ici $\Omega^p(*S)$ désigne l'ensemble des p-formes rationnelles dont les supports polaires sont tous contenus dans S. On désigne par $\tilde{\Omega}^p$ le $C[x]$-module de p-formes à coéfficients polynômiaux. On identifie $\tilde{\Omega}^n$ avec $C[x]$ par l'isomorphisme:

$$\varphi(\in \tilde{\Omega}^n) \to \varphi/dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \in C[x] . \tag{3.3}$$

On note par $H(\mathfrak{I})$ ou $\mathrm{H}(P)$ les homogénéisations canoniques d'un idéal $\mathfrak{I}$ ou un polynôme P respectifs par le suivant:

$$\mathrm{H}(P) = x_0^l P(x_1/x_0, x_2/x_0, \cdots, x_n/x_0) \tag{3.4}$$

où l désigne le degré de P, dans l'anneau homogène $C[x_0, x]$.

REMARQUE 3.1. *La partie commune de $\tilde{\Omega}^n$ (resp. $H(\tilde{\Omega}^n)$) et d'un idéal $\mathfrak{I}$ (resp. $H(\mathfrak{I})$) de l'algèbre extérieure $\tilde{\Omega}^\cdot = \sum_0^n \oplus \tilde{\Omega}^p$ (resp. $H(\tilde{\Omega}^\cdot)$) sur $C[x]$ (resp. $C[x_0, x]$) est regardée comme un idéal dans $C[x]$ (resp. $C[x_0, x]$) par l'identification* (3.3).

Rappelons la définition d'un idéal de Cohen-Macaulay:

DÉFINITION 3.1. *Le hauteur d'un idéal homogène $H(\mathfrak{I})$ dans $C[x_0, x]$ est au plus égal à la dimension homologique de $H(\mathfrak{I})$. On dit $H(\mathfrak{I})$ 'de Cohen-Macaulay' si ces deux entiers coïncident* (voir [18] p. IV-17). *D'après la terminologie de W. Gröbner il s'appelle 'parfait'* (voir [9] p. 197).

(H.3.1) *Soient $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r$ r polynômes différents quelconques d'entre les P_j. Alors l'idéal homogène*

$$\mathrm{H}(dQ_1 \wedge dQ_2 \wedge \cdots \wedge dQ_r \wedge dx_j \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n, Q_1, \cdots, Q_s)$$

est de Cohen-Macaulay et donc de hauteur $s+j-r$ dans $C[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ pour $r \leq n$, $0 \leq s \leq r$ et $r+1 \leq j \leq n+1$.

LEMME 3.1. *Soient* $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r$ *comme au précédent. Et soit* $\varphi \in \tilde{\Omega}^p$. *La relation*

$$dQ_1 \wedge dQ_2 \wedge \cdots \wedge dQ_r \wedge \varphi \equiv 0 \ (Q_1, Q_2, \cdots, Q_s) \tag{3.5}$$

implique

$$\varphi \equiv 0 \ (dQ_1, dQ_2, \cdots, dQ_r, Q_1, \cdots, Q_s) \tag{3.6}$$

pour $0 \leqq s \leqq r$ *et* $r+p \leqq n$.

On désigne par $\bar{P}$ la partie homogène de degré le plus haut d'un polynôme P. Posons la condition suivante pour les polynômes $\bar{P}_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$:

(**H.3.2**) *L'idéal homogène*

$$(d\bar{Q}_1 \wedge d\bar{Q}_2 \wedge \cdots \wedge d\bar{Q}_r \wedge dx_j \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \cdots, \bar{Q}_s)$$

est de Cohen-Macaulay et donc de hauteur $s+j-r$ *dans* $\boldsymbol{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ *pour* $r \leqq n-1$, $r+1 \leqq j \leqq n$ *et* $0 \leqq s \leqq r$.

LEMME 3.2. *Soit* $\varphi \in \tilde{\Omega}^p$. *La relation*

$$d\bar{Q}_1 \wedge d\bar{Q}_2 \wedge \cdots \wedge d\bar{Q}_r \wedge \varphi \equiv 0 \ (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \cdots, \bar{Q}_s) \tag{3.7}$$

implique

$$\varphi \equiv 0 \ (d\bar{Q}_1, d\bar{Q}_2, \cdots, d\bar{Q}_r, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \cdots, \bar{Q}_s) \tag{3.8}$$

pour $r \leqq n-1$, $r+p \leqq n-1$ *et* $0 \leqq s \leqq r$ *ou bien* $s=0$ *et* $r+p \leqq n$.

Démonstration des deux lemmes précédents. La preuve est faite par récurrence sur r, s, p et n en utilisant la théorie de H-idéal de déterminants de matrices (voir [9], pp. 199-204). Actuellement ces lemmes sont formulés comme 'Lemme de de Rham' sur un module de Cohen-Macaulay (voir [15]).

Faisons les hypothèses (H.3.1) et (H.3.2) dans la suite. Alors

LEMME 3.3. *Soit* $\varphi \in \tilde{\Omega}^p$ $(0 \leqq p \leqq n-1)$ *telle que* $dP_j \wedge \varphi \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, P_j)$ *pour toutes les indices* j, $1 \leqq j \leqq m$. *Alors* φ *s'écrit de la forme suivante*:

$$\varphi = P_1 \cdot P_2 \cdots P_m \{ \sum_{\nu=0}^{p} \sum_{j_1 < \cdots < j_\nu} (dP_{j_1}/P_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (dP_{j_\nu}/P_{j_\nu}) \wedge \varphi(j_1 \cdots j_\nu) \} \tag{3.9}$$

où $\varphi(j_1 \cdots j_\nu)$ *désigne une forme de* $\tilde{\Omega}^{p-\nu}$ *et que les indices* $j_1, j_2 \cdots, j_\nu$ *parcourent tous les entiers tels que* $1 \leqq j_1 < \cdots < j_\nu \leqq m$.

DÉMONSTRATION. La preuve est faite par récurrence sur p et m en utilisant le Lemme 3.1.

De même que le lemme précédent on a

LEMME 3.4. *Soit* $\varphi \in \tilde{\Omega}^p$ $(0 \leqq p \leqq n-2)$ *telle que* $d\bar{P}_j \wedge \varphi \equiv 0 \pmod{\bar{P}_j}$ *pour toutes les indices* j, $1 \leqq j \leqq m$. *Alors* φ *s'écrit de la forme suivante*:

$$\varphi = \bar{P}_1 \cdot \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_m \{ \sum_{\nu=0}^{p} \sum_{j_1 < \cdots < j_\nu} (d\bar{P}_{j_1}/\bar{P}_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (d\bar{P}_{j_\nu}/\bar{P}_{j_\nu}) \wedge \varphi(j_1 \cdots j_\nu) \} \tag{3.10}$$

où $\varphi(j_1, \cdots, j_\nu)$ *signifie la même que ci-dessus.*

Les deux lemmes précédents entrainent immédiatement les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 3.1. *Supposons* $p \leqq n-1$ *et que* $\varphi \in \tilde{\Omega}^p$ *satisfassent à* $\nabla_\omega \varphi \in \tilde{\Omega}^{p+1}$ *pour un* λ *de* $\boldsymbol{C}^m - \boldsymbol{Z}_+^m$ *où* $\boldsymbol{Z}_+$ *désigne l'ensemble des nombres entiers positifs. Alors* φ *s'exprime moyennant des formes* $\varphi(j_1, \cdots, j_\nu)$ *de* $\tilde{\Omega}^{p-\nu}$ *de la forme* (3.9).

PROPOSITION 3.2. *Supposons* $p \leqq n-2$ *et que* $\varphi \in \tilde{\Omega}^p$ *satisfassent à* $\nabla_\omega(\varphi) \in \tilde{\Omega}^{p+1}$ *pour un* λ *de* $\boldsymbol{C}^n - \boldsymbol{Z}_+^n$. *Alors* φ *s'exprime moyennant des formes* $\varphi(j_1, \cdots, j_\nu)$ *de* $\tilde{\Omega}^{p-\nu}$ *de la forme* (3.10). *Ici* $\bar{\omega}$ *désigne la forme* $\sum_1^m \lambda_j d\bar{P}_j/\bar{P}_j + d\bar{P}_0$.

Considerons aussi le complexe de de Rham $\Omega^p(*S) \otimes \boldsymbol{C}(\lambda)$ sur le corps de fonctions rationnelles de λ $\boldsymbol{C}(\lambda)$ comme suit:

$$\longrightarrow \Omega^p(*S) \otimes \boldsymbol{C}(\lambda) \xrightarrow{\nabla_\omega} \Omega^{p+1}(*S) \otimes \boldsymbol{C}(\lambda) \longrightarrow . \tag{3.11}$$

On désigne par $\hat{\Omega}^\cdot$ le sous-complexe de $\Omega^\cdot(*S)$ se composant de formes $\varphi \in \tilde{\Omega}^\cdot$ telles que $\nabla_\omega(\varphi) \in \tilde{\Omega}^\cdot$. Soit ι l'inclusion $\hat{\Omega}^\cdot \to \Omega^\cdot(*S)$. Alors en utilisant la Proposition 3.1 à plusieurs fois on obtient aisément le

THÉORÈME 3.1. *L'homomorphisme naturel de l'hypercohomologie de de Rham par l'inclusion*:

$$\iota : \boldsymbol{H}^p(M, \hat{\Omega}^\cdot) \to \boldsymbol{H}^p(M, \Omega^\cdot(*S)) \tag{3.12}$$

est l'isomorphisme pourvu que $\lambda \in \boldsymbol{C}^m - \boldsymbol{Z}_+^m$ *et* $p \leqq n-1$. *De même on a l'isomorphisme*:

$$\iota : \boldsymbol{H}^p(M, \hat{\Omega}^\cdot \otimes \boldsymbol{C}(\lambda)) \to \boldsymbol{H}^p(M, \Omega^\cdot(*S) \otimes \boldsymbol{C}(\lambda)) \tag{3.13}$$

pourvu que $p \leqq n-1$.

