

La monodromie n'a pas de points fixes^{*)}

Par LÊ DŨNG TRÁNG

(Présenté par Y. Kawada)

Introduction

Dans [9], J. Milnor a démontré le théorème suivant:

THÉORÈME (Théorème de fibration de Milnor).

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique définie sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Supposons que $f(0)=0$.

Si S_ϵ est une sphère réelle de \mathbb{C}^{n+1} , centrée en 0 de rayon $\epsilon > 0$ assez petit, $f/|f|$ induit une application $\varphi_\epsilon: S_\epsilon - \{f=0\} \rightarrow S^1$ qui est une fibration C^∞ localement triviale.

De plus si $\eta > 0$ est assez petit ($\epsilon \gg \eta > 0$), $f/|f|$ induit une application

$$\psi_{\epsilon, \eta}: \dot{B}_\epsilon \cap \{|f|=\eta\} \rightarrow S^1$$

qui est une fibration C^∞ localement triviale qui est isomorphe à la fibration précédente par un isomorphisme qui donne l'identité sur S^1 .

D'autre part le revêtement universel $R \rightarrow S^1$ de S^1 donne par image inverse une fibration triviale $\tilde{X} \rightarrow R$ sur R et l'application $\tilde{X} \rightarrow S_\epsilon - \{f=0\}$ est un revêtement cyclique infini de l'espace total de la fibration de Milnor:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & S_\epsilon - \{f=0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & S^1. \end{array}$$

Soit $h: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ un générateur du groupe du revêtement cyclique $X \rightarrow S_\epsilon - \{f=0\}$. Ce générateur définit en homologie (resp. cohomologie) un automorphisme $h_*: H_*(F) \rightarrow H_*(F)$ (resp. $h^*: H^*(F) \rightarrow H^*(F)$), où F est une fibre de la fibration de Milnor, car \tilde{X} est difféomorphe à $F \times R$. Cet automorphisme est appelé *monodromie locale en homologie* de f en 0 (resp. *monodromie locale en cohomologie* de f en 0).

En fait la fibration de Milnor peut être définie par un difféomorphisme de F sur lui-même, appelé *difféomorphisme caractéristique* de la fibration (cf. [9]). Celui-ci est défini à isotopie près et induit h_* et h^* .

^{*)} Cet article a finalement été écrit grâce à la NSF Grant 362-69 et au C. N. R. S.

Dans [6] nous avons montré que la monodromie locale en homologie (resp. en cohomologie) de f en 0 est un invariant topologique.

Dans [1], N. A'Campo donne le théorème suivant:

THÉORÈME (A'Campo): *Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Supposons que $f(0)=0$ et $df(0)=0$. Alors le nombre de Lefschetz de la monodromie locale en cohomologie de f en 0 est nul:*

$$L(h^*)=0.$$

Remarquons que l'hypothèse $df(0)=0$ est essentielle. D'autre part compte tenu du théorème de Lefschetz, cela suggère l'existence d'un difféomorphisme caractéristique qui n'ait aucun point fixe. En fait nous allons montrer sous les hypothèses du théorème d'A'Campo, l'existence d'un *difféomorphisme* caractéristique sans point fixe et qui induit h^* .

Pour ce faire nous ferons une démonstration par récurrence sur n .

1. Polydisques privilégiés

(1.1) Tout d'abord, nous pouvons remarquer que si $\epsilon > 0$ est assez petit et $\eta > 0$ petit en comparaison avec ϵ ($\epsilon \gg \eta > 0$) alors on a en fait une fibration localement triviale:

$$\bar{\varphi}_{\epsilon, \eta}: B_\epsilon \cap \{|f|=\eta\} \rightarrow S^1$$

induite par $f/|f|$. En effet il suffit de remarquer que, si $\epsilon > 0$ est assez petit, pour les valeurs de $\eta \neq 0$ assez petites, les hypersurfaces complexes $f=\eta$ sont non singulières et transverses à S_ϵ .

Dans le cas où f a un point critique isolé en 0, ceci est clair.

Dans le cas général, on munit $\{f=0\}=H_0$ d'une bonne stratification au sens de [5] au voisinage de 0. En utilisant le lemme (21.4) de [5], si $\epsilon > 0$ est assez petit pour que S_ϵ soit transverse à toutes les strates de la bonne stratification, on obtient le résultat désiré.

