Sur la caractérisation des semi-groupes distributions

Par Jean-Pol GUILLEMENT et PHAM THE LAI

(Présenté par D. Fujiwara)

§ 1. Introduction

Les semi-groupes distributions (en bref S.G.D.), définis sur un espace de Banach, sont introduits par J. L. Lions dans [7].

C'est J. Chazarain [1] qui a obtenu un critère de nature spectrale pour qu'un opérateur fermé, d'un espace de Banach E dans lui-même, soit générateur infinitésimal d'un S.G.D. Un tel opérateur n'engendre pas, en général, un semi-groupe d'opérateurs continus sur E.

On va voir (cf. aussi: T. Ushijima [11]) que A restreint a un e.v.t.l.c. F convenable, sous espace dense de E, engendre un semi-groupe d'opérateurs continus sur F; nous montrons que cette propriété est caractéristique des générateurs de S.G.D. (Pour d'autres caractérisations cf. S. Oharu [9]).

Appliquant ce résultat à la classe des S.G.D. à croissance exponentielle, nous précisons une caractérisation analogue de D. Fujiwara [3].

Ensuite, nous indiquons les caractérisations correspondantes pour les groupes distributions.

Enfin, nous donnons une caractérisation des s.g. distributions holomorphes définis comme dans [1].

Nous remercions le referee qui nous a fait d'utiles suggestions pour la révision de cet article.

§ 2. Définitions, Notations, Rappels

Pour les distributions, nous suivons les notations de [10]. $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}_{-}$, resp. $\mathcal{E}$) est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\boldsymbol{R}$ à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, dont le support est compact (resp. limité à droite, resp. quelconque). $\mathcal{S}$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide. Ces espaces sont munis des topologies de Schwartz.

Les espaces de distributions associées sont $\mathcal{D}'$ (reps. $\mathcal{D}'_{+}$, resp. $\mathcal{E}'$, resp. $\mathcal{S}'$). $\mathcal{D}_0$ désigne le sous-espace de $\mathcal{D}$ dont les fonctions sont à support dans $[0,+\infty[$.

Nous utiliserons les distributions à valeurs dans un espace de Banach X. Ce sont les espaces

$$\mathcal{D}'(X)=\mathcal{L}_b(\mathcal{D}, X)$$
$$\mathcal{D}'_+(X)=\mathcal{L}_b(\mathcal{D}_-, X)$$
$$\mathcal{E}'(X)=\mathcal{L}_b(\mathcal{E}, X)$$
$$\mathcal{S}'(X)=\mathcal{L}_b(\mathcal{S}, X)$$

munis de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés. Rappelons que $\mathcal{D}'_+(X)$ coincide avec le sous-espace de $\mathcal{D}'(X)$ formé des distributions à support limité à gauche. $\mathcal{S}'(X)$ est appelé espace des *distributions tempérées* à valeurs dans X.

Rappelons aussi que, si $T\in\mathcal{D}'$ et si $x\in X$, on note $T\otimes x$ la distribution de $\mathcal{D}'(X)$ définie par

$$\langle T\otimes x, \varphi\rangle=\langle T, \varphi\rangle x \qquad \varphi\in\mathcal{D}.$$

L'inégalité

$$\operatorname{supp} T\geq \operatorname{supp} S$$

signifie que si la distribution S est nulle sur un intervalle $]-\infty, a[$, T l'est aussi.

Dans la suite E désigne un espace de Banach, $|\cdot|_E$ sa norme, $\mathcal{L}(E, E)$ l'espace de Banach des opérateurs continus de E dans E.

Si A est un opérateur de E dans E, on désigne par

— D_A son domaine de définition

— $\rho(A)$ sont résolvant (ensemble des complexes λ tels que $(\lambda-A)^{-1}$ existe en tant qu'élément de $\mathcal{L}(E, E)$)

— $R(\lambda, A)=(\lambda-A)^{-1}$ sa résolvante.

Dans [7] J. L. Lions a introduit la

DÉFINITION 2.1. Un *semi-groupe distribution* $\mathcal{G}$ (en bref S.G.D.) est une distribution à valeurs dans $\mathcal{L}(E, E)$ vérifiant les propriétés:

(i) le support de $\mathcal{G}$ est dans $[0, +\infty[$

(ii) $\mathcal{G}(\varphi*\psi)=\mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi) \qquad \varphi\in\mathcal{D}_0, \psi\in\mathcal{D}_0$

(iii) si $\varphi\in\mathcal{D}_0$, si $x\in E$, si $y=\mathcal{G}(\varphi)x$, alors la distribution

$$\varphi\longleftarrow\mathcal{G}(\varphi)y$$

est presque partout égale à une fonction u, à valeurs dans E, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$, telle que $u(0)=y$

(iv) l'ensemble

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{G}=\{\sum_{i=1}^{m}\mathcal{G}(\varphi_i)x_i,\ \varphi_i\in\mathcal{D}_0,\ x_i\in E\}$$

est dense dans E

(v) l'ensemble

$$N=\{x\in E;\ \mathcal{G}(\varphi)x=0\qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}_0\}$$

est réduit à $\{0\}$.

A tout S.G.D. $\mathcal{G}$ on associe l'opérateur A qui est la fermeture de l'opérateur $\mathcal{G}(-\delta')$, lui-même défini sur $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}$ par

$$\mathcal{G}(-\delta')[\mathcal{G}(\varphi)x]=\mathcal{G}(-\varphi')x\,.$$

A est appelé le *générateur infinitésimal* du S.G.D. $\mathcal{G}$.

DÉEFINITION 2.2. Un S.G.D. $\mathcal{G}$ est dit à croissance exponentielle (en bref S.G.D.E.) s'il existe un réel ζ_0 tel que

$$e^{-\zeta t}\mathcal{G}\in\mathcal{S}'[\mathcal{L}(E,E)]\qquad \zeta>\zeta_0\,.$$

DÉFINITION 2.3. Soit A un opérateur fermé de E dans E dont le domaine D_A est dense. D_A est muni de la norme du graphe.

On dit que *le problème de Cauchy est bien posé* pour $d/dt-A$, sous-entendu au sens des distributions, si

pour f donné dans $\mathcal{D}'_+(E)$, il existe une et une seule distribution u de $\mathcal{D}'_+(D_A)$ telle que

(i) $u'-Au=f$

(ii) $\mathrm{supp}\,u\geq\mathrm{supp}\,f$

et si l'application $f\to u$ est continue de $\mathcal{D}'_+(E)$ dans $\mathcal{D}'_+(D_A)$.