Pour obtenir les isomorphismes dans le cas où $p=n$, supposons en outre que l'on ait

$$\tilde{\Omega}^n = P_1 \cdot P_2 \cdots P_m \{ \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_\nu \leqslant m} dP_{j_1}/P_{j_1} \wedge \cdots \wedge dP_{j_\nu}/P_{j_\nu} \wedge \tilde{\Omega}^{n-\nu} \} . \tag{H.3.3}$$

Alors on a

THÉORÈME 3.2. i) $H^n(M, \hat{\Omega}^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^n(M, \Omega^\cdot(*S))$ *si* $\lambda \in C^m - Z_+^m$.
ii) $H^n(M, \hat{\Omega}^\cdot \otimes C(\lambda)) \xrightarrow{\sim} H^n(M, \Omega^\cdot(*S) \otimes C(\lambda))$.

Soient $\bar{S}_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ les cônes algébriques: $\bar{P}_j(x)=0$ dans C^n. Soit $\bar{S}$ la réunion de $\bar{S}_j$: $\cup \bar{S}_j$. On désigne par $\bar{\nabla}$ la dérivée covariante $\nabla_{\bar{\omega}}$ donnée par

$$\bar{\omega} = \sum_1^m \lambda_j d\bar{P}_j/\bar{P}_j + d\bar{P}_0 \quad \text{sur} \quad \bar{M} = C^n - \bar{S} .$$

On désigne par $\hat{\bar{\Omega}}^\cdot$ le sous-module de $\tilde{\Omega}^\cdot$ se composant des formes $\varphi \in \tilde{\Omega}^p$ telles que $\bar{\nabla}(\varphi) \in \tilde{\Omega}^{p+1}$. De même qu'au Théorème 3.2, en utilisant la Proposition 3.2 à plusieurs fois on obtient

THÉORÈME 3.3. *On a des isomorphismes:*

$$H^p(\bar{M}, \hat{\bar{\Omega}}^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^p(\bar{M}, \Omega^\cdot(*\bar{S})) \tag{3.14}$$

et

$$H^p(\bar{M}, \hat{\bar{\Omega}}^\cdot \otimes C(\lambda)) \xrightarrow{\sim} H^p(\bar{M}, \Omega^\cdot(*\bar{S}) \otimes C(\lambda)) \tag{3.15}$$

si $p \leqq n-2$.

Dans le cas où $p=n-1$ on a

THÉORÈME 3.4. *On a des inclusions:*

$$(0) \to H^{n-1}(\bar{M}, \hat{\bar{\Omega}}^\cdot) \to H^{n-1}(\bar{M}, \Omega^\cdot(*\bar{S}) \otimes C(\lambda)) \tag{3.16}$$

et

$$(0) \to H^{n-1}(\bar{M}, \hat{\bar{\Omega}}^\cdot \otimes C(\lambda)) \to H^{n-1}(\bar{M}, \Omega^\cdot(*\bar{S}) \otimes C(\lambda)) . \tag{3.17}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in \hat{\bar{\Omega}}^{n-1}$ ou $\hat{\bar{\Omega}}^{n-1} \otimes C(\lambda)$ telle que $\bar{\nabla}(\varphi)=0$. Supposons il existent une forme ψ de $\Omega^{n-2}(*\bar{S})$ ou $\Omega^{n-2}(*\bar{S}) \otimes C(\lambda)$ respectivement telle que $\varphi = \bar{\nabla}(\psi)$. D'après la Proposition 3.2 et le Théorème 3.3 il existe une autre forme ψ' de $\hat{\bar{\Omega}}^{n-2}$ ou $\hat{\bar{\Omega}}^{n-2} \otimes C(\lambda)$ telle que $\varphi = \bar{\nabla}(\psi')$. C.Q.F.D.

Pour démontrer les Théorèmes 3.1~3.3 on démontre d'abord le lemme suivant:

LEMME 3.5. *Soient* $k_1, k_2, \cdots, k_m$ *des entiers non-négatifs. Soit* $\tilde{\varphi}$ *une forme de* $\tilde{\Omega}^p$ *où* $p \leqq n-1$ *de sorte que* $\nabla(\tilde{\varphi}/P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_m^{k_m}) \in \tilde{\Omega}^{p+1}$. *Alors il existe une forme* $\tilde{\psi}$ *de* $\tilde{\Omega}^p$ *telle que* $(\tilde{\varphi}/P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_m^{k_m}) \sim \tilde{\psi}$.

DÉMONSTRATION. Sans perdre la généralité on peut supposer $k_1 > 1$. Le Lemme 3.3 montre que $\tilde{\varphi}$ s'exprime de façon suivante:

$$\tilde{\varphi}=P_2\cdot P_3 \cdots P_m\cdot dP_1\wedge\tilde{\varphi}^{(1)}+P_1\tilde{\varphi}_1 \tag{3.18}$$

où $\tilde{\varphi}^{(1)}\in\tilde{\Omega}^{p-1}$ et $\tilde{\varphi}_1\in\tilde{\Omega}^p$. Dans ce cas-là on a aisément

$$\frac{\tilde{\varphi}}{P_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_m^{k_m}}-\frac{1}{\lambda_1-k_1+1}\nabla\left(\frac{\tilde{\varphi}^{(1)}}{P_1^{k_1-1}P_2^{k_2-1}\cdots P_m^{k_m-1}}\right)=\frac{\tilde{\theta}}{P_1^{k_1-1}P_2^{k_2}\cdots P_m^{k_m}}, \tag{3.19}$$

où $\tilde{\theta}$ désigne une forme de $\tilde{\Omega}^p$. En répétant ce procédé jusqu'au bout on arrive à l'assertion du Lemme 3.5 C.Q.F.D.

Le lemme suivant est démontré tout à fait analogue au précédent.

LEMME 3.6. *Soient $k_1, k_2, \cdots, k_m$ des entiers non-négatifs. Soit $\tilde{\varphi}$ une forme de $\tilde{\Omega}^p$ où $p\leqq n-2$ de sorte que $\nabla(\tilde{\varphi}/\bar{P}_1\bar{P}_2\cdots\bar{P}_m)\in\tilde{\Omega}^{p+1}$. Alors il existe une forme $\tilde{\psi}$ de $\tilde{\Omega}^p$ telle que $(\tilde{\varphi}/\bar{P}_1\bar{P}_2\cdots\bar{P}_m)\sim\tilde{\psi}$.*

Il en va de même pour une forme de $\tilde{\Omega}^{\cdot}\otimes C(\lambda)$. Les Lemmes 3.5 et 3.6 entrainent immédiatement les Théorèmes 3.1~3.3.

REMARQUE 3.1. En utilisant les Lemmes 3.1 et 3.2 on peut construire à la manière explicite les resolutions libres des modules $\hat{\Omega}^{\cdot}$ et $\hat{\hat{\Omega}}^{\cdot}$ comme suit:

$$\begin{tikzcd}
0 & \hat{\Omega}^0 \arrow[l] \arrow[d] & \mathfrak{F}_0^0 \arrow[l, "\rho_0^0"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & & & \\
0 & \hat{\Omega}^1 \arrow[l] \arrow[d] & \mathfrak{F}_0^1 \arrow[l, "\rho_0^1"'] \arrow[d] & \mathfrak{F}_1^1 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] & & \\
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \arrow[d] & & & \\
& & & & & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \\
0 & \hat{\Omega}^n \arrow[l] & \mathfrak{F}_0^n \arrow[l, "\rho_0^n"'] & \mathfrak{F}_1^n \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \mathfrak{F}_n^n \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{3.20}$$

$$\begin{tikzcd}
0 & \hat{\hat{\Omega}}^0 \arrow[l] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{F}}_0^0 \arrow[l, "\bar{\rho}_0^0"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & & & \\
0 & \hat{\hat{\Omega}}^1 \arrow[l] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{F}}_0^1 \arrow[l, "\bar{\rho}_0^1"'] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{F}}_1^1 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] & & \\
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & & \\
0 & \hat{\hat{\Omega}}^{n-2} \arrow[l] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{F}}_0^{n-2} \arrow[l, "\bar{\rho}_0^{n-2}"'] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{F}}_1^{n-2} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \\
& \hat{\hat{\Omega}}^{n-1} & \bar{\mathfrak{F}}_0^{n-1} \arrow[l, "\bar{\rho}_0^{n-1}"'] & \bar{\mathfrak{F}}_1^{n-1} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \bar{\mathfrak{F}}_{n-1}^{n-1} \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{3.21}$$

telles que

$$\mathfrak{F}_0^p\cong\bar{\mathfrak{F}}_0^p\cong\sum_{\nu=0}^{p}\oplus\sum_{J\subset I}\oplus\tilde{\Omega}_J^{p-\nu}, \tag{3.22}$$

où $\tilde{\Omega}_J^{p-\nu}$ désigne $\tilde{\Omega}^{p-\nu}$ se composant des formes $\varphi^{(j_1\cdots j_\nu)}$, et que les applications ρ_0^p et $\bar{\rho}_0^p$ soient dennées par les Propositions 3.1 et 3.2.