Un homéomorphisme caractéristique de $\bar{\varphi}_{\epsilon, \eta}$ est alors un homéomorphisme d'une variété compacte à bord sur elle-même et on est dans les conditions d'applications du théorème de Lefschetz (theorem 1, p. 26 [2]).

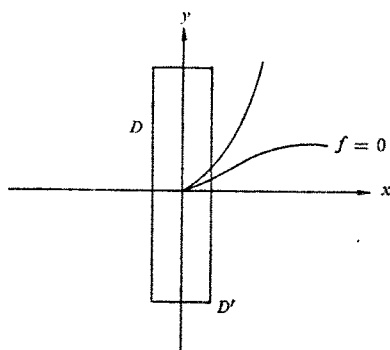
En fait nous n'allons pas considéré la fibration de Milnor dans B_ϵ mais dans un polydisque assez petit et bien disposé par rapport à $f=0$.

(1.2) Afin d'être clair dans l'exposé, nous allons décrire ces polydisques quand $n=0$ et $n=1$. De façon générale nous construisons ces polydisques par récurrence sur

la dimension.

Pour $n=0$, un polydisque privilégié est un disque contenu dans U tel que 0 soit le seul zéro de f qui y soit contenu.

Pour $n=1$, on considère une droite de \mathbb{C}^2 non contenue dans le cône tangent de $f=0$. On peut supposer, pour simplifier, que cette droite est donnée par $X=0$. Soit D un disque privilégié de la restriction de $f=0$ à $X=0$ en 0 . Soit D' un disque de $Y=0$ centré en 0 tel que pour tout $\xi \in D' - \{0\}$, $\{\xi\} \times D$ coupe transversalement la courbe réduite qui a même support que $f=0$. Dans ce cas $D' \times D$ est un polydisque privilégié de f en 0 et il est facile de voir que pour $\eta > 0$ assez petit, $f/|f|$ induit une fibration localement triviale $(D' \times D) \cap \{|f|=\eta\}$ sur S^1 qui est homotope par une homotopie qui conserve les fibres à la fibration de Milnor de f en 0 .



Remarquons que pour $n=0$ et $n=1$, les polydisques privilégiés forment un système fondamental de voisinage de 0 et qu'en fait ce sont des bons voisinages de 0 relativement à $\{f=0\}$ dans le sens de D. Prill dans [10].

(1.3) Remarquons tout d'abord qu'un polydisque $D_0 \times \dots \times D_n$ a une stratification réelle naturelle. En notant Σ_i l'union des strates de dimension réelle i on a :

$$\begin{aligned} \Sigma_{2n+2} &= \mathring{D}_0 \times \dots \times \mathring{D}_n \text{ (l'intérieur du polydisque)} \\ \Sigma_{2n+1} &= \prod_{i=0}^n \mathring{D}_0 \times \dots \times \partial D_i \times \dots \times \mathring{D}_n \\ \Sigma_{2n-k+2} &= \prod_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}} \mathring{D}_0 \times \dots \times \partial D_{i_1} \times \dots \times \partial D_{i_k} \times \dots \times \mathring{D}_n^0 \\ \Sigma_{n+1} &= \partial D_0 \times \dots \times \partial D_n. \end{aligned}$$

(1.3.1) Nous dirons qu'une variété différentiable coupe transversalement le polydis-

que $D_0 \times \cdots \times D_n$ si elle coupe transversalement toutes les strates de la stratification naturelle de ce polydisque.

(1.3.2) Nous dirons qu'un ensemble stratifié coupe transversalement le polydisque $D_0 \times \cdots \times D_n$ si toutes les strates de cet ensemble coupent transversalement toutes les strates du polydisque.

DÉFINITION (1.3.3): Un polydisque $D_0 \times \cdots \times D_n$ centré en 0 est un polydisque privilégié de f en 0 si:

- 1) pour tout $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ assez petit, l'hypersurface $\{f=b\} = H_b$ coupe $D_0 \times \cdots \times D_n$ transversalement;
- 2) pour tout $\eta > 0$ assez petit, $f/|f|$ définit une fibration C^∞ localement triviale

$$\mathring{D}_0 \times \cdots \times \mathring{D}_n \cap \{|f|=\eta\} \rightarrow \mathcal{S}^1$$

qui est homotope à la fibration de Milnor par une homotopie qui conserve les fibres.