Le rapport entre les définitions précédentes est fourni par le

THÉORÈME 2.4 - [7]. *Un opérateur fermé A, de domaine dense dans E, est générateur infinitésimal d'un S.G.D., si et seulement si le problème de Cauchy est bien posé pour $d/dt-A$.*

En plus, A est générateur infinitésimal d'un S.G.D. unique.

THÉORÈME 2.4 bis - [1]. *Un opérateur fermé A, de domaine D_A, dense dans E, est générateur infinitésimal d'un S.G.D., si et seulement si, il existe une distribution $\mathcal{G}$ de $\mathcal{D}'_+[\mathcal{L}(E,D_A)]$ dont le support est dans $[0,\infty[$ telle que*

$$\text{(i)}\qquad \left(\frac{d}{dt}-A\right)*\mathcal{G}=\delta\otimes I_E$$

$$\text{(ii)}\qquad \mathcal{G}*\left(\frac{d}{dt}-A\right)=\delta\otimes I_{D_A}\,.$$

$\mathcal{G}$ est précisément le semi-groupe de générateur A.

Avant d'énoncer la caractérisation spectrale des générateurs de S.G.D. établie par J. Chazarain, donnons la

DÉFINITION 2.5. Une partie Λ de $\boldsymbol{C}$ est dite *région logarithmique* si elle est de la forme

$$\Lambda=\{\lambda, \operatorname{Re} \lambda \geq a \log (1+|\lambda|)+b\}$$

où a et b sont des constantes positives.

THÉORÈME 2.6 - [1]. *Un opérateur fermé A, de domaine D_A dense dans E, est générateur infinitésimal d'un S.G.D. si et seulement si, il existe une constante C, un entier N, et une région logarithmique Λ, où la résolvante $R(\lambda, A)$ existe et vérifie*

$$\|R(\lambda, A)\|_{E\to E} \leq C(1+|\lambda|)^N .$$

Le résultat suivant donne la caractérisation des générateurs de S.G.D.E.

THÉORÈME 2.7 - [7]. *Un opérateur fermé A, de domaine D_A dense dans E, est générateur infinitesimal d'un S.G.D.E. si et seulement si, il existe une constante C, un entier N, et un réel η_0, tels que la résolvante $R(\lambda, A)$ existe dans le demi-plan $\{\lambda, \operatorname{Re} \lambda > \eta_0\}$ et satisfait*

$$\|R(\lambda, A)\|_{E\to E} \leq C(1+|\lambda|)^N$$

Nous utiliserons les définitions suivantes:

DÉFINITION 2.8. Soit F un e. v. t. l. c. Une application T de $[0, +\infty[$ dans $\mathcal{L}(F, F)$ est appelée un *semi- groupe d'opérateurs sur F*, si

(i) $T(t+s)=T(t)T(s)$, $s, t \in [0, +\infty[$; $T(0)=I$

(ii) T est continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathcal{L}_s(F, F)$, $\mathcal{L}_s(F, F)$ étant muni de la topologie de la convergence simple.

DÉFINITION 2.9 (Yosida [12]). T, un semi-groupe d'opérateurs sur un e.v.t.l.c. F, est dit *équicontinu* si la famille d'opérateurs $\{T(t), t \in [0, \infty[\}$ est équicontinue (pour toute semi-norme continue p, il existe une semi-norme continue q telle que

$$p[T(t)x] \leq q(x) , \qquad t \in [0, \infty[, \ x \in F) .$$

DÉFINITION 2.10 (T. Komura [6]). T, un semi-groupe d'opérateurs sur un e.v.t.l.c. F, est dit *localement équicontinu* si, pour tout $\tau>0$, la famille $\{T(t), t \in [0, \tau]\}$ est équicontinue.

Dans [6], T. Komura a prouvé la

PROPOSITION 2.11. *Si F est un e.v.t.l.c. tonnelé, tout semi-groupe d'opérateurs est localement équicontinu.*

Enfin, si A est un opérateur de E dans E, on désigne par

D_A son domaine

D_{A^n} le domaine de A^n, $n \in N$

D_{A^∞} l'intersection des D_{A^n}.

On munit D_A de la norme du graphe

$$|x|_{D_A} = |x|_E + |Ax|_E ,$$

et D_{A^∞}, de la suite croissante de normes

$$|x|_n = \sum_{k=0}^{n} |A^k x|_E$$

si A est fermé, D_A est un espace de Banach et D_{A^∞} un espace de Fréchet.

§ 3. Caractérisation des générateurs de semi-groupes distributions

Le résultat suivant (cf. T. Ushijima [11]), montre que le générateur d'un S.G.D. engendre sur un sous-espace de E, un semi-groupe au sens de la définition 2.8.

THÉORÈME 3.1. *Si A, opérateur fermé de E dans E, est générateur infinitésimal d'un S.G.D., alors*

(i) *D_{A^∞} est dense dans E*

(ii) *il existe T, un semi-groupe localement équicontinu d'opérateurs sur D_{A^∞}, tel que la fonction $t \to T(t)$ est indéfiniment différentiable de $[0, \infty[$ dans $\mathcal{L}_s(D_{A^\infty}, D_{A^\infty})$, et vérifie*

$$\frac{d}{dt} T(t) = AT(t) = T(t)A .$$

PREUVE: (i) soit $\mathcal{G}$ le S.G.D. dont A est le générateur. De par la définition de A, il est clair que

$$\operatorname{Im} \mathcal{G} = \{\sum_{i=1}^{m} \mathcal{G}(\varphi_i) x_i,\ \varphi_i \in \mathcal{D}_0,\ x_i \in E\}$$

est inclus dans D_{A^∞}. Par suite D_{A^∞} est dense dans E.

(ii) Pour $t \geq 0$, pour x dans D_{A^∞}, en vertu du théorème 2.6, l'expression

$$T(t)x = \sum_{k=1}^{p} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} x + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} \lambda^{-p} R(\lambda, A) A^p x d\lambda \tag{3.1}$$

a un sens dans D_{A^∞} si p est assez grand; Γ étant le bord de la région logarithmique du théorème 2.6.

On montre que (3.1) est indépendant de p et que la famille des opérateurs $T(t)$ ainsi définie vérifie (ii).

Le théorème 3.1 admet une réciproque, c'est le

THÉORÈME 3.2. *Soit A un opérateur fermé de E dans E dont le résolvant contient un point ρ. Supposons qu'il existe F, un sous-espace fermé de D_{A^∞}, tel que*

(i) *$(\rho-A)^p F$ est dense dans E pour tout entier p*

(ii) *Il existe T, un semi-groupe d'opérateurs sur F (muni de la topologie induite par D_{A^∞}) tel que la fonction $t \to T(t)$ est indéfiniment différentiable de $[0, +\infty[$ dans $\mathcal{L}_s(F, F)$, et vérifie*

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$$

alors il existe un S.G.D. unique dont A est le générateur infinitésimal.