On désigne par $\tilde{\Omega}^p(\mu)$ ou $\hat{\Omega}^p(\mu)$ le sous-espace de $\tilde{\Omega}^p$ ou $\hat{\Omega}^p$ se composant des formes φ de degré polynomial au plus $\mu-p$. On désigne aussi par $\mathfrak{F}_q^p(\mu)$ le sous-espace de $\mathfrak{F}_q^p$ se composant des suites de formes $\{\varphi^{(i_1\cdots i_\nu)}\}$, $\varphi^{(i_1\cdots i_\nu)}$ étant de degré polynomial au plus $-L+\mu+\nu-p$, $\boldsymbol{C}[x]$ étant un anneau gradué par rapport au degré polynomial, $\bar{\Omega}^p=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\oplus\bar{\Omega}^p(\mu)$ ou $\bar{\hat{\Omega}}^p=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\oplus\bar{\hat{\Omega}}^p(\mu)$ est un $\boldsymbol{C}[x]$-module gradué, où $\bar{\Omega}^p(\mu)$ ou $\bar{\hat{\Omega}}^p(\mu)$ désigne le sous-espace de $\bar{\Omega}^p$ ou $\bar{\hat{\Omega}}^p$ se composant des formes φ de degré polynomial homogène $\mu-p$. Alors $\mathfrak{F}_q^p$ aussi devient un $\boldsymbol{C}[x]$-module gradué: $\mathfrak{F}_q^p=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\oplus\bar{\mathfrak{F}}_q^p(\mu)$ de sorte que l'on ait le diagramme exact suivant:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \leftarrow & \bar{\hat{\Omega}}^0(\mu) & \leftarrow & \bar{\mathfrak{F}}_0^0(\mu) & \leftarrow & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \leftarrow & \bar{\hat{\Omega}}^1(\mu) & \leftarrow & \bar{\mathfrak{F}}_0^1(\mu) & \leftarrow & \bar{\mathfrak{F}}_1^1(\mu) & \leftarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \leftarrow & \bar{\hat{\Omega}}^{n-2}(\mu) & \leftarrow & \bar{\mathfrak{F}}_0^{n-2}(\mu) & \leftarrow & \bar{\mathfrak{F}}_1^{n-2}(\mu) & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & \bar{\hat{\Omega}}^{n-1}(\mu) & \leftarrow & \bar{\mathfrak{F}}_0^{n-1}(\mu) & \leftarrow & \bar{\mathfrak{F}}_1^{n-1}(\mu) & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \bar{\mathfrak{F}}_{n-1}^{n-1}(\mu) \leftarrow 0
\end{array}
\tag{3.23}
$$

où $\bar{\mathfrak{F}}_q^p(\mu)$ désigne le sous-espace de $\bar{\mathfrak{F}}_q^p$ se composant des suites de formes $\{\bar{\varphi}^{(i_1\cdots i_\nu)}\}$, $\bar{\varphi}^{(i_1\cdots i_\nu)}$ étant de degré polynomial homogène $-L+\mu+\nu-p$. On a évidemment $\bar{\mathfrak{F}}_q^p(\mu)=\mathfrak{F}_q^p(\mu)/\mathfrak{F}_q^p(\mu-1)$. Alors $\hat{\Omega}^\cdot$ et $\mathfrak{F}_q^p$ sont des complexes différentiels filtrés et ρ_q^p sont des homomorphismes compatibles avec ces filtrations. En vue des diagrammes précédents on a immédiatement

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 3.1. *L'application* $\rho_0^p:\mathfrak{F}_0^p(\mu)\to\hat{\Omega}^p(\mu)$ *est surjective pour* $0\leq p\leq n-2$.

DÉMONSTRATION. Les quotients $\hat{\Omega}^p(\mu)/\hat{\Omega}^p(\mu-1)$ ou $\mathfrak{F}_0^p(\mu)/\mathfrak{F}_0^p(\mu-1)$ sont isomorphes à $\bar{\hat{\Omega}}^p(\mu)$ ou $\bar{\mathfrak{F}}_0^p(\mu)$ pour $p\geq 0$ respectivement. D'autre part $\bar{\rho}_0^p$ est surjective. Par consequent ρ_0^p est aussi surjective.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 3.4. *Supposons que* $\boldsymbol{H}^{n-1}(M, \Omega^\cdot(*S))$ *ou* $\boldsymbol{H}^{n-1}(M, \Omega^\cdot(*S)\otimes\boldsymbol{C}(\lambda))$ *s'annule. Alors* $\bar{\rho}_0^{n-1}$ *est surjective dans* (3.19) *et* (3.20).

DÉMONSTRATION. Toute forme φ de $\hat{\Omega}^{n-1}$ s'écrit de la forme $\bar{\nabla}(\psi)$ où $\psi\in\hat{\Omega}^{n-2}$. $\bar{\rho}_0^{n-2}$ étant surjective, $\bar{\rho}_0^{n+1}$ est aussi surjective. C.Q.F.D.

4. Théorème d'évanouissement des hypercohomologies

Dans la suite on supposera que P_0 s'annule. Soit $\bar{\rho}_\lambda$ la représentation scalaire de $\pi_1(\bar{M})$ dans $\boldsymbol{C}^*$ donnée par la connexion $\bar{\omega}$, soit $\bar{\mathcal{S}}_\lambda$ le système local défini par $\bar{\rho}_\lambda$ sur $\bar{M}$. Le théorème de comparaison du à Grothendieck et Deligne (voir [7]) montre l'isomorphisme:

$$H^*(\bar{M}, \bar{\mathcal{S}}_\lambda) \cong \boldsymbol{H}^*(\bar{M}, \Omega^\cdot(*\bar{S})) . \tag{4.1}$$

Faisons l'hypothèse suivante:

(H.4.1) *$\boldsymbol{H}^*(L-(0), \Omega^\cdot(*\bar{S}))$ et $\boldsymbol{H}^*(L-(0), \Omega^\cdot(*\bar{S})\otimes \boldsymbol{C}(\lambda))$ s'annulent pour toute droite L dans $\bar{M}$ passant par l'origine.*

(H.4.1) est equivalente à la condition suivante: *$\sum_1^m \lambda_j l_j$ est différent des entiers.*

THÉORÈME 4.1. i) *A l'hypothèse de* (H.4.1) *$\boldsymbol{H}^p(\bar{M}, \hat{\Omega}^\cdot)$ s'annulent pour $p\neq n$.* ii) *$\boldsymbol{H}^p(\bar{M}, \hat{\Omega}^\cdot\otimes \boldsymbol{C}(\lambda))$ s'annulent pour $p\neq n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi\in\tilde{\Omega}^p$, $0\leqq p\leqq n-1$ telle que $\bar{\nabla}\varphi=0$. Il faut chercher une forme $\theta\in\tilde{\Omega}^{p-1}$ telle que $\varphi=\bar{\nabla}\theta$. On pose $x_1/x_n=t_1$, $x_2/x_n=t_2, \cdots, x_{n-1}/x_n=t_{n-1}$. Moyennant les coordonnées $(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, x_n)$ φ s'écrit de façon suivante: $\varphi=\varphi_1\wedge dx_n+\varphi_0$, où φ_0 et φ_1 désignent des formes à coéfficients polynomiaux qui ne contiennent pas dx_n. Par l'hypothèse du Théorème il existe une $(p-1)$-forme à coéfficients polynomiaux θ_0 qui ne contient pas dx_n par rapport aux coordonnées (t, x_n), telle que

$$(-1)^{p-1}\left[\frac{\partial\theta_0}{\partial x_n}+\sum_1^m \lambda_j l_j \theta_0/x_n\right]=\varphi_1 . \tag{4.2}$$

Par consequent $\varphi'=\varphi-\bar{\nabla}\theta_0$ ne contient pas dx_n, vu que

$$\bar{\omega}=(\sum_1^m \lambda_j l_j) dx_n/x_n+\sum_1^m \lambda_j \frac{d\bar{P}_j(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, 1)}{\bar{P}_j(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, 1)} . \tag{4.3}$$

Car $\bar{\nabla}\varphi'=0$, on a

$$\partial\varphi'/\partial x_n+(\sum_1^m \lambda_j l_j)\varphi'/x_n=0 \tag{4.4}$$

d'où il vient que φ' s'annule. En effect il existe aucune fonction rationnelle non-nulle f satisfaisant à l'équation

$$\partial f/\partial x_n+\sum_1^m \lambda_j l_j f/x_n=0 . \tag{4.5}$$

Donc $\varphi=\bar{\nabla}\theta_0$. θ_0 est une forme rationnelle munie de poles en $\bar{S}$ et l'hyperplan

$x_n=0$. En vertu du Lemme 3.6 il existe une forme θ de $\tilde{\Omega}^{p-1}$ telle que $\varphi=\bar{\nabla}\theta$. Le théorème est ainsi démontré.

On désignera $\boldsymbol{H}^*(M, \hat{\Omega}^\cdot)$ ou $\boldsymbol{H}^*(M, \hat{\Omega}^\cdot\otimes \boldsymbol{C}(\lambda))$ par $\boldsymbol{H}^*(\hat{\Omega}^\cdot, \nabla)$ ou $\boldsymbol{H}^*(\hat{\Omega}^\cdot\otimes\boldsymbol{C}(\lambda), \nabla)$ respectivement. On aussi désignera $\boldsymbol{H}^*(\bar{M}, \hat{\bar{\Omega}}^\cdot)$ ou $\boldsymbol{H}^*(\bar{M}, \hat{\bar{\Omega}}^\cdot\otimes \boldsymbol{C}(\lambda))$ par $\boldsymbol{H}^*(\hat{\bar{\Omega}}^\cdot, \bar{\nabla})$ ou $\boldsymbol{H}^*(\hat{\bar{\Omega}}^\cdot\otimes\boldsymbol{C}(\lambda), \bar{\nabla})$ respectivement.