LEMME (1.3.4): *Les polydisques privilégiés de f en 0 forment un système fondamental de voisinages de 0.*

PREUVE: Nous allons construire par récurrence sur la dimension un système fondamental en 0 de voisinages privilégiés de f en 0.

Pour cela nous munissons $H_0 = \{f=0\}$ au voisinage de 0 d'une bonne stratification relativement à f au sens de [5]. Nous supposons pour simplifier que U est assez petit pour que tout H_0 soit stratifié.

Soit V_i les strates de H_0 auxquelles 0 est adhérent. Dans [5] on a montré que les hyperplans, qui sont transverses à toutes les limites de suites d'espaces tangents aux V_i différents de $\{0\}$ en des suites de points de V_i tendant vers 0, forment un ouvert de Zariski. Choisissons un tel hyperplan et supposons qu'il soit défini par $z_0=0$. Quitte à supposer U assez petit, $z_0=0$ est transverse à toutes les strates de H_0 . La trace $V_i \cap \{z_0=0\}$ de la bonne stratification de H_0 donne une bonne stratification de la restriction de f à $\{z_0=0\}$. Cette stratification induit une stratification de $\{f=0, z_0=0\} - \{0\}$.

Soit \mathcal{A} un polydisque de $z_0=0$ privilégié pour la restriction de f à $z_0=0$ en 0 telle que la stratification de $\{f=0, z_0=0\} - \{0\}$ soit transverse au polydisque \mathcal{A} . L'existence d'un tel polydisque est évidente si $n=0$ ou $n=1$. Soient W_i les strates de $\{f=0, z_0=0\} - \{0\}$: si $V_i \ni \{0\}$ alors $W_i = V_i \cap \{z_0=0\}$; et appelons Σ_j les strates de la stratification naturelle de \mathcal{A} .

Remarquons tout d'abord que les strates $\{0\} \times \Sigma_j$ sont transverses à toutes les

strates V_i de $\{f=0\}$ telles que $V_i \neq \{0\}$. Pour tout ξ assez petit, disons $0 \leq |\xi| \leq \theta$, $\{\xi\} \times \Sigma_i$ est donc transverse à toutes les strates V_i de $\{f=0\}$ telles que $V_i \neq \{0\}$. Donc si D est le disque $\{|\xi| \leq \theta\}$, on obtient que $\mathring{D} \times \Sigma_i$ et $\partial D \times \Sigma_i$ sont transverses à toutes les strates V_i de $\{f=0\}$ telles que $V_i \neq \{0\}$. Or $\mathring{D} \times \Sigma_i$ et $\partial D \times \Sigma_i$ donnent les strates du polydisque $D \times \mathcal{A}$.

De ce qui précède, il résulte que toutes les strates du bord de $D \times \mathcal{A}$ sont transverses à toutes les strates de $\{f=0\}$. Comme celles-ci forment une bonne stratification relativement à f , le théorème (1.3.3) de [5] montre que pour tout b assez petit, l'hypersurface non singulière $f=b$ coupe le bord stratifié de $D \times \mathcal{A}$ transversalement au sens de (1.3.1).

Si la stratification du bord de $D \times \mathcal{A}$ ne vérifiait que les conditions de Whitney, alors, en appliquant le théorème d'isotopie de Thom et Mather, on trouve que, pour $\eta > 0$ assez petit, $f/|f|$ définit une fibration topologique localement triviale de $(D \times \mathcal{A}) \cap \{|f|=\eta\}$ sur \mathcal{S}^1 dont la restriction à $(\mathring{D} \times \mathcal{A}) \cap \{|f|=\eta\}$ est en fait différentiable.

Bienheureusement dans ce cas $D \times \mathcal{A}$ est une variété à "coins" (cf. variétés à bord anguleux de [3]). Précisément si $x \in \partial(D \times \mathcal{A})$ il existe un voisinage U_1 de x dans \mathcal{C}^{n+1} et un difféomorphisme φ de U_1 sur une boule ouverte B_1 de \mathcal{R}^{2n+2} centrée 0 tel que $\varphi(U_1 \cap (D \times \mathcal{A}))$ soit l'ensemble des points de B_1 où $x_1 \geq 0, \dots, x_k \geq 0$ avec x_i , coordonnées de \mathcal{R}^{2n+2} et k un entier, $1 \leq k \leq n+1$. Il est alors facile de démontrer l'analogie du lemme d'Ehresmann pour les variétés à coins:

LEMME (1.3.5): *Soit $f: V \rightarrow W$ une application C^∞ d'une variété à coins V dans une variété différentiable W . Si f est propre et si les restrictions de f aux strates naturelles de V sont submersives alors f est une fibration C^∞ localement triviale dont les fibres sont des variétés à coins.*

En appliquant ce lemme à notre situation, l'application $f/|f|$ définit bien une fibration C^∞ localement triviale de $(D \times \mathcal{A}) \cap \{|f|=\eta\}$ sur \mathcal{S}^1 dont les fibres sont des variétés C^∞ à coins.

On peut ainsi construire un système fondamental de polydisques $D \times \mathcal{A}$ tel que, pour $\eta > 0$ assez petit, $f/|f|$ induise une fibration localement triviale $(D \times \mathcal{A}) \cap \{|f|=\eta\} \rightarrow \mathcal{S}^1$. Quand $D \times \mathcal{A}$ est assez petit, ce polydisque devient un bon voisinage de 0 relativement à $\{f=0\}$ au sens de D. Prill dans [10]. Il en résulte que l'inclusion de l'espace total de notre fibration dans l'espace total de la fibration de Milnor donne une équivalence d'homotopie. En considérant le pull back de ces deux fibrations par le revêtement universel $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}^1$, on trouve alors que les revêtements cycli-

ques infinis de nos deux fibrations, que l'on obtient ainsi, ont le même type d'homotopie. De ceci, il résulte que l'inclusion de la fibre de notre fibration dans celle de la fibration de Milnor est une équivalence d'homotopie, car on sait que les revêtements cycliques en question ont le type d'homotopie des fibres des fibrations correspondantes. Un théorème de Dold dans [4] montre alors que les deux fibrations sont homotopes dans une homotopie qui conserve les fibres.

On a donc construit un système fondamental de voisinages privilégiés.

2. Courbes polaires et diagramme de Cerf

(2.1) Nous avons déjà introduit la notion de courbe polaire et de diagramme de Cerf dans [6]. Nous allons rappeler les définitions et les propriétés dont nous aurons besoin.

(2.2) Considérons un hyperplan de \mathbf{C}^{n+1} , disons $z_0=0$. Soit $\Phi: U \rightarrow \mathbf{C}^2$ l'application dont les deux composantes sont respectivement f et z_0 . Le lieu critique C de Φ est alors défini par

$$(2.2.1) \quad \partial f / \partial z_1 = \dots = \partial f / \partial z_n = 0.$$

On peut remarquer que C contient toujours le lieu critique de f . On a alors (cf. [5]):

LEMME (2.2.2): *Il existe un ouvert de Zariski dense Ω de l'espace projectif des hyperplans de \mathbf{P}^n tel que, pour tout hyperplan de cet ouvert d'équation, disons $z_0=0$, pour un voisinage ouvert U assez petit de \mathbf{C}^{n+1} , le lieu critique C de Φ , défini ci-dessus, soit union de Σ , lieu critique de f , et de Γ , qui est soit vide, soit une courbe passant par 0 qui n'est pas contenue dans $\{f=0\}$:*

$$C = \Sigma \cup \Gamma.$$

De plus la courbe, définie en tout point de $\Gamma - \{0\}$ par les équations (2.2.1) est réduite.

DÉFINITION (2.2.3): La courbe Γ précédente est appelée *courbe polaire* de $z_0=0$ relativement à f .

DÉFINITION (2.2.4): Quand V est un voisinage ouvert assez petit, l'image \mathcal{A} de Γ par Φ est une courbe analytique de \mathbf{C}^2 appelée *diagramme de Cerf* de $z_0=0$ relativement à f .

Dans [6] on a montré:

LEMME (2.2.5): Si $f(0)=0$ et $df(0)=0$, le diagramme de Cerf Δ a pour cône tangent en 0 la droite $\{0\} \times \mathbb{C}$ ("droite des valeurs" de z_0 dans \mathbb{C}^2).

REMARQUES (2.2.6): Quand U est assez petit, le fait que les équations (2.2.1) définissent une courbe réduite en un point x de $\Gamma - \{0\}$ signifie qu'au point x l'espace tangent $T(x, \{f=f(x)\})$ à l'hypersurface $\{f=f(x)\}$, qui est parallèle à $z_0=0$, a un contact quadratique ordinaire avec $f=f(x)$. Par conséquent l'hypersurface $\{f=f(x), z_0=z_0(x)\}$ a une singularité ordinaire en x .