PREUVE: Par hypothèse il existe $\rho \in C$ tel que $B = -\rho + A$ soit inversible. En considérant le semi-groupe sur F, $e^{-\rho t}T(t)$, on voit que tout revient à prouver le théorème pour B. On peut donc supposer que A est inversible et que les espaces $A^p F$ sont denses dans E. On utilisera le théorème 2.4 bis.

Soient φ dans $\mathcal{D}$, x dans F. Posons

$$\mathcal{G}(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(t)T(t)x\,dt \tag{3.2}$$

l'intégrale, prise dans F, a un sens car $t \to T(t)x$ est continue de $[0, +\infty[$ dans F.

L'application $\mathcal{G}(\varphi)$ ainsi définie est linéaire de F dans F. Prouvons quelle est continue de F, muni de la norme de E, dans F, muni de la norme de D_A.

Soit $\tau > 0$ tel que

$$\operatorname{supp} \varphi \subset]-\infty, \tau[\,.$$

F étant tonnelé, on sait, grâce à la proposition 2.11, que T est un semi-groupe localement équicontinu. Par conséquent, il existe p, un entier positif tel que

$$|T(t)x|_E \leq C|x|_p \qquad x \in F, \quad t \in [0, \tau] \,. \tag{3.3}$$

Il est aisé de voir, en utilisant la propriété de semi-groupe, que A envoie F dans F et commute avec $T(t)$ sur F. Nous obtenons alors

$$\frac{d}{dt}T(t)A^{-1}x = T(t)x \qquad x \in AF \,.$$

Avec cette égalitè, grâce à des intégrations par parties successives, $\mathcal{G}(\varphi)x$

s'écrit, pour $x\in A^pF$:

(3.4) $$\mathcal{G}(\varphi)x=-\varphi(0)A^{-1}x+\cdots+(-1)^p\varphi^{(p-1)}(0)A^{-p}x$$
$$+(-1)^p\int_0^c \varphi^{(p)}(t)T(t)A^{-p}xdt\,.$$

Comme A^{-1} est continu de E dans D_A, (3.3) et (3.4) donnent

$$|\mathcal{G}(\varphi)x|_{D_A}\leq C\left[|\varphi(0)|+\cdots+|\varphi^{(p-1)}(0)|+\int_0^c|\varphi^{(p)}(t)|dt\right]|x|_E \qquad x\in A^pF\,.$$

A^pF étant dense dans E, cette inégalité montre que $\mathcal{G}(\varphi)$ se prolonge d'une manière unique à E tout entier, en un opérateur continu de E dans D_A, encore noté $\mathcal{G}(\varphi)$, dont la norme vérifie

$$\|\mathcal{G}(\varphi)\|_{E\to D_A}\leq C\left[|\varphi(0)|+\cdots+|\varphi^{(p-1)}(0)|+\int_0^c|\varphi^{(p)}(t)|dt\right].$$

L'application linéaire $\mathcal{G}$ anisi définie de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E,D_A)$, est donc une distribution de $\mathcal{D}'_+[\mathcal{L}(E,D_A)]$, dont le support, en raison de la construction (3.2), est dans $[0,+\infty[$.

Vérifions que l'on a

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)*\mathcal{G}=\delta\otimes I_E$$

c'est-à-dire

(3.5) $$A\mathcal{G}(\varphi)x+\mathcal{G}(\varphi')x=-\varphi(0)x\,,\qquad \varphi\in\mathcal{D},\quad x\in E\,.$$

Comme F est dense dans E, et comme A est continu de D_A dans E, il suffit de prouver (3.5) pour x dans F.

Soit $x\in F$, d'après (3.2) nous avons

$$\mathcal{G}(\varphi')x=-\varphi(0)x-\int_0^\infty\varphi(t)AT(t)xdt$$

Nous obtenons ainsi (3.5) en raison du fait que A est continu de D_{A^∞} dans D_{A^∞}.

A commute avec $T(t)$ sur F, A commute donc avec $\mathcal{G}(\varphi)$ sur F, et par densité, A commute avec $\mathcal{G}(\varphi)$ sur D_A. Nous avons donc aussi

$$\mathcal{G}(\varphi)A\mathrm{x}+\mathcal{G}(\varphi')x=-\varphi(0)x\qquad \varphi\in\mathcal{D},\quad x\in D_A\,,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{G}*\left(\frac{d}{dt}-A\right)=\delta\otimes I_{D_A}\,.$$

La conclusion vient du théorème 2.4 bis, l'unicité étant due au théorème 2.4.

REMARQUE 3.3. Dans les conditions des théorèmes 3.1 et 3.2, l'ensemble Im $\mathcal{G}$ est, comme nous l'avons vu, inclus dans D_{A^∞}. Montrons qu'il est dense dans D_{A^∞}.

Soit x dans D_{A^∞}, et soit (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}_0$ satisfaisant

$\circ$ $\varphi_m(t) \geq 0$

$\circ$ $\operatorname{supp} \varphi_m \subset [\alpha_m, \beta_m]$, avec $0 < \alpha_m < \beta_m$ et $\lim \beta_m = 0$

$\circ$ $\int_{\alpha_m}^{\beta_m} \varphi_m(t) dt = 1$.

Notons $x_m = \mathcal{G}(\varphi_m)x$. D'après (3.2), comme $x \in D_{A^\infty}$, nous avons

$$x_m = \int_0^\infty \varphi_m(t) T(t) x dt .$$

Par suite, pour tout entier q

$$A^q x_m - A^q x = \int_0^\infty \varphi_m(t) [T(t) A^q x - A^q x] dt .$$

D'où

$$|A^q x_m - A^q x|_E \leq \sup_{t \in [0, \beta_m]} |T(t) A^q x - A^q x|_E .$$

Comme $T(t)x$ converge vers x dans D_{A^∞} quand t tend vers 0, cette majoration prouve que x est limite dans D_{A^∞}, de la suite (x_m).

REMARQUE 3.4. Dans les conditions du théorème 3.2, F coïncide nécessairement avec D_{A^∞}:

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel engendré par $\{\mathcal{G}(\varphi)x;\ \varphi \in \mathcal{D}_0,\ x \in F\}$. $\mathcal{F}$ est dense dans Im $\mathcal{G}$ pour la topologie de D_{A^∞} car, si $\mathcal{G}(\varphi)x$ est un point de Im $\mathcal{G}$, si (x_j) est une suite d'éléments de F qui converge vers x dans E, l'égalité

$$A^n \mathcal{G}(\varphi) x_j = (-1)^n \mathcal{G}[\varphi^{(n)}] x_j \qquad \varphi \in \mathcal{D}_0, \quad n = 1, \dots$$

permet de conclure que la suite $\mathcal{G}(\varphi)x_j$ converge vers $\mathcal{G}(\varphi)x$ dans D_{A^∞}.