REMARQUE 4.1. $\bar{M}$ est un espace fibré holomorphe en droite dont la fibre est isomorphe à $L-(0)$. Dans ce cas-là (H.4.1) implique l'évanouissement de (4.1) moyennant la théorie d'une suite spectrale. En effet il existe une suite spectrale $\{E_r^{p,q}\}$ qui converge vers $\mathrm{Gr}\, H^*(\bar{M}, \bar{\mathcal{S}}_\lambda)$ telle que $E_2^{p,q}$ soit isomorphe à $H^p(\bar{M}_0, H^q(L-(0), \bar{\mathcal{S}}_\lambda))$ où $\bar{M}_0$ désigne la base de $\bar{M}$. Or $H^q(L-(0), \bar{\mathcal{S}}_\lambda)$, $0\leq q<\infty$ s'annulent par l'hypothèse (II.4.1) et $E_2^{p,q}$ aussi s'annulent pour tous p et q. Par consequent $H^*(\bar{M}, \bar{\mathcal{S}}_\lambda)$ s'annule.

LEMME 4.3. *Toute forme $\varphi\in\hat{\Omega}^p(\mu+p)$ s'écrit de la forme: $\varphi=\bar{\varphi}+\varphi'$ à la manière unique, où $\bar{\varphi}\in\hat{\bar{\Omega}}^p(\mu+p)$ et $\varphi'\in\tilde{\Omega}^p(\mu+p-1)$ de sorte que l'on ait*

i) *Pour que $\nabla\varphi\in\hat{\Omega}^{p+1}(\mu+p-1)$ il faut et il suffit que $\bar{\nabla}\bar{\varphi}=0$, et*

ii) *Pour que $\varphi\in\hat{\Omega}^p(\mu+p-1)+\nabla\hat{\Omega}^{p-1}(\mu+p)$ il faut et il suffit que $\varphi\in\bar{\nabla}\hat{\bar{\Omega}}^{p-1}(\mu+p)$.*

DÉMONSTRATION. Les Corollaires de la Proposition 3.1 et du Théorème 3.4 montrent que φ s'écrit de la forme $\varphi=\bar{\rho}_0^p(\bar{\alpha})+\varphi'$ où $\bar{\alpha}\in\bar{\mathfrak{F}}_0^p(\mu+p)$ et $\varphi'\in\tilde{\Omega}^p(\mu+p-1)$. On pose $\bar{\varphi}=\bar{\rho}_0^p(\bar{\alpha})$. Il est évident que cette expression est unique. Supposons d'abord que $\nabla\varphi\in\hat{\Omega}^{p+1}(\mu+p-1)$. Clairement $\bar{\varphi}-\rho_0^p(\bar{\alpha})\equiv 0 \pmod{\tilde{\Omega}^p(\mu+p-1)}$, par suite $\nabla\rho_0^p(\bar{\alpha})\in\hat{\Omega}^{p+1}(\mu+p-1)$ car $\nabla\varphi\in\hat{\Omega}^{p+1}(\mu+p-1)$ par l'hypothèse. D'où $\bar{\nabla}\bar{\rho}_0^p(\bar{\alpha})=0$. $\nabla\bar{\varphi}$ donc s'annule. Supposons contrairement que $\bar{\nabla}\bar{\varphi}$ s'annule. Alors $\nabla\rho_0^p(\bar{\alpha})\in\hat{\Omega}^{p+1}(\mu+p-1)$, d'où $\nabla\varphi\in\hat{\Omega}^{p+1}(\mu+p-1)$. i) est donc démontré. Supposons ensuite $\varphi\in\hat{\Omega}^p(\mu+p-1)+\nabla\hat{\Omega}^{p-1}(\mu+p)$. Alors $\bar{\varphi}$ s'écrit de la forme $\nabla\theta$ modulo $\tilde{\Omega}^p(\mu+p-1)$, où $\theta\in\hat{\Omega}^{p-1}(\mu+p)$. Soit $\bar{\theta}$ la partie homogène de degré $(\mu+p)$ de θ. Alors on a $\bar{\theta}\in\hat{\bar{\Omega}}^{p-1}(\mu+p)$ et $\bar{\varphi}=\bar{\nabla}\bar{\theta}$. Supposons contrairement que $\bar{\varphi}\in\bar{\nabla}\hat{\bar{\Omega}}^{p-1}(\mu+p)$ de telle sorte que $\bar{\varphi}=\bar{\nabla}\bar{\rho}_0^{p-1}(\bar{\beta})$ où $\bar{\beta}\in\bar{\mathfrak{F}}_0^{p-1}(\mu+p)$. Alors on a $\bar{\varphi}-\nabla\rho_0^{p-1}(\bar{\beta})\in\tilde{\Omega}^p(\mu+p-1)$. Donc $\varphi\in\hat{\Omega}^p(\mu+p-1)+\nabla\hat{\Omega}^{p-1}(\mu+p)$. ii) est donc démontré.

LEMME 4.4. *Il existe une suite spectrale $\{E_r^{\mu,\nu}, \nabla^\mu\}$ où $\sum_{-\infty<\nu<\infty}\otimes E_r^{\mu,\nu}=E_r^\mu$ du complexe filtré $\{\hat{\Omega}^\cdot, \nabla\}$ telle que*

$$\sum_{-\infty<\mu<\infty}\oplus E_1^\mu=\boldsymbol{H}^*(\hat{\bar{\Omega}}^\cdot, \bar{\nabla}) \tag{4.5}$$

et

$$\sum_{-\infty<\mu<\infty}\oplus E_\infty^\mu=\mathrm{Gr}\, H^*(\hat{\Omega}^\cdot, \nabla) \tag{4.6}$$

où $\mathrm{Gr}\,\boldsymbol{H}^*(\hat{\Omega}^\cdot, \nabla)$ *désigne l'anneau gradué de l'anneau filtré de* $\boldsymbol{H}^*(\hat{\Omega}^\cdot, \nabla)$.

DÉMONSTRATION. Z_r^μ soit le sous-espace vectoriel de $\hat{\Omega}^\cdot(\mu)$ se composant des formes $\varphi \in \hat{\Omega}^\cdot(\mu)$ telles que $\nabla\varphi \in \hat{\Omega}^\cdot(\mu-r)$. On pose $\nabla Z_r^\mu = B_r^\mu$ et $E_r^\mu = Z_r^\mu/(Z_{r-1}^{\mu-1} + B_{r-1}^\mu)$. On définit ∇^μ par $\nabla^\mu h_r^\mu = \nabla c_r^\mu$ (mod $Z_{r-1}^{\mu-r-1} + B_{r-1}^{\mu-r}$) où h_r^μ désigne c_r^μ (mod $Z_{r-1}^{\mu-1} + B_{r-1}^\mu$), c_r^μ étant un élement de Z_r^μ. D'après le Lemme 4.3 E_1^μ est isomorphe à $\mathrm{Ker}\,\nabla \cap \hat{\hat{\Omega}}^\cdot(\mu)/\bar{\nabla}\hat{\hat{\Omega}}^\cdot(\mu)$. Donc on a (4.5). (4.6) découle d'une propriété générale de la théorie de la suite spectrale.

En vue du Théorème 4.1 à l'hypothèse de (H.4.1) on a

$$\sum_{\mu+\nu\neq n} \oplus E_r^{\mu,\nu} = 0\,. \tag{4.7}$$

Par consequent la suite spectrale $\{E_r^{\mu,\nu}, \nabla^\mu\}$ est dégénérée et on obtient le suivant:

THÉORÈME 4.2. *A l'hypothèse de* (H.4.1) $\boldsymbol{H}^p(M, \hat{\Omega}^\cdot)$ *ainsi que* $\boldsymbol{H}^p(M, \hat{\Omega}^\cdot \otimes \boldsymbol{C}(\lambda))$ *s'annulent pour* $p \neq n$. $\boldsymbol{H}^n(M, \hat{\Omega}^\cdot)$ *ou* $\boldsymbol{H}^n(M, \hat{\Omega}^\cdot \otimes \boldsymbol{C}(\lambda))$ *est isomorphe à* $\boldsymbol{H}^n(\bar{M}, \hat{\Omega}^\cdot)$ *ou* $\boldsymbol{H}^n(\bar{M}, \hat{\hat{\Omega}}^\cdot \otimes \boldsymbol{C}((\lambda))$ *respectivement.*

Quant à $\boldsymbol{H}^n(\bar{M}, \hat{\hat{\Omega}}^\cdot)$ ou $\boldsymbol{H}^n(\bar{M}, \hat{\hat{\Omega}}^\cdot \otimes \boldsymbol{C}(\lambda))$ on a le

THÉORÈME 4.3. *Soit* $\mathfrak{F}$ *le sous-module de* $\tilde{\Omega}^n$ *engendré par les formes* $\bar{P}_1 \cdot \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_m \cdot \{d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}_{i_\nu}/\bar{P}_{i_\nu}\}$ *dans* $\tilde{\Omega}^\cdot$ (*voir Remarque* (3.1)) *où* $(i_1, i_2, \cdots, i_\nu)$ *parcoure toute suite des indices* $i_1, i_2, \cdots, i_\nu$ *telles que* $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu \leqq m$ *et* $1 \leqq \nu \leqq n-1$, *et par les formes* $\bar{P}_1 \cdot \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_m \{\sum_1^m \lambda_j (d\bar{P}_j/\bar{P}_j)\} \wedge d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}_{i_{n-1}}/\bar{P}_{i_{n-1}}$ *où* $(i_1, i_2, \cdots, i_{n-1})$ *parcoure toute suite des indices* $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}$ *telles que* $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \leqq m$. *Alors on a des isomorphismes*

$$\boldsymbol{H}^n(\bar{M};\, \hat{\hat{\Omega}}^\cdot, \bar{\nabla}) \cong \tilde{\Omega}^n/\mathfrak{F} \tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{H}^n(\bar{M};\, \hat{\hat{\Omega}}^\cdot \otimes \boldsymbol{C}(\lambda), \bar{\nabla}) \cong \boldsymbol{C}[x] \otimes \boldsymbol{C}(\lambda)/\mathfrak{Z} \otimes \boldsymbol{C}(\lambda)\,. \tag{4.9}$$