(2.2.7) Il peut arriver que $\Gamma = \emptyset$ pour tout hyperplan d'un ouvert non vide Zariski de \mathbb{P}^n . En fait ce phénomène a lieu si et seulement si la fibre au dessus de 0 de l'éclatement jacobien de f est de dimension strictement plus petite que n (cf. [5]).

(2.2.8) En utilisant [7] ou un résultat non publié de Iomdine, on peut montrer que Ω peut être choisi de telle sorte que la projection définie par ϕ de I' sur Δ est une bijection à l'extérieur de 0.

3. Le théorème principal

Nous prenons les notations de l'introduction.

(3.1) Nous allons montrer le théorème suivant:

THÉORÈME (3.1.1): Si $df(0)=0$, il existe un système fondamental de voisinages de polydisques privilégiés $(\Delta_i)_{i \in I}$ de f en 0 tel que, pour tout Δ_i , la fibration \mathbb{C}^∞ en variété à coins définie par $f/|f|$, pour $\eta > 0$ assez petit:

$$\Delta_i \times \{|f|=\eta\} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

a un difféomorphisme caractéristique qui n'a aucun point fixe.

D'après la définition d'un polydisque privilégié de f en 0 (cf. (1.3.3)) et le théorème des points fixes de Lefschetz (cf. [2]), il en résulte immédiatement:

COROLLAIRE (3.1.2) (A'Campo): Le nombre de Lefschetz de la monodromie locale de f en 0 en cohomologie égale 0 quand $f(0)=0$ et $df(0)=0$.

Avant de donner la démonstration de ce théorème nous allons faire quelques remarques.

REMARQUES (3.1.3): En fait l'homéomorphisme caractéristique sera donné par un champ de vecteurs sur $\Delta_i \cap \{|f|=\eta\}$ qui se projette sur le champ de vecteurs unité de \mathbb{S}^1 par $f/|f|$. De plus la restriction à $\dot{\Delta}_i$ est différentiable. En fait, toujours parce que l'on a à faire avec des variétés à coins, notre homéomorphisme

est en fait un difféomorphisme de variétés à coins (cf. [3] et preuve du lemme (1.3.4)).

(3.2) Esquisse de la démonstration du théorème (3.1.1)

(3.2.1) Nous allons démontrer le théorème (3.1.1) par récurrence sur la dimension n . Pour cela nous allons en fait démontrer une version un peu plus forte que le théorème (3.1.1).

Tout d'abord, si $\{f=0\}$ est muni d'une bonne stratification, on pourra exiger que les strates du bord des \mathcal{A}_i ($i \in I$) soient transverses aux strates de cette stratification. D'autre part pour chaque \mathcal{A}_i on construira un champ de vecteurs intégrable sur $\mathcal{A}_i \cap \{|f|=\eta\}$, pour tout η assez petit, dont la restriction aux strates Σ de \mathcal{A}_i donne un champ de vecteurs différentiable sur $\Sigma \cap \{|f|=\eta\}$ et dont l'image par l'application tangente de $f/|f|$ donne le champ de vecteurs unité de \mathbf{S}^1 . De plus l'intégration de ce champ de vecteurs donne un homéomorphisme d'une fibre de la fibration $\mathcal{A}_i \cap \{|f|=\eta\} \rightarrow \mathbf{S}^1$, définie par $f/|f|$, sur elle-même qui n'a pas de point fixe. Nous exprimons ce fait en disant qu' aucune ligne intégrale de ce champ de vecteurs ne se ferme après un tour sur \mathbf{S}^1 .

Il est bien clair que pour $n=0$, si $f(0)=0$ et $df(0)=0$, on peut construire une telle famille de polydisques privilégiés $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ (dans ce cas les \mathcal{A}_i sont des disques de \mathbf{C}) et pour chaque \mathcal{A}_i , un tel champ de vecteurs sur $\mathcal{A}_i \cap \{|f|=\eta\}$ pour tout $\eta > 0$ assez petit. En effet dans ce cas la situation est analytiquement équivalente à celle donnée par $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, où $f(z)=z^m$, où m est la multiplicité de f en 0 et $m \geq 2$.