Comme Im $\mathcal{G}$ est dense dans D_{A^∞}, il en résulte que $\mathcal{F}$ est dense dans D_{A^∞}. F, qui contient $\mathcal{F}$, est donc dense dans D_{A^∞}, d'où le résultat.

Le théorème 3.1 permet d'énoncer le

COROLLAIRE 3.5. *Soit A un opérateur fermé de E dans E, générateur d'un S.G.D. On se donne $x_0 \in D_{A^\infty}$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de $[0, +\infty[$ dans D_{A^∞}. On note $\tilde{g}$ la fonction obtenue en prolongeant g par 0 sur $]-\infty, 0[$.*

Alors la solution unique, u, du problème de Cauchy au sens des distributions

$$-Au + u' = \tilde{g} + \delta \otimes x_0$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ de $[0, \infty[$ dans D_{A^∞}, vérifiant au sens classique

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)u(t)=g(t) \qquad t\geq 0 \tag{3.6}$$
$$u(0)=x_0\,.$$

Cette solution est donnée explicitement par

$$u(t)=T(t)x_0+\int_0^t T(t-s)g(s)ds \qquad t\geq 0$$

où T est le semi-groupe d'opérateurs sur D_{A^∞} du théorème 3.1.

PREUVE: On montre que la fonction

$$s\longrightarrow h(s)=T(t-s)g(s)$$

est continue de $[0,t]$ dans D_{A^∞} et que la fonction

$$t\longrightarrow \int_0^t h(s)ds$$

est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. On vérifie enfin que la fonction

$$t\longrightarrow T(t)x_0+\int_0^t h(s)ds$$

prolongée par 0 sur $]-\infty,0[$, est solution de (3.6).

REMARQUE. Lorsque g est nulle, le corollaire montre que la distribution, solution du problème de Cauchy

$$-Au+u'=\delta\otimes x_0$$

avec x_0 dans D_{A^∞}, est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,+\infty[$ dans D_{A^∞}.

Dans le cas où A est déjà lui-même générateur d'un semi-groupe d'opérateurs continus sur E, un tel résultat est établi par J. L. Lions - E. Magenes dans [8] (ces auteurs donnent aussi des résultats de régularité de Gevrey lorsque x_0 appartient à un espace de Gevrey). Notre résultant généralise donc celui de J. L. Lions-E. Magenes dans le cas où A est générateur d'un S.G.D.

REMARQUE 3.6. A l'aide des remarques précédentes, nous pouvons préciser un résultat de D. Fujiwara [3]:

Si A, opérateur fermé de E dans E, est générateur infinitésimal d'un S.G.D.E., alors

(i) *D_{A^∞} est dense dans E*

(ii) *il existe T, un semi-groupe d'opérateurs sur D_{A^∞}, tel que la fonction $t\rightarrow T(t)$ est indéfiniment différentiable de $[0,+\infty[$ dans $\mathcal{L}_s(D_{A^\infty}, D_{A^\infty})$, et vérifie*

$$\frac{d}{dt}T(t)=AT(t)=T(t)A$$

(iii) *il existe* $\zeta_0>0$ *tel que, pour tout* $\zeta>\zeta_0$, *l'application*

$$t \longrightarrow e^{-\zeta t}T(t)$$

est un semi-groupe équicontinu d'opérateurs sur D_{A^∞}.

Le semi-groupe $T(t)$ s'exprime à l'aide de la formule (3.1). A cause du théorème (2.7) on peut en fait écrire

$$T(t)x=\sum_{k=1}^{p}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}x+\frac{1}{2\pi i}\int_{D_\zeta}e^{\lambda t}\lambda^{-p}R(\lambda, A)A^p x d\lambda\,, \qquad x\in D_{A^\infty} \tag{3.7}$$

où p est un entier assez grand et D_ζ la droite d'équation

$$\operatorname{Re}\lambda=\zeta$$

avec ζ assez grand.

Pour $t\geq 0$, on peut remarquer que l'opérateur $T(t)$ se prolonge en un opérateur continu de $D_{A^{N+2}}$ dans D_A. (N étant l'entier du théorème (2.7)). En effet l'intégrale du second membre de (3.7) converge dans D_A si p est $N+2$.

Enfin, si x est dans $D_{A^{N+3}}$, si p est $N+3$, la règle de dérivation sous le signe somme étant applicable, la fonction

$$t \longrightarrow T(t)x$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, +\infty[$ dans E.

COROLLAIRE 3.7. *On voit, d'après la remarque* 3.6, *que si A est générateur d'un S.G.D.E., la solution u du problème de Cauchy du corollaire* 3.5 *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $[0, +\infty[$ *dans E si x_0 est dans $D_{A^{N+3}}$ et si g est une fonction continue de* $[0, +\infty[$ *dans $D_{A^{N+3}}$ telle que Ag soit continue de* $[0, +\infty[$ *dans* $D_{A^{N+2}}$.

§ 4. Caractérisation des groupes distributions

Suivant J. L. Lions [7] un *groupe distribution* sur un espace de Banach E, est une distribution à valeurs dans $\mathcal{L}(E, E)$ telle que

(i) $\mathcal{G}(\varphi*\psi)=\mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi) \qquad \varphi\in\mathcal{D},\quad \psi\in\mathcal{D}$

(ii) $\mathcal{G}=\mathcal{G}_+ + \mathcal{G}_-$ où $\mathcal{G}_+$ et $\mathcal{G}_-$ sont des S.G.D.

On rappelle que d'après [7], un opérateur fermé A de E dans E, est générateur infinitesimal d'un groupe distribution si et seulement si A et $-A$ sont générateurs de semi-groupes distributions.