DÉMONSTRATION. On identifie dans la suite $\tilde{\Omega}^n$ avec $\boldsymbol{C}[x]$ moyennant (3.3). On pose pour $1 \leqq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_t \leqq m$

$$\begin{aligned} &\xi^{(i_1 \cdots i_{t-1})}_{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_t}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &\quad = \bar{\nabla}\Big\{\bar{P}_1 \cdots \bar{P}_m x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n} \cdot x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_t} \cdot \frac{d\bar{P}_{i_1}}{\bar{P}_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{d\bar{P}_{i_{t-1}}}{\bar{P}_{i_{t-1}}} \\ &\qquad \wedge \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{dx_{\sigma_1} \wedge dx_{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma_t}}\Big\}\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Alors on a

$$
\begin{aligned}
(4.11)\qquad & \xi^{(i_1 \cdots i_{t-1})}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \\
&= \sum_{A_1, \cdots, A_m} \left\{ \begin{vmatrix} \nu_{\sigma_1}+1, & \cdots & \nu_{\sigma_t}+1 \\ \alpha_{i_1\sigma_1}, & \cdots & \alpha_{i_1\sigma_t} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_{t-1}\sigma_1} & \cdots & \alpha_{i_{t-1}\sigma_t} \end{vmatrix} + \sum_1^m (1+\lambda_j) \begin{vmatrix} \alpha_{j\sigma_1} & \cdots & \alpha_{j\sigma_t} \\ \alpha_{i_1\sigma_1} & \cdots & \alpha_{i_1\sigma_t} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_{t-1}\sigma_1} & \cdots & \alpha_{i_{t-1}\sigma_t} \end{vmatrix} \right\} \\
&\quad \times a^{(1)}_{A_1} \cdot a^{(2)}_{A_2} \cdots a^{(m)}_{A_m} x_1^{\nu_1 + \sum_1^m \alpha_{\sigma 1}}, \cdots, x_n^{\nu_n + \sum_1^m \alpha_{\sigma 1}},
\end{aligned}
$$

où A_j désigne une suite des entiers non-negatifs $(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_m})$ telle que $\bar{P}_j$ soit égal à $\sum_{A_j} a^{(j)}_{A_j} \cdot x_1^{\alpha_{j_1}} \cdots x_n^{\alpha_{j_n}}$. On a évidemment $\sum_{\nu=1}^n \alpha_{j_\nu} = l_j$, l_j étant le degré du polynôme $\bar{P}_j$. Ceci implique pour $t=1, 2, 3, \cdots, n$,

$$
\begin{aligned}
(4.12)\qquad & \sum_{\sigma_t=1}^n \xi^{(i_1 \cdots i_{t-1})}_{(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t)}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) = \sum_{u=1}^{t-1} \xi^{(i_1 \cdots i_{u-1} i_{u+1} \cdots i_{t-1})}_{(\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1})} \cdot (-1)^{t+u} l_{i_u} \\
&+ \sum_{A_1, \cdots, A_m} \{\nu + n + \sum_1^m (1+\lambda_j) l_j\} \cdot \bar{P}_1 \cdots \bar{P}_m \frac{\partial(\bar{P}_{i_1} \cdots \bar{P}_{i_{t-1}})}{\partial(x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_{t-1}})} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}.
\end{aligned}
$$

D'autre part on a

$$
\begin{aligned}
(4.13)\qquad & \xi^{(i_1 \cdots i_{n-1})}_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(-1, \cdots, -1) = \sum_1^m (1+\lambda_j) \cdot \frac{\partial(P_j P_{i_1} \cdots P_{i_{n-1}})}{\partial(x_1 x_2 \cdots x_n)} \\
&\quad \times x_1^{-1+\sum_1^m \alpha_{\sigma 1}} \cdots x_n^{-1+\sum_1^m \alpha_{\sigma n}}.
\end{aligned}
$$

D'où il vient que $\nabla(\hat{\Omega}^{n-1})$ contient $\mathfrak{J}$. Or $\xi^{(i_1 \cdots i_{t-1})}_{\sigma_1 \cdots \sigma_t}$ est contenu dans l'idéal homogène engendré par les formes

$$
\bar{P} \cdot \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_m \cdot (d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (d\bar{P}_{i_{t-1}}/P_{i_{t-1}}) \quad \text{et}
$$

$$
\bar{P}_1 \cdot \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_m \cdot (d\bar{P}_j/\bar{P}_j) \wedge (d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (d\bar{P}_{i_{t-1}}/\bar{P}_{i_{t-1}})
$$

dans $H(\tilde{\Omega}^\cdot)$ où $1 \leq j \leq m$. Donc $\bar{\nabla}(\hat{\Omega}^{n-1})$ est contenu dans $\mathfrak{J}$, autrement dit $\mathfrak{J} = \bar{\nabla}(\hat{\Omega}^{n-1})$. Le théorème est ainsi démontré.

Problème. Est-il vrai l'analogue de Théorème 4.2 *dans le cas où* P_0 *ne s'annule pas*? Dans ce cas la connexion ω n'est pas de singularités régulières. Le théorème de comparaison de Deligne et Grothendieck ne s'applique plus. Il me semble que la finitude de hypercohomologies $H^*(M, \nabla_\omega)$ n'est pas encore démontrée dans toute la généralité, bien que T. Kawai a démontré un théorème de finitude d'un module différentiel à coéfficients analytiques par la méthode de analyse microlocal (voir [11]).

5. Equations aux différences linéaires

En vue de (H.3.2) $\mathfrak{J}$ est un idéal de dimension nulle. On désigne $\mathfrak{J}\cap\tilde{\Omega}^n(\mu+n)$ par $\mathfrak{J}(\mu)$. Alors il existe un nombre N^* tel que $\tilde{\Omega}^n(\mu+n)=\mathfrak{J}(\mu)$ pour $\mu\geqq N^*$ et que $\tilde{\Omega}^n/\mathfrak{J}\cong\sum_{0\leqslant\mu\leqslant N^*-1}\oplus\tilde{\Omega}^n(\mu+n)/\mathfrak{J}(\mu)$. On choisit un sous-espace $\bar{\mathcal{K}}(\mu)$ de $\tilde{\Omega}^n(\mu+n)$ tel que $\tilde{\Omega}^n(\mu+n)$ soit la somme directe de $\mathfrak{J}(\mu)$ et $\bar{\mathcal{K}}(\mu)$. Evidemment $\bar{\mathcal{K}}=\sum_{0\leqslant\mu\leqslant N^*-1}\oplus\bar{\mathcal{K}}(\mu)$ forme une base de $\tilde{\Omega}^n/\mathfrak{J}$. Théorème 4.2 et (4.12) entrainent immédiatement le

LEMME 5.1. *Soit $\varphi\in\tilde{\Omega}^n(\mu+n)$. Alors φ est cohomologue à $\bar{\varphi}+\varphi'$ où $\bar{\varphi}\in\bar{\mathcal{K}}(\mu)$ et $\varphi'\in\tilde{\Omega}^n(\mu-1+n)$ telles que $\bar{\varphi}\cdot(\mu+n+\sum_1^m\lambda_j l_j)$ et $\varphi'\cdot(\mu+n+\sum_1^m\lambda_j l_j)$ soient polynômes de λ.*

LEMME 5.2. *A l'hypothèse de* (H.3.3) *une forme quelconque $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{\Omega}^n(\mu+n)$ s'écrit de façon suivante:*

$$(5.1)\quad \tilde{\varphi}=P_1\cdot P_2\cdots P_m\{\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_\nu\leqslant m}(dP_{i_1}/P_{i_1})\wedge(dP_{i_2}/P_{i_2})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge\tilde{\varphi}^{(i_1,\cdots,i_\nu)}\}$$

où $\tilde{\varphi}^{(i_1,\cdots,i_\nu)}\in\tilde{\Omega}^{n-\nu}(-L+\mu+n)$ ou $\tilde{\Omega}^{n-\nu}(-L+N^*+n)$ suivant que $\mu\geqq N^*$ ou $\mu<N^*$ respectivement.