Supposons donc $n \geq 1$. Munissons $\{f=0\}$ d'une bonne stratification relativement à f . Quitte à se placer dans un U plus petit, on peut supposer que $\{f=0\} = \bigcup_{i=1}^n V_i$ et que $0 \in V_i$. On choisit alors un hyperplan L , que l'on supposera, pour simplifier, défini par $z_0=0$, tel que:

- 1) l'hyperplan L appartient à l'ouvert de Zariski dense Ω défini dans le lemme (2.2.2);
- 2) l'hyperplan L est transverse à toutes les limites d'espaces tangents aux strates $V_i \neq \{0\}$ en des suites de points de V_i tendant vers 0.

(Comparer les conditions précédentes aux conditions déterminant l'hyperplan générique dans [5]).

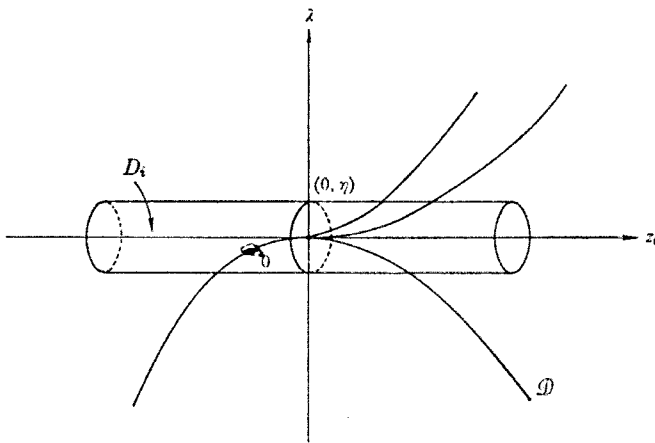
La bonne stratification de $\{f=0\}$ relativement à 0 donne alors une bonne stratification de $\{f=0\} \cap L$. Comme la restriction de f à L a un point critique en 0, utilisant l'hypothèse de récurrence dans $z_0=0$, i.e. l'hyperplan L , nous avons un

système fondamental de polydisques privilégiés $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de la restriction de f à L en 0 .

D'après l'hypothèse par récurrence, il existe un tel système fondamental $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ pour lequel les strates du bord de \mathcal{A}_i soient transverses à la bonne stratification de $\{f=0\} \cap L$ relativement à la restriction de f à L . De plus pour chaque \mathcal{A}_i , pour tout η assez petit, on a sur $\mathcal{A}_i \cap (\{|f|=\eta\} \cap L)$ un champ de vecteurs intégrable dont la restriction aux strates de \mathcal{A}_i donne un champ de vecteurs différentiable et dont la projection sur S^1 par $f/|f|$ donne le champ de vecteurs unité de S^1 .

Fixons un \mathcal{A}_i . Nous allons construire un polydisque $D_i \times \mathcal{A}_i$ de C^{n+1} , centré en 0 , qui aura relativement à $\{f=0\}$ les mêmes propriétés que \mathcal{A}_i relativement à $\{f=0\} \cap L$.

Considérons alors le diagramme de Cerf \mathcal{D} de f relativement à z_0 . Appelons encore z_0 la coordonnée correspondant aux valeurs de z_0 et λ celle qui correspond aux valeurs de f . D'après le lemme (2.2.5) la droite $\lambda=0$ est le cône tangent du diagramme de Cerf:



Choisissons alors un disque D_i de C centré en 0 tel que:

- 1) $D_i \times \{0\}$ ne coupe \mathcal{D} qu'en $\{0\}$;
- 2) les strates du bord de $D_i \times \mathcal{A}_i$ coupent transversalement les strates de la bonne stratification de $\{f=0\}$ relativement à f .

Le 1) est obtenu dès que D_i est de rayon assez petit puisque I' n'étant pas contenu dans $f=0$, aucune composante de \mathcal{D} ne coïncide avec $\lambda=0$.

Le 2) s'établit comme dans la démonstration du lemme (1.3.4).

Remarquons que si $\Gamma = \emptyset$, $\mathcal{G} = \emptyset$ et que, dans ce cas, $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$ est homéomorphe (en fait difféomorphe en tant que variété à coins) avec $D_i \times \{\mathcal{A}_i \cap (\{|f| = \eta\} \cap L)\}$. La démonstration du théorème est alors simple puisque le champ de vecteurs construit dans $\mathcal{A}_i \cap (\{|f| = \eta\} \cap L)$ donnera le champ de vecteurs de $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$ par le difféomorphisme à coins.