Enfin un *groupe d'opérateurs* sur un e.v.t.l.c. F est une application continue de $]-\infty, +\infty[$ dans $\mathcal{L}_s(F, F)$ vérifiant

$$T(t+s)=T(t)T(s) \qquad t\in\boldsymbol{R},\quad s\in\boldsymbol{R}$$

$$T(0)=I.$$

En application des résultats du §3, nous avons

THÉORÈME 4.1. *Si A, opérateur fermé de E dans E, est générateur d'un G.D., alors*

(i) *D_{A^∞} est dense dans E*

(ii) *il existe T, un groupe d'opérateurs localement équicontinu sur D_{A^∞}, tel que la fonction $t \to T(t)$ est indéfiniment différentiable de $\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{L}_s(F, F)$, et vérifie*

$$\frac{d}{dt} T(t) = A\,T(t) = T(t) A\,.$$

THÉORÈME 4.2. *Soit A un opérateur fermé de E dans E, dont le résolvant contient un point ρ. Supposons qu'il existe F, un sous-espace fermé de D_{A^∞} tel que*

(i) *$(\rho-A)^p F$ est dense dans E pour tout entier p*

(ii) *il existe T, un groupe d'opérateurs sur F (muni de la topologie induite par D_{A^∞}) tel que la fonction $t \to T(t)$ est indéfiniment différentiable de $\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{L}_s(F, F)$, et vérifie*

$$\frac{d}{dt} T(t) = A\,T(t)\,.$$

Alors A est générateur infinitésimal d'un G.D.

§5. Caractérisation des semi-groupes holomorphes

Pour φ dans $\mathcal{D}$ et $s>0$, notons φ_s la fonction

(5.1) $$\varphi_s(t) = \frac{1}{s} \varphi\left(\frac{t}{s}\right).$$

Pour toute distribution $\mathcal{G}$, l'application $\mathcal{G}_s$

(5.2) $$\varphi \longrightarrow \mathcal{G}_s(\varphi) = \mathcal{G}(\varphi_s)$$

est une distribution.

Si $\mathcal{G}$ a son support dans $[0, +\infty[$, il en est de même pour $\mathcal{G}_s$, ceci pour tout $s \in \boldsymbol{R}^+ =]0, +\infty[$.

Pour tout $\alpha < \pi/2$, on note S_α le secteur ouvert

$$S_\alpha = \left\{\lambda \in \boldsymbol{C}, \quad \lambda \neq 0, \quad |\arg \lambda| < \alpha < \frac{\pi}{2}\right\}$$

et $\bar{S}_\alpha$ le secteur fermé (contenant 0).

$$\bar{S}_\alpha=\{\lambda\in \boldsymbol{C}, \quad |\arg \lambda|\leq\alpha\}\,.$$

DÉFINITION 5.1. Un S.G.D. $\mathcal{G}$ est dit *holomorphe* dans un secteur S_α (S.G.D.H.) si, pour tout φ dans $\mathcal{D}$, l'application de $\boldsymbol{R}^+$ dans $\mathcal{L}_b(E, E)$

$$s\longrightarrow \mathcal{G}_s(\varphi)$$

se prolonge en une fonction holomorphe dans S_α.

Le prolongement, quand il existe, est encore noté $\mathcal{G}_s(\varphi)$.

REMARQUE 5.2. La définition 5.1, donnée dans [1], diffère légèrement de celle donnée par G. Da Prato et U. Mosco dans [2].

Rappelons cette dernière: Ces auteurs définissent un S.G.D. comme une distribution de $\mathcal{L}[\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^+), \mathcal{L}(E, E)]$ vérifiant (ii), (iv), (v), de la définition 2.1. Un S.G.D. au sens de J. L. Lions, c'est-à-dire au sens de la définition 2.1, est dit régulier dans [2]; c'est donc un S.G.D. $\mathcal{G}$ au sens de [2], tel que $\mathcal{G}$ est prolongeable à $\mathcal{D}(\boldsymbol{R})$, avec un prolongement vérifiant (i) et (iii) de la définition 2.1.

Enfin, dans [2], un S.G.D. $\mathcal{G}$ est dit holomorphe dans un secteur S_α, si, pour tout φ dans $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^+)$, l'application de $\boldsymbol{R}^+$ dans $\mathcal{L}(E, E)$

$$s\longrightarrow \mathcal{G}_s(\varphi)$$

se prolonge en une fonction holomorphe dans S_α, encore notée $\mathcal{G}_s(\varphi)$.

Avec cette définition, il est prouvé que l'application $\mathcal{G}_s$

$$\varphi\longrightarrow \mathcal{G}_s(\varphi)$$

est un S.G.D. au sens de [2], de générateur infinitesimal sA, A étant le générateur de $\mathcal{G}$. Mais [2] ne dit pas si, $\mathcal{G}$ étant un S.G.D. holomorphe au sens de la définition 5.1 (donc régulier), $\mathcal{G}_s$ est encore un S.G.D. (régulier).

C'est l'object de la

PROPOSITION 5.3. *Soit $\mathcal{G}$ un S.G.D.H. dans un secteur S_α, $0<\alpha<\pi/2$.*

Alors, pour tout s dans S_α, l'application $\mathcal{G}_s$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{L}(E, E)$

$$\varphi\longrightarrow \mathcal{G}_s(\varphi)$$

est un S.G.D. dont le générateur infinitesimal est sA.

PREUVE: Supposons d'abord que $s\in \boldsymbol{R}^+$.

Il est immédiat de voir que l'on a, pour φ dans $\mathcal{D}$

$$\mathcal{G}_s(\varphi')=\frac{1}{s}\mathcal{G}\left[\varphi'\left(\frac{t}{s}\right)\right]. \tag{5.3}$$

En raison du théorème 2.4 bis, nous avons, pour tout ψ dans $\mathcal{D}$

(5.4)
$$A\mathcal{G}(\psi)x+\mathcal{G}(\psi')x=-\psi(0)x \qquad x\in E$$
$$\mathcal{G}(\psi)Ax+\mathcal{G}(\psi')x=-\psi(0)x \qquad x\in D_A\,.$$

En portant dans (5.4) la fonction

$$t\longrightarrow\psi(t)=s\varphi\left(\frac{t}{s}\right),$$

nous obtenons, compte tenu de (5.2) et (5.3)

(5.5)
$$sA\mathcal{G}_s(\varphi)x+\mathcal{G}_s(\varphi')x=-\varphi(0)x \qquad x\in E$$

(5.6)
$$s\mathcal{G}_s(\varphi)Ax+\mathcal{G}_s(\varphi')x=-\varphi(0)x \qquad x\in D_A\,.$$

Comme $\mathcal{G}_s$ est une distribution de $\mathcal{D}'_+[\mathcal{L}(E,D_A)]$ dont le support est dans $[0,+\infty[$, en vertu du théorème 2.4 bis, (5.5) et (5.6) prouvent que $\mathcal{G}_s$ est un S.G.D. dont le générateur est sA.

Avant de passer au cas où s est quelconque dans S_α, remarquons, grâce à l'égalité

(5.7)
$$\frac{d^m}{ds^m}\mathcal{G}_s(\varphi)=D^m\mathcal{G}[(t^m\varphi)_s] \qquad m=0,1\ldots\,;\quad s\in \boldsymbol{R}^+$$

(D^m étant la dérivée d'ordre m de la distribution $\mathcal{G}$)

que pour tout $s\in\boldsymbol{R}^+$, pour tout entier m, l'application

$$\varphi\longrightarrow\frac{d^m}{ds^m}\mathcal{G}_s(\varphi)$$

est une distribution de $\mathcal{D}'_+[\mathcal{L}(E,E)]$ dont le support est dans $[0,+\infty[$.