Ceci étant, soit $\bar{\varphi}$ une forme quelconque de $\bar{\mathcal{K}}(\mu)$. Alors d'après le Lemme 5.2 elle s'écrit de la forme (5.1). Celle-ci implique

$$\begin{aligned}(5.2)\quad \bar{\varphi}/P_1=&P_2\cdot P_3\cdots P_m\{\sum_{2\leqslant i_2<\cdots<i_\nu\leqslant m}(dP_1/P_1)\wedge(dP_{i_2}/P_{i_2})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge\tilde{\varphi}^{(1,i_2,\cdots,i_\nu)}\}\\&+P_2\cdot P_3\cdots P_m\{\sum_{2\leqslant i_1<\cdots<i_\nu\leqslant m}(dP_{i_1}/P_{i_1})\wedge(dP_{i_2}/P_{i_2})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge\tilde{\varphi}^{(i_1,i_2,\cdots,i_\nu)}\}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}(5.3)\quad &\nabla(P_2\cdot P_3\cdots P_m\sum(dP_{i_2}/P_{i_2})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge\tilde{\varphi}^{(1,i_2,\cdots,i_\nu)})\\&=\lambda_1P_2\cdot P_3\cdots P_m\sum(dP_1/P_1)\wedge(dP_{i_2}/P_{i_2})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge\tilde{\varphi}^{(1,i_2,\cdots,i_\nu)}\\&+(-1)^{\nu-1}P_2\cdot P_3\cdots P_m\sum(dP_{i_2}/P_{i_2})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge d\tilde{\varphi}^{(1,i_2,\cdots,i_\nu)}\\&+P_2\cdot P_3\cdots P_m\sum_1^m(\lambda_j+1)(dP_j/P_j)\wedge(dP_{i_2}/P_{i_2})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge\tilde{\varphi}^{(1,i_2,\cdots,i_\nu)}\end{aligned}$$

d'où il vient que $\bar{\varphi}/P_1$ est cohomologue à

$$\begin{aligned}(5.4)\quad &P_2\cdot P_3\cdots P_m\sum(dP_{i_1}/P_{i_1})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge\tilde{\varphi}^{(i_1,\cdots,i_\nu)}\\&+\frac{(-1)^\nu P_2\cdot P_3\cdots P_m}{\lambda_1}\sum(dP_{i_2}/P_{i_2})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge d\tilde{\varphi}^{(1,i_2,\cdots,i_\nu)}\\&-\frac{P_2\cdot P_3\cdots P_m}{\lambda_1}\sum_1^m(\lambda_j+1)(dP_j/P_j)\wedge(dP_{i_2}/P_{i_2})\wedge\cdots\wedge(dP_{i_\nu}/P_{i_\nu})\wedge\tilde{\varphi}^{(1,i_2,\cdots,i_\nu)}.\end{aligned}$$

Celle-ci est contenue dans $\tilde{\Omega}^n(-l_1+\mu+n)$ ou $\tilde{\Omega}^n(-l_1+N^*+n)$ suivant que $\mu\geqq N^*$

ou $\mu<N^*$ respectivement. En utilisant successivement l'égalité (4.12) et Théorème 4.2 on peut l'exprimer comme classe de cohomologie par une forme de $\bar{\mathcal{K}}$ comme suit:

$$\bar{\varphi}/P_1 \sim \sum_{\mu=0}^{r} \bar{\phi}(\mu) \tag{5.5}$$

où r désigne N^*-1, $\mu-l_1$ ou N^*-l_1 suivant que $\mu \geqq N^*+l_1$, $N^*+l_1>\mu \geqq N^*$ ou $\mu<N^*$ respectivement et que $\bar{\phi}(\mu)$ désigne une forme de $\bar{\mathcal{K}}(\mu)$. D'après Lemme 5.1 $\lambda_1 \prod_{\sigma=\mu}^{s} (\sigma-l_1+n+\sum_{1}^{m} \lambda_j l_j)\bar{\phi}(\mu)$ sont polynômes de λ, où s désigne $\mu-l_1$ ou N^*-l_1 suivant que $\mu \geqq N^*$ ou $\mu<N^*$. Il en résulte que

THÉORÈME 5.1. *$\bar{\varphi}/P_1$ est cohomologue à $\sum_{\mu=0}^{r} \bar{\phi}(\mu)$ où $\bar{\phi}(\mu)$ est munie de la propriété précédente.*

De la même manière que Théorème 5.1 on obtient le

THÉORÈME 5.2. *$P_1 \cdot \bar{\varphi}$ est cohomologue à $\sum_{\mu=0}^{r} \bar{\phi}(\mu)$ où r désigne N^*-1 ou $\mu+l_1$ suivant que $\mu+l_1 \geqq N^*$ ou $\mu+l_1<N^*$, où $\bar{\phi}(\mu) \in \bar{\mathcal{K}}(\mu)$. $\prod_{\sigma=\mu}^{\mu+l_1} (\sigma-l_1+n+\sum_{1}^{m} \lambda_j l_j) \cdot \bar{\phi}(\mu)$ sont polynômes de λ.*

On désigne par $\{\varphi_\iota\}$ une base de $\boldsymbol{H}^n(M, \Omega^{\cdot}(*S))$. Alors Théorème 5.1 et 5.2 montrent que $P_j^{\pm 1}\varphi_\iota$ sont cohomologues aux combinaisons linéaires de $\{\varphi_\iota\}$ de façon suivante:

$$P_j^{\pm 1}\varphi_\iota \sim \sum_{\kappa=1}^{N} A_{\kappa\iota}^{(j)\pm 1}\varphi_\kappa \,, \tag{5.6}$$

où $A_{\kappa\iota}^{(j)}$ désignent fonctions rationelles de λ. Dès maintenant supposons que P_0 s'annule. Soit ρ la représentation scalaire de $\pi_1(M)$ dans $\boldsymbol{C}^*$ donnée par la connexion ω, et soit $\mathcal{S}_\lambda$ le système local défini par ρ sur M. Le théorème de comparison (voir [7]) dit

$$H^*(M, \mathcal{S}_\lambda) \simeq \boldsymbol{H}^*(M, \Omega^{\cdot}(*S)) \,, \tag{5.7}$$

d'où il vient que $H_n(M, \mathcal{S}_{-\lambda})$ est le dual de $\boldsymbol{H}^n(M, \Omega^{\cdot}(*S))$ moyennant l'intégrale suivante:

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_\gamma P_1^{\lambda_1} \cdot P_2^{\lambda_2} \cdots P_m^{\lambda_m} \varphi \tag{5.8}$$

où $\varphi \in \Omega^n(*S)$ et $\gamma \in H_n(M, \mathcal{S}_{-\lambda})$.

Posons $\lambda_j = \lambda_j^{(0)} + n_j t$ où $\lambda^{(0)}$ désigne un point fixe de $\boldsymbol{C}^m$ et que n_j désignent des entiers positifs. Supposons les deux conditions suivantes:

(H.5.1) *La fonction* $F=\sum_0^m n_j \log|P_j|$ *soit non-dégénerée à tous ses points critiques dans* M. *On désigne ces points par* $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(N)}$ *qui aussi s'identifient avec les points annulant la forme* ω *et que* $\sum_0^m n_j \log|P_j|$ (*resp.* $\sum n_j \arg P_j$) *soient différentes les unes des autres aux points critiques.*

(H.5.2) r *hypersurfaces algébriques quelconques de* S_j $(1\leqq j\leqq m)$ *et de l'hyperplan à l'infini* S_0 *soient à croisements normaux avec eux dans le compactifié* $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ *de* M, *pourvu que* $1\leqq r\leqq n$. *Alors*

LEMME 5.3. *Soient* $F(\alpha^{(1)})<F(\alpha^{(2)})<\cdots<F(\alpha^{(N)})$. *Si* λ *est générique, on peut construire les cycles* $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_N$ *de* $H_n(M, \mathcal{S}_{-\lambda})$ *correspondant aux points critiques* $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \cdots, \alpha^{(N)}$ *tels que* i) γ_ν *contient le point* $\alpha^{(\nu)}$ *mais ne contient aucuns autres points critiques,* ii) γ_ν *est engendré par le champs de vecteur* grad F *dans le voisinage de* $\alpha^{(\nu)}$ *de sorte que* $\arg P_1^{\lambda_1}\cdot P_2^{\lambda_2}\cdots P_m^{\lambda_m}$ *soit constant sur* γ_ν *dans ce voisinage et* F *ait la valeur maximale à* $\alpha^{(\nu)}$ *sur* γ_ν.

Ce lemme est démontré par le fait que le champs grad F n'a aucun point limite negatif de trajecteurs à l'infini S_0 dans $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ (voir [2] Théorème 3). Cette construction est essentiellement la même que celle de A. Hattori et T. Kimura [10]. On l'illustrera dans des exemples simples. (Voir Fig. 6.1~6.3).

La méthode de points de selle permet d'obtenir la formule asymptotique de (5.8) comme suit:

LEMME 5.4. *On a la formule asymptotique pour* $t\to{}^{+}\infty$:

$$\int P_1^{\lambda_1}\cdot P_2^{\lambda_2}\cdots P_m^{\lambda_m}\varphi\sim+P_1(\alpha^{(\nu)})^{\lambda_1}\cdots P_m(\alpha^{(\nu)})^{\lambda_m}\cdot\Gamma(1/2)^n/\Gamma(n/2) \times t^{-n/2}\cdot\varphi(\alpha^{(\nu)})\cdot(1+0(1/t))\,. \tag{5.9}$$

Ce qui signifie

THÉORÈME 5.2. *Les intégrales* $(1\leqq\kappa, \nu\leqq N)$

$$\hat{\varphi}_{\kappa\nu}(\lambda)=\int_{\gamma_\nu} P_1^{\lambda_1}\cdot P_2^{\lambda_2}\cdots P_m^{\lambda_m}\cdot\varphi_\kappa \tag{5.10}$$

donnent la solution unique dans Théorème 1.2 *de l'équation* (1.1) *par rapport aux variables* λ *de* $\boldsymbol{C}^m$. *Ici* μ_i *sont tous égals à* 0.

Il me semble interessant de chercher les matrices de connexion de (5.10) correspondant aux fonctions de Morse F pour diverses directions génériques $(n_1, n_2, \cdots, n_m)$. On donnera un exmple très simple de celles-là dans le paragraphe suivant.