On peut donc supposer $\Gamma \neq \emptyset$ donc $\mathcal{G} \neq \emptyset$.

Choisissons $\eta > 0$ assez petit pour que, pour tout b , $0 < |b| \leq \eta$ les points d'intersection de \mathcal{G} (courbe réduite) avec $D_i \times \{b\}$ soient tous simples et leur nombre égal à la multiplicité d'intersection de \mathcal{G} et $\lambda = 0$ en 0. De plus on demande que le polydisque $D_i \times D$, où D est de rayon η soit contenu dans l'image de $D_i \times \mathcal{A}_i$ par $\Phi = (z_0, f) : U \rightarrow \mathbb{C}^2$.

L'espace $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$ est alors l'intersection de l'image inverse du tore plein $D_i \times \partial D$ par Φ et de $D_i \times \mathcal{A}_i$.

Nous allons tout d'abord décrire la procédure de notre démonstration:

(3.2.2) A— Nous construisons un champ de vecteurs différentiable sur $D_i \times \partial D$ qui vérifie les propriétés suivantes:

- a) la projection sur ∂D donne le champ de vecteurs constant de longueur η et de direction positive (malgré l'abus de langage, nous appellerons ce champ *le champ de vecteurs unité de ∂D*);
- b) la restriction à $\{0\} \times \partial D$ donne ce champ de vecteurs unité;
- c) le champ de vecteurs est tangent à $(D_i \times \partial D) \cap \{\delta = \theta\}$, pour tout $\theta \in \mathbb{C}$ assez petit, avec $\delta = 0$ équation réduite de \mathcal{G} .
- d) Aucune ligne intégrale de ce champ autre que $\{0\} \times \partial D$ ne se referme après un tour sur ∂D .

B— Nous relevons ce champ de vecteurs intégrable sur $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$ en un champ de vecteurs qui étende le champ de vecteurs déjà obtenu dans $\mathcal{A}_i \cap \{|f| = \eta\} \cap L$.

Une fois faite cette construction, le champ de vecteurs obtenu n'a aucune ligne intégrale qui ne se referme au bout d'un tour sur ∂D , car toute ligne intégrale fermée donnerait une ligne intégrale fermée du champ de vecteurs sur $D_i \times \partial D$. Comme seule $\{0\} \times \partial D$ est celle qui se referme au bout d'un tour sur ∂D , une ligne intégrale du champ de vecteurs sur $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$, qui se refermerait au bout d'un tour sur ∂D , se trouverait dans L et ceci est impossible d'après l'hypothèse de récurrence.

Afin d'achever la démonstration du théorème nous allons faire les constructions

décrites par la procédure (3.2.2).

(3.3) Construction du champ de vecteurs sur $D_i \times \partial D$.

Le diagramme de Cerf \mathcal{D} (défini par $\delta=0$) peut être paramétrisé de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \lambda &= t^n \\ z_{01} &= \sum_{i=k_1}^{\infty} a_{i1} t^i, \quad \text{avec } a_{k_1 1} = \alpha_1 \neq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ z_{0r} &= \sum_{i=k_r}^{\infty} a_{ir} t^i, \quad \text{avec } a_{k_r r} = \alpha_r \neq 0. \end{aligned}$$

Rappelons que ceci est une paramétrisation de la courbe réduite d'équation réduite $\delta=0$.

L'entier r est le nombre de composantes irréductibles de \mathcal{D} en 0. On appellera $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_r$ les branches de \mathcal{D} .

Le lemme (2.2.5) rappelle que, sous les hypothèses du théorème, i.e. $f(0)=0$ et $df(0)=0$, la droite $\lambda=0$ est le cône tangent de \mathcal{D} . Par conséquent, on obtient:

LEMME (3.3.1): *Pour tout $j, j=1, \dots, r$, on a : $k_j < n$.*

(3.3.2) Nous notons m_j, n_j les entiers premiers entre eux définis par:

$$\frac{m_j}{n_j} = \frac{k_j}{n}.$$

On note C_1, \dots, C_r les courbes définis par:

$$\begin{cases} \lambda = t^{n_j} \\ z_{0j} = \alpha_j t^{m_j} \end{cases} \quad (j=1, \dots, r).$$

La paire (m_j, n_j) est donc la première paire de Puiseux "non transverse" de \mathcal{D}_j dans le système de coordonnées donné par λ et z_0 .

Quand $\eta > 0$ est assez petit, les points de $(D_i \times \partial D) \cap \mathcal{D}_j$ sont dans un voisinage tubulaire assez petit de $(D_i \times \partial D) \cap C_j$.

Remarquons également que les courbes (C_j) ne sont pas nécessairement toutes distinctes ainsi que les paires (m_j, n_j) .

Afin éviter les confusions, nous allons ordonner les indices j de telle sorte que:

$$|\alpha_1| \eta^{m_1/n_1} \leq |\alpha_2| \eta^{m_2/n_2} \leq \dots \leq |\alpha_r| \eta^{m_r/n_r}$$

pour tout $\eta > 0$ assez petit.

On notera C'_1, \dots, C'_l les courbes C_j distinctes. Remarquons que les paires de Puiseux "non transverses" (m'_j, n'_j) ($j=1, \dots, l$) de ces courbes ne sont pas nécessairement toutes distinctes. La courbe C'_j est alors définie par:

$$\begin{cases} \lambda = t^{n'_j} \\ z_{0j} = \alpha'_j t^{m'_j} \end{cases} \quad (j=1, \dots, l)$$

avec de plus:

$$(3.3.3) \quad \begin{cases} C'_1 = C_1 = \dots = C_{i_1} \\ C'_2 = C_{i_1+1} = \dots = C_{i_2} \\ \dots \\ C'_l = C_{i_{l-1}+1} = \dots = C_r. \end{cases}$$

Enfin on a:

$$(3.3.4) \quad \begin{cases} \frac{m'_1}{n'_1} = \dots = \frac{m'_{i_1}}{n'_{i_1}} \\ \frac{m'_{i_1+1}}{n'_{i_1+1}} = \dots = \frac{m'_{i_2}}{n'_{i_2}} \\ \dots \\ \frac{m'_{i_{s-1}+1}}{n'_{i_{s-1}+1}} = \dots = \frac{m'_i}{n'_i} \end{cases}$$

avec:

$$\frac{m'_{i_1}}{n'_{i_1}} > \dots > \frac{m'_i}{n'_i}.$$

On notera:

$$(3.3.5) \quad \begin{cases} r'_j = |\alpha'_j| \eta^{m'_j/n'_j} & (j=1, \dots, l) \\ \left\{ \begin{array}{l} \rho_k = r'_{i_k} \\ \rho'_k = r'_{i_k+1} \end{array} \right. & k=1, \dots, s-1 \\ \rho_s = r_i. \end{cases}$$

Remarquons encore que les r'_j ne sont pas nécessairement tous distincts. Cependant pour $\eta > 0$ assez petit, on a:

LEMME (3.3.6): $\rho_k < \rho'_k$ ($k=1, \dots, s-1$).

La preuve de ce lemme est immédiate puisque

$$\rho_k = |\alpha'_k| \eta^{m'_k/n'_k}$$

$$\rho'_k = |\alpha_{l_{k+1}}| \eta^{m'_{l_{k+1}}/n'_{l_{k+1}}}$$

et:

$$\frac{m'_k}{n'_k} > \frac{m'_{l_{k+1}}}{n'_{l_{k+1}}} = \frac{m_{l_{k+1}}}{n_{l_{k+1}}}.$$

Nous pouvons alors décrire ce que nous voyons dans $D_i \times \{\eta\}$ quand $\eta > 0$ est assez petit:

- 1) Les points de $C'_j \cap (D_i \times \{\eta\})$ sont situés sur un cercle centré en $(0, \eta)$ de rayon r'_j . Remarquons que plusieurs C'_j distincts peuvent donner des points dans $D_i \times \{\eta\}$ situés sur le même cercle.
- 2) Les cercles de rayons r'_j se regroupent "par paquets" situés respectivement entre les cercles de rayons r'_1 et ρ_1 , ρ'_1 et ρ_2 , \dots , ρ'_{s-1} et ρ_s .
- 3) Les points des $\mathcal{D}_j \cap (D_i \times \{\eta\})$ sont situés au voisinage des points des $C'_j \cap (D_i \times \{\eta\})$: nous spécifierons