Remarquons aussi que (5.7) prouve, en raison de (5.4) que pour tout $s\in\boldsymbol{R}^+$, pour tout φ dans $\mathcal{D}$, $(d^m/ds^m)\mathcal{G}_s(\varphi)$ commute avec A sur D_A.

Considérons à présent le cas général, $s\in S_\alpha$. Prouvons que $\mathcal{G}_s$ est une distribution de $\mathcal{D}'_+[\mathcal{L}(E,E)]$.

D'après les résultats généraux sur les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles (cf. [4] par exemple), $\mathcal{G}_s(\varphi)$ s'exprime, pour φ dans $\mathcal{D}$, par la série de Taylor, qui converge dans $\mathcal{L}(E,E)$

(5.8)
$$\mathcal{G}_s(\varphi)=\sum_0^\infty\frac{(s-s_0)^n}{n!}\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{G}s_0(\varphi)$$

s_0 étant un point de $\boldsymbol{R}^+$.

Pour s fixé, l'application

$$\varphi \longrightarrow T_N(\varphi) = \sum_0^N \frac{(s-s_0)^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{G}_{s_0}(\varphi) \qquad N=1, \ldots \tag{5.9}$$

étant une distribution de $\mathcal{D}'_+[\mathcal{L}(E, E)]$ dont le support est dans $[0, +\infty[$, on peut conclure, grâce au théorème de Banach-Steinhaus, que l'application

$$s \longrightarrow \mathcal{G}_s(\varphi)$$

est une distribution de $\mathcal{D}'_+[\mathcal{L}(E, E)]$ dont le support est dans $[0, +\infty[$.

Pour montrer que $\mathcal{G}_s$ est un S.G.D. de générateur sA, nous allons utiliser à nouveau le théorème 2.4 bis. Mais auparavant, prouvons que si s est dans S_α, si φ est dans $\mathcal{D}$ et si x est dans D_A, alors $\mathcal{G}_s(\varphi)x$ est aussi dans D_A et que l'on a

$$A\mathcal{G}_s(\varphi)x = \mathcal{G}_s(\varphi)Ax\,. \tag{5.10}$$

Remarquons que, d'après (5.8), la suite $\{T_N(\varphi)x\}_N$ définie par (5.9), converge dans E vers $\mathcal{G}(\varphi)x$.

Comme A commute avec $T_N(\varphi)$, la suite $\{AT_N(\varphi)x\}_N$ converge aussi dans E vers $\mathcal{G}_s(\varphi)Ax$. A étant fermé, il en résulte que $\mathcal{G}_s(\varphi)x$ est dans D_A et que (5.10) est vraie.

Soit $x \in D_A$. Comme la relation (5.6) est vraie pour $s \in \mathbf{R}^+$, elle l'est encore sur S_α, par prolongement analytique, puisque la fonction

$$s \longrightarrow s\mathcal{G}_s(\varphi)Ax + \mathcal{G}_s(\varphi')x$$

est holomorphe de S_α dans D_A.

Soit $x \in E$. Soit (x_n) une suite de D_A qui converge dans E vers x.

En raison de (5.10) et de ce qui précède, nous avons

$$sA\mathcal{G}_s(\varphi)x_n + \mathcal{G}_s(\varphi')x_n = -\varphi(0)x_n \tag{5.11}$$

pour tous $s \in S_\alpha$, $\varphi \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbf{N}$.

La suite (y_n)

$$y_n = \mathcal{G}_s(\varphi)x_n$$

converge dans E vers $y = \mathcal{G}_s(\varphi)x$.

(5.11) montre que la suite Ay_n converge aussi dans E. Comme A est fermé, nous concluons que y appartient à D_A et que Ay_n converge vers Ay.

Nous obtenons donc (5.5) pour tout $s \in S_\alpha$.

Pour conclure à l'aide du théorème 2.4 bis, remarquons que les relations (5.5) et (5.6) permettent d'affirmer que $\mathcal{G}_s$ est une distributions de $\mathcal{D}'_+[\mathcal{L}(E, D_A)]$.

Compte tenu de la proposition 5.3, en reprenant la preuve donnée par J. Chazarain dans [1], on peut enoncer le

THÉORÈME 5.4. *Si $\mathcal{G}$ est un S.G.D.H. dans un secteur S_α, alors $\mathcal{G}$ est un S.G.D.E.*

Nous utiliserons la

DÉFINITION 5.5. Soit F un e.v.t.l.c. Une application T de $[0, +\infty[$ dans $\mathcal{L}(F, F)$ est appelée un *semi-groupe holomorphe* dans un secteur S_α, d'opérateurs sur F, si

(i) T est un semi-groupe d'opérateurs sur F

(ii) l'application $t \to T(t)$ se prolonge en une application holomorphe de S_α dans $\mathcal{L}_s(F, F)$, notée encore $T(t)$

(iii) pour tout $\varepsilon > 0$, l'application $t \to T(t)$ est continue du secteur fermé $\overline{S_{\alpha-\varepsilon}}$ dans $\mathcal{L}_s(F, F)$.

THÉORÈME 5.6. *Si A, opérateur fermé de E dans E, est générateur d'un S.G.D.H. dans un secteur S_α, alors*

(i) *D_{A^∞} est dense dans E*

(ii) *il existe T, un semi-groupe holomorphe dans S_α, d'opérateurs sur D_{A^∞}, tel que*

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A \qquad t \in S_\alpha \cup \{0\}$$

(iii) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\zeta_\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon > 0$, M_ε entier, tels que*

$$|e^{-\zeta t} T(t)x|_E \leq C_\varepsilon |x|_{M_\varepsilon}$$

pour tous $x \in D_{A^\infty}$, $\zeta \geq \zeta_\varepsilon$, $t \in \overline{S_{\alpha-\varepsilon}}$.

PREUVE: Soit $\mathcal{G}$ le S.G.D.H. dont A est le générateur.

(i) est évident.

(ii) Soit T le semi-groupe d'opérateurs sur D_{A^∞}, mis en évidence par le théorème 3.1. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous allons prolonger T dans le secteur $\overline{S_{\alpha-\varepsilon}}$, et prouver que ce prolongement vérifie,

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A\,.$$

Pour obtenir (ii), il suffira alors de montrer que pour $0 < \varepsilon < \tau$, le prolongement associé à ε, coïncide sur $\overline{S_{\alpha-\tau}}$ avec celui associé à τ.