6. Exemples

1. *Cas* $m=1$. Il est bien connu que le rang $\tilde{\Omega}^n/d\bar{P}$ est égal à $(l-1)^n$ et N^* est égal à $2nl-2n+1$. D'où

THÉORÈME 6.1. *$H^n(M, \Omega^{\cdot}(*S))$ est de rang $(l-1)^n$.*

2. *Cas* $m\geqq n+1$ *et toutes les* l_j *sont égales à un.* On désigne par $\mathfrak{J}'$ l'idéal engendré par $\bar{P}_1\cdot\bar{P}_2\cdots\bar{P}_m(d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1})\wedge\cdots\wedge(d\bar{P}_{i_\nu}/\bar{P}_{i_\nu})$ $(1\leqq\nu\leqq n-1)$. Alors $\boldsymbol{C}[x]/\mathfrak{J}'$ est isomorphe à l'espace linéaire engendré par $x_1^{\nu_1}\cdot x_2^{\nu_2}\cdots x_n^{\nu_n}$ où $\nu_1+\cdots+\nu_n\leqq m-n$. Or d'après la formule de fraction partielle $x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\cdots x_n^{\nu_n}/P_1P_2\cdots P_m$ s'écrit de la forme

$$\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_n\leqq m}\frac{c_{i_1i_2\cdots i_n}}{P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_n}} \tag{6.1}$$

et vice versa, où $c_{i_1i_2\cdots i_n}$ désignent des constantes. Soit $\Omega^p_{\log}(*S)$ l'anneau de p-formes méromorphes munies de poles logarithmiques en S, autrement dit l'espace vectoriel engendré par les p-formes $\varphi_J=dP_{j_1}/P_{j_1}\wedge\cdots\wedge dP_{j_p}/P_{j_p}$ où J désigne une suite des indices $j_1, j_2, \cdots, j_p$ (voir [8]). Alors $\tilde{\Omega}^n/\mathfrak{J}'$ est isomorphe à $\Omega^n_{\log}(*S)$, vu que

$$\frac{dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n}{P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_n}}=\frac{dP_{i_1}\wedge dP_{i_2}\wedge\cdots\wedge dP_{i_n}}{P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_n}} \tag{6.2}$$

à une constante près. D'où il vient que $\tilde{\Omega}^n/\mathfrak{J}$ est isomorphe à $\Omega^n_{\log}(*S)/\omega\wedge\Omega^{n-1}_{\log}(*S)$. Par consequent

THÉORÈME 6.2. *$H^n(M, \Omega^{\cdot}(*S))\cong\Omega^n_{\log}(*S)/\omega\wedge\Omega^{n-1}_{\log}(*S)$.*

Ceci étant, $\hat{\varphi}(J;\lambda)$ soit l'intégrale de φ_J ci-dessus définie par (5.8). Dans le cas de position générale, d'après l'égalité

$$\int\omega\wedge\Omega^{n-1}_{\log}(*S)=0\,, \tag{6.3}$$

on a

$$\lambda_m\hat{\varphi}(\{m, j_1, \cdots, j_{n-1}\};\lambda)=-\sum_{\kappa\notin\{m,j_1,\cdots,j_{n-1}\}}\lambda_\kappa\hat{\varphi}(\{\kappa, j_1, \cdots, j_{n-1}\};\lambda) \tag{6.4}$$

d'où $H^n(M, \Omega^{\cdot}(*S))$ est engendré par $dP_{j_1}/P_{j_1}\wedge\cdots\wedge dP_{j_n}/P_{j_n}$ où $1<j_1<\cdots<j_{j_n}\leqq m-1$. Soient $P_j=\sum_1^n a_{j\nu}x_\nu+a_{j,n+1}$. On désigne par $[P_{j_1}, P_{j_2}, \cdots, P_{j_n}]$ ou $[P_{j_0}, P_{j_1}, \cdots, P_{j_n}]$ les déterminants définis comme suit respectivement:

$$\begin{vmatrix} a_{j_1 1} & \cdots & a_{j_1 n} \\ a_{j_2 1} & \cdots & a_{j_2 n} \\ & & \\ a_{j_n 1} & \cdots & a_{j_n n} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{j_0 1} & a_{j_0 2} & \cdots & a_{j_0 n} & a_{j_0 n+1} \\ a_{j_1 1} & a_{j_1 2} & \cdots & a_{j_1 n} & a_{j_1 n+1} \\ & & & & \\ a_{j_n 1} & a_{j_n 2} & \cdots & a_{j_n n} & a_{j_n n+1} \end{vmatrix}.$$

Alors les équations aux différences partielles pour $\hat{\varphi}(J;\lambda)$ s'expriment de façon suivante:

$$\text{(6.5)} \qquad \hat{\varphi}(J;\lambda-e_{j_1})\cdot(\lambda_{j_1}-1) = -\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+n}\sum_{j_0\in I-J}\frac{[P_{j_0}P_{j_1}\cdots P_{j_n}]}{[P_{j_0}P_{j_1}\cdots P_{j_n}]}\lambda_{j_0}\hat{\varphi}(\{\{j_0\}\cup\{J-j_\nu\};\lambda)$$

ou bien

$$\hat{\varphi}(J;\lambda-e_{j_0})=\left\{\frac{[P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_n}]}{[P_{j_0},P_{j_1},\cdots,P_{j_n}]}\right\}\sum(-1)^{\nu}\cdot\hat{\varphi}(\{\{j_0\}\cup\{J-j_\nu\}\};\lambda)$$

pour $j_0\in I-J$.

REMARQUE 6.1. Supposons que S_j soient toutes réelles et en position générale à l'infini. Le nombre d'Euler $\chi(M)$ qui est égal au nombre des points critiques de la fonction $F=\sum_1^m n_j\log|P_j|$ (voir Lemme 5.3) est aussi égal à celui des chambres compactes dans $\boldsymbol{R}^n$ dont les murs sont toutes définies par les équations $P_j=0$ (voir aussi [10]). En effet les points critiques de F $\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\cdots,\alpha^{(N)}$ sont tous réels, et il existe un point et un seul point critique dans chaque chambre compacte. Il n'existe aucun point critique dans les chambres non-compactes. Voir la figure 6.1.

3. *Cas de l'intégrale*

$$\text{(6.7)} \qquad \hat{\varphi}(J;\lambda,\mu)=\int\sum_{j=1}^{m}P_j^{\lambda_j}\cdot\exp\left(\sum_1^n\mu_jx_j\right)\varphi_J$$

où $\varphi_J\in\Omega^n(*S)$. Dans ce cas la connexion correspondante $\omega=\sum_1^m\lambda_j dP_j/P_j+\sum_1^n\mu_j dx_j$ est à points singuliers irréguliers. On peut démontrer de la même manière qu'au précédente le

THÉORÈME 6.3. $\boldsymbol{H}^p(M,\Omega^\cdot(*S))=\boldsymbol{H}^p(M,\Omega^\cdot(*S)\otimes\boldsymbol{C}(\lambda))=(0)$ *pour* $p\neq n$ *et* $\boldsymbol{H}^n(M,\Omega^\cdot(*S))\cong\Omega^n_{\log}(*S)$ *et* $\boldsymbol{H}^n(M,\Omega^\cdot(*S)\otimes\boldsymbol{C}(\lambda))\cong\Omega^n_{\log}(*S)\otimes\boldsymbol{C}(\lambda)$. Les équations aux différences s'écrivent de façon suivante:

$$\text{(6.8)} \qquad (\lambda_{j_1}-1)\hat{\varphi}(J;\lambda-e_{j_1})=-\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu+n}\sum_{j_0\in I-J}\lambda_{j_0}\frac{[P_{j_0}P_{j_2}\cdots P_{j_n}]}{[P_{j_0}P_{j_1}\cdots P_{j_n}]}\times\hat{\varphi}(\{\{j_0\}\cup\{J-j_\nu\}\};\lambda)+\frac{[\mu,P_{j_2},\cdots,P_{j_n}]}{[P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_n}]}\hat{\varphi}(J;\lambda)$$

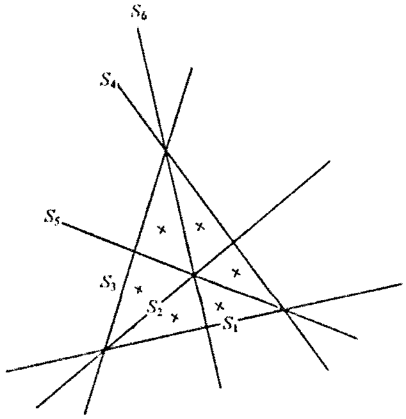
où $|\boldsymbol{\mu}, P_{j_2}, \cdots, P_{j_n}|$ désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ a_{j_2 1} & a_{j_2 2} & \cdots & a_{j_2 n} \\ & & & \\ a_{j_n 1} & a_{j_n 2} & \cdots & a_{j_n 2} \end{vmatrix}$$

et

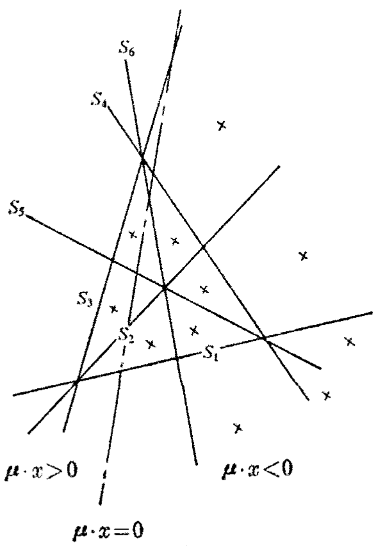
$$\hat{\varphi}(J;\, \lambda - e_{j_0}) = \frac{|P_{j_1}, P_{j_2}, \cdots, P_{j_n}|}{|P_{j_0}, P_{j_1}, \cdots, P_{j_n}|} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \hat{\varphi}(\{\{j_0\} \cap \{J - j_\nu\};\, \lambda) . \tag{6.9}$$

REMARQUE 6.2. Quand S_j, λ_j et μ_j sont tous réels, alors le rang de $\boldsymbol{H}^n(M, \Omega(*S))$ est égal au nombre des chambres compactes plus celui des chambres non-compactes C où $\boldsymbol{\mu}\cdot x \to -\infty$ pour $|x| \to \infty$ dans $\boldsymbol{R}^n$. Voir la figure 6.2.



$\mu=6$

Fig. 6.1



$\mu=11$

Fig. 6.2

4. Soit $Q = \sum_{\nu, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ une forme quadratique non-dégénérée. On considère l'intégrale suivante:

$$\int x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} (Q(x)-1)^{\lambda_{n+1}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n . \tag{6.10}$$

On pose $P_j = x_j$ pour $1 \leqq j \leqq n$ et $P_{n+1} = Q(x) - 1$. Alors par un calcul élémentaire on voit que $C[x]/\mathfrak{I}$ *est isomorphe à l'espace vectoriel engendré par* $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_\nu}$ *pour* $1\leqslant i_1<\cdots<i_\nu\leqslant n$ *et* $1\leqslant\nu\leqslant n$. Sa dimension est donc égale à 2^n. Supposons la matrice symétrique $A=((a_{ij}))$ positive et définie, et que $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$ soient toutes positifs. Alors le domaine D dans $\boldsymbol{R}^n$ définie par $Q(x)-1<0$ est divisé par les hyperplans $x_j=0$ en 2^n chambres. Dans chaque chambre il existe un et un seul point critique, donc 2^n points critiques en total dans D. Il n'existe aucun autre point

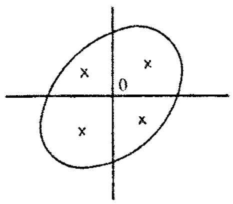


Fig. 6.3

critique. A chaque point critique il correspond une et une seule formule asymptotique dans Lemme 5.4 (voir la figure 6.3).

5. *Calcul de matrice de connexion de l'intégrale de Pochhammer.* On considère le cas special de l'exemple 2:

$$\hat{\varphi}(\lambda)=\int\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\lambda_j}\cdot\varphi\,. \tag{6.11}$$

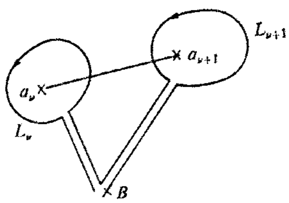
Alors $\boldsymbol{H}^1(M, \Omega^{\cdot}(*S))$ est engendré par $\varphi_j=dx/(x-a_j)$, où $1\leqslant j\leqslant m$. On a

$$\sum_1^m\hat{\varphi}_j(\lambda)\cdot\lambda_j=0\,. \tag{6.12}$$

Supposons de plus que $a_1<a_2<\cdots<a_m$. Les points critiques $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ de la fonction $F=\sum_1^m n_j\log|x-a_j|$ satisfont à l'inégalité suivante *si* n_j *sont tous positifs*:

$$a_1<\alpha_1<a_2<\alpha_2<\cdots<\alpha_{m-1}<a_m\,. \tag{6.13}$$

On peut choisir comme cycles de $H_1(M, \mathcal{S}_{-\lambda})$ les intervalles $\gamma_1=[a_1, a_2], \cdots, \gamma_{m-1}=[a_{m-1}, a_m]$. En effet soit B un point base de M. Choisissons des lacets L_ν reliant les deux points B et a_ν et faisant un tour de a_ν. Alors on voit que les intégrales (6.11) sur $[a_\nu, a_{\nu+1}]$ et $L_\nu/(1-e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_\nu})+L_{\nu+1}/(1-e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_{\nu+1}})$ sont égales, si $\mathrm{Re}\,\lambda_\nu$ et $\mathrm{Re}\,\lambda_{\nu+1}$ sont plus grands que -1 (autrement on doit remplacer l'intégrale sur $[a_\nu, a_{\nu+1}]$ par sa 'partie finie' dans le sens de J. Hadamard). Le dernier bien définit un élément de $H_1(M, \mathcal{S}_{-\lambda})$. Par la méthode de point de selle on a les formules asymptotiques suivantes pour $t\to\infty$:



$$(6.14)\qquad \int_{\gamma_\nu} \prod (x-a_j)^{\lambda_j}\varphi \sim \pm \prod_{j=1}^{m} (\alpha_\nu - a_j)\cdot t^{-1/2}\varphi(\alpha_\nu)\cdot(1+0(1/t)) .$$

Supposons d'autre part que $n_1>0$, $n_2>0$, $\cdots$, $n_r>0$, $n_{r+1}<0$, $\cdots$, $n_m<0$ *et que* $\sum_1^m n_j>0$ *où* $r\geqq[m/2]+1$. Pour la simplicité supposons que les points critiques de F $\alpha'_1, \cdots, \alpha'_{m-1}$ soient tous réels et que $\alpha'_1<\cdots<\alpha'_{m-1}$ et $a_{q_j}<\alpha'_j<a_{q_j+1}$. On peut choisir les $(m-1)$ cycles $\gamma', \gamma'_2, \cdots, \gamma'_{m-1}$ tels que γ'_ν, contient α'_ν et que $\mathrm{Re}\,(x)$ ait son maximum en α'_ν sur γ'_ν. Définissons les nombres naturels $p_1, p_2, \cdots, p_{m-r}$ tels que p_j soit le plus moindre entier de p satifaisant à l'inégalité $\pi\cdot\sum_{p+1}^{m} n_k < \sum_{k=p+1}^{m} n_k \arg(\alpha'_j - a_k)$, alors on a aisément $1\leqq p_1\leqq p_2\leqq\cdots\leqq p_{m-r}\leqq r$ et

$$(6.15)\qquad \begin{cases} \gamma'_j\sim\gamma_j \quad (1\leqq j\leqq r-1) \quad \text{et} \\ \gamma'_j\sim(e^{-2\pi\sqrt{-1}\lambda_{q_j}}-1)\gamma_{q_j-1}+\cdots+(e^{-2\pi\sqrt{-1}(\lambda_{q_j}+\cdots+\lambda_{p_j+j})}-1)\gamma_{p_j}\,, \quad (r\leqslant j\leqslant m-1) \end{cases}$$

dans $H_1(M, \mathcal{S}_{-\lambda})$. Cette relation n'est autre chose que la matrice de connexion entre les directions asymptotiques ci-dessus correspondant aux fonctions $\hat{\varphi}(\lambda)$. Voir la figure 6.4.

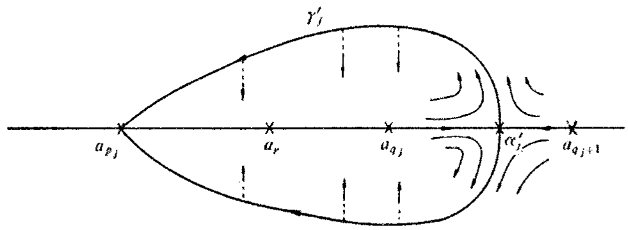


Fig. 6.4

Bibliographies

[1] Aomoto, K., Un théorème du type de Matsushima-Murakami concernant l'intégrale des fonctions multiformes, J. Math. Pures Appl., **52** (1973), 1-11.
[2] Aomoto, K., Vanishing of cohomology attached to certain many valued meromorphic functions, J. Math. Soc. Japan., 27, (1975), 248-255.
[3] Aomoto, K., Les formules de récurrence de l'intégrale de fonctions multiformes et une généralisation de fraction continue, Kokyuroku à R.I.M.S. No. 168, 1972, pp. 93-103 (en japonais).
[4] Bernstein, I. H., La continuation analytique de fonctions généralisées par paramètres, Analyse Fonct. 6, No. 4, 1972, 26-40.
[5] Birkhoff, G. D., General theory of linear difference equations, Collected Mathematical Papers, **1**, 1950, 476-517.
[6] Brieskorn, E., Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Manuscripta Math., **2** (1970), 103-161.
[7] Deligne, P., Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math., No. 163, Springer, 1970.
[8] Deligne, P., Théorie de Hodge, II, Publ. Math., No. 40, 1971, pp. 5-57.
[9] Gröbner, W., Moderne Algebrische Geometrie, Springer, 1949.
[10] Hattori, A., Topology of C^n minus a finite number of affine hyperplanes in general position, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 22 (1975), 205-219.
[11] Kawai, T., Finite-dimensionality of cohomology groups attached to systems of linear differential equations, V, Proc. Japan Acad., **49** (1973), 782-784.
[12] Okubo, K., Sur le problème de connexion, Kokyuroku à R.I.M.S., No. 63, 1969, pp. 15-33 (japonais).
[13] Pham, F., Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau, Gauthiers Villars 1967.
[14] Sasakura, T., Differential forms on complex varieties, à paraitre.
[15] Saito, K., Regularity of Gauss-Manin connection of a flat family of isolated singularities. Quelques journées singulières, Ecole polytechnique, Paris, 1973.
[16] Sato, M., Theory of prehomogeneous vector spaces (rédigé par T. Shintani en japonais), Sugaku no Ayumi, **15** (1970), 85-157.
[17] Sato, M., Singular orbits in prehomogeneous vector spaces (rédigé par K. Aomoto en japonais), Univ. of Tokyo.
[18] Serre, J. P., Algèbre locale, Multiplicités, Lecture Notes in Math., **11**, 1965.

(Reçu le 4 juin 1974)

Département de Mathématiques
Collège de Education Générale
Université de Tokyo
Komaba, Tokyo
153 Japon