D'après la proposition 5.3, pour s dans S_α, $\mathcal{G}_s$ est un S.G.D. de générateur sA; en vertu du théorème 2.6, il existe donc une région logarithmique Λ_s où la résolvante $R(\lambda, sA)$ existe et vérifie

$$\|R(\lambda, sA)\| \leq C_s(1+|\lambda|)^{N_s} \qquad \lambda \in \Lambda_s .$$

Grâce à l'égalité

$$R(\lambda, sA) = \frac{1}{s} R\left(\frac{\lambda}{s}, A\right)$$

et en prenant $s = \exp[\pm i(\alpha - \varepsilon/4)]$, on voit facilement que $R(\lambda, A)$ existe dans le secteur

$$\left\{\lambda \in \boldsymbol{C}, \quad |\arg(\lambda - \eta_\varepsilon)| \leq \frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

et vérifie

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C_\varepsilon(1+|\lambda|)^{N_\varepsilon} . \tag{5.12}$$

Soit C_ε le contour de ce secteur, orienté dans le sens des parties imaginaires croissantes. Si $\lambda = x + iy$ est sur C_ε, si $t = p + iq$ est dans $\overline{S_{\alpha-\varepsilon}}$, alors on a

$$|e^{\lambda t}| = \exp\left\{\eta_\varepsilon p - |y| p \left[tg\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \pm \frac{q}{p}\right]\right\} . \tag{5.13}$$

Compte tenu de (5.12), (5.13) prouve que l'expression

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1}(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} e^{\lambda t} \lambda^{-p} R(\lambda, A) A^p x \, d\lambda$$

(avec $p \geq N_\varepsilon + 2$) a un sens dans D_{A^∞} pour tout x dans D_{A^∞} et tout t dans $\overline{S_{\alpha-\varepsilon}}$. En plus, il est facile de vérifier que cette expression coïncide avec $T(t)x$ donné par (3.1) pour $t \geq 0$.

On pose donc, pour $t \in \overline{S_{\alpha-\varepsilon}}$, $x \in D_{A^\infty}$

$$T(t)x = \sum_{k=1}^{p} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} x + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} e^{\lambda t} \lambda^{-p} R(\lambda, A) A^p x \, d\lambda . \tag{5.14}$$

En prenant $p = N_\varepsilon + 3$, on peut dériver sous le signe somme grâce à (5.13) et obtenir que dans le secteur fermé $\overline{S_{\alpha-\varepsilon}}$

$$\frac{d}{dt} T(t) = A T(t) = T(t) A .$$

Une déformation de contour prouve la compatibilité de la formule (5.14) pour $0 < \varepsilon < \tau$. Enfin la majoration (5.13) permet de vérifier que la famille $\{T(t)\}$ vérifie (ii) et (iii).

Réciproquement, nous avons le

THÉORÈME 5.7. *Soit A un opérateur fermé de E dans E dont le résolvant contient un point ρ. Supposons qu'il existe F un sous-espace fermé de D_{A^∞} tel que*
(i) *$(\rho-A)^p F$ est dense dans E pour tout entier p*
(ii) *il existe T, un semi-groupe holomorphe dans S_α, d'opérateurs sur F, vérifiant*

$$\frac{d}{dt}T(t)=AT(t) \qquad t\in S_\alpha\cup\{0\}$$

Alors A est générateur infinitésimal d'un S.G.D.H.

PREUVE: On se ramène, comme pour la preuve du théorème 3.2, au cas où A est inversible et où les espaces A^pF sont denses dans E. Il découle de ce même théorème qu'il existe un S.G.D. $\mathcal{G}$ unique, dont le générateur est A.

Nous avons donc à montrer, que pour tout φ dans $\mathcal{D}$, l'application

$$s\longrightarrow\mathcal{G}_s(\varphi) \qquad s\in \boldsymbol{R}^+$$

se prolonge en une fonction holomorphe de S_α dans $\mathcal{L}_b(E,E)$.

Pour s dans S_α, φ dans $\mathcal{D}$, x dans F, l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(t)T(ts)x\,dt$$

a un sens dans F, car l'application $t\to T(ts)x$ est continue de $[0,+\infty[$ dans F.

Cette intégrale coïncide avec $\mathcal{G}_s(\varphi)x$ pour $s\in\boldsymbol{R}^+$.

Notons donc:

$$\mathcal{G}_s(\varphi)x=\int_0^\infty\varphi(t)T(ts)x\,dt \qquad s\in S_\alpha,\quad \varphi\in\mathcal{D},\quad x\in F. \tag{5.15}$$

F étant tonnelé, T étant continue de $\overline{S_{\alpha-\varepsilon}}$ dans $\mathcal{L}_s(F,F)$ pour tout $\varepsilon>0$, on démontrerait comme à la proposition 2.11, que T est un semi-groupe localement équicontinu, c'est-à-dire, que nous avons

(iii) pour tout $\tau>0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier p, une constante C, tels que

$$|T(t)x|_E\le C|x|_p \qquad x\in F,\quad t\in\overline{S_{\alpha-\varepsilon}},\quad |t|\le\tau.$$

s et φ étant fixés, soit τ tel que

$$\operatorname{supp}\varphi\subset]-\infty,\tau[.$$

En vertu de la propriété (iii), il existe un entier p, une constante C, ne dépendant que de s et de τ, tels que

$$|T(ts)A^{-p}x|_E\le C|x|_E \qquad t\in[0,\tau],\quad x\in A^pF. \tag{5.16}$$

En remarquant que l'on a, pour x dans A^pF,

$$\frac{d}{dt}[T(ts)s^{-1}A^{-1}x]=T(ts)x$$

on peut écrire, grâce à des intégrations successives dans (5.15)

$$\mathcal{G}_s(\varphi)x=-\varphi(0)s^{-1}A^{-1}x+\cdots+(-1)^p\varphi^{(p-1)}(0)s^{-p}A^{-p}x \\ +(-1)^p s^{-p}\int_0^\tau \varphi^{(p)}(t)\,T(ts)A^{-p}x\,dt \tag{5.17}$$

ce qui donne

$$|\mathcal{G}_s(\varphi)x|_{D_A}\leq C\left[|\varphi(0)s^{-1}|+\cdots+|\varphi^{(p-1)}(0)s^{-p}|+|s|^{-p}\int_0^\tau |\varphi^{(p)}(t)|dt\right]|x|_E\,. \tag{5.18}$$

A^pF étant dense, $\mathcal{G}_s(\varphi)$ est donc prolongeable à E tout entier en une application de $\mathcal{L}(E, D_A)$, notée encore $\mathcal{G}_s(\varphi)$.

Pour $s\in \boldsymbol{R}^+$, ce prolongement coïncide avec l'application $\mathcal{G}_s(\varphi)$ de la définition (5.2).

Pour prouver que la fonction $s\to\mathcal{G}_s(\varphi)$ est holomorphe de S_α dans $\mathcal{L}(E, E)$, il suffit, en raison d'un résultat de E. Hille [5], de montrer que pour tout x dans E, la fonction $s\to\mathcal{G}_s(\varphi)x$ est holomorphe de S_α dans E.

Pour x dans F, cette propriété vient de la formule (5.15), compte tenu de l'hypothèse (ii) et de la propriété (iii).

Soit x dans E et soit (x_n) une suite de F convergeant vers x dans E. Soit K un compact de S_α.

Grâce à (5.17) et à (5.16) (la constante étant indépendante de s dans K), on a

$$|\mathcal{G}_s(\varphi)x_n-\mathcal{G}_s(\varphi)x_m|_E\leq C\,|x_n-x_m|_E \qquad s\in K \tag{5.19}$$

où C est une constante indépendente de s.

(5.19) donne

$$|\mathcal{G}_s(\varphi)x_n-\mathcal{G}_s(\varphi)x|_E\leq C|x_n-x|_E \qquad s\in K\,.$$

Il en résulte que la suite de fonctions holomorphes $s\to\mathcal{G}_s(\varphi)x_n$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction $s\to\mathcal{G}_s(\varphi)x$ ce qui achève la preuve du théorème.

Il ressort de la preuve du théorème 5.6 que nous pouvons énoncer la

REMARQUE 5.8. Un opérateur fermé A, de domaine dense dans E, est générateur infinitésimal d'un S.G.D.H. dans un secteur S_α si et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$, $c>0$, N entier tels que $R(\lambda, A)$ existe dans le secteur

$$\left\{\lambda,\ \arg(\lambda-\eta)\leq\frac{\pi}{2}+\alpha-\varepsilon\right\}$$

et vérifie $\|R(\lambda, A)\| \leq c(1+|\lambda|)^N$.

Cette remarque prouve que les notions de semi-groupes distributions holomorphes de [1] de [2] et de [3] sont toutes équivalentes.

REMARQUE 5.9. Soit $\varepsilon>0$.

Si x est dans D_{A^∞}, si t est dans le secteur ouvert (ne contenant pas 0) $S_{\alpha-\varepsilon}$, il est facile de voir grâce à (5.13) que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} e^{\lambda t} R(\lambda, A) x d\lambda$$

converge dans D_{A^∞} et représente $T(t)x$. On a donc

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} e^{\lambda t} R(\lambda, A) x d\lambda . \tag{5.20}$$

D'autre part, on peut vérifier que pour x dans E, cette intégrale a un sens dans D_A et que l'opérateur $T(t)$ ainsi défini est continu de E dans D_A. On vérifie aussi la compatibilité de la formule (5.20) pour $0<\varepsilon<\tau$. Enfin, à cause de (5.13), pour x dans E, la fonction $t \to T(t)x$ est holomorphe de S_α dans D_A.

Nous avons donc prolongé l'application T

$$t \in [0, +\infty[\longrightarrow T(t) \in \mathcal{L}(D_{A^\infty}, D_{A^\infty})$$

en une application holomorphe

$$t \in S_\alpha \longrightarrow T(t) \in \mathcal{L}(E, D_A) .$$

Ainsi au cas où $\mathcal{G}$ est un S.G.D.H., la formule (3.2) prolongée pour x dans E, prouve donc que $\mathcal{G}$ est égale sur $]0, +\infty[$ à une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(E, D_A)$, prolongeable en une fonction holomorphe dans S_α.

Cette fonction est en général singulière à l'origine; cependant, à l'aide du changement de variable $\lambda t=\mu$ d'une déformation de contour dans (5.20) et en tenant compte de (5.12), nous pouvons prouver que pour tout $\varepsilon>0$, il existe C et M entier tels que

$$\|T(t)\|_{E\to E} \leq C|t|^{-M}$$

$$\|T(t)\|_{E\to D_A} \leq C|t|^{-M-1} \qquad t \in S_{\alpha-\varepsilon}, \quad |t| \leq 1 .$$

Dans le cas d'un S.G.D.H., nous pouvons améliorer le résultat du corollaire 3.7 pour $g=0$.

COROLLAIRE 5.10. *Soit A un opérateur fermé de E dans E, générateur d'un S.G.D.H. dans un secteur S_α.*

Alors il existe un entier $m \geq 2$, tel que si $x_0 \in D_{A^m}$, la solution unique u du *problème de Cauchy au sens des distributions*

$$-Au+u'=\delta\otimes x_0$$

est une fonction de classe C^1 *de* $[0,+\infty[$ *dans* E, *dont la restriction à* $]0,+\infty[$ *est analytique, prolongeable en une fonction holomorphe dans le secteur ouvert* S_α.

En plus, pour tout $t>0$, $u(t)\in D_{A^\infty}$.

References

[1] Chazarain, J., Problèmes de Cauchy abstraits et applications à quelques problèmes mixtes, J. Funct. Anal. **7** (1971), 386-446.

[2] Da Prado, G. et U. Mosco, Semi-gruppi distributzioni analitici, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **19** (1965), 367-396.

[3] Fujiwara, D., A caractérisation of exponential distribution semi-groups, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 267-274.

[4] Garnir, H. G., M. De Wilde et C. Schmets, Analyse fonctionnelle—Théorie constructive, Birkhauser 1, 1968.

[5] Hille, E., Notes of linear transformations, Ann. of Math. (2), **40** (1939), 1-47.

[6] Komura, T., Semi-groups of operators in locally convex spaces, J. Funct. Anal. **2** (1968), 258-296.

[7] Lions, J. L., Les semi-groupes distributions, Portugal. Math. **19** (1960), 141-164.

[8] Lions, J. L. et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1970.

[9] Oharu, S., Eine Bemerkung zur Charakterisierung der distributionenhalgruppen, Math. Ann. 204 (1973), 189-198.

[10] Schwartz, L., Théorie des distributions, tomes 1 et 2, Hermann, Paris, 1957.

[11] Ushijima, T., On the generation and smoothness of semi-groups of linear operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **19** (1972), 65-127.

[12] Yosida, K., Functional Analysis, Springer Verlag, 1965.

(Reçu le 27 juin 1974)
(Revisé le 2 mai 1975)

Institut de Mathématiques
Université de Nantes
38, Boulevard Michelet
44 Nantes—B. P. 1044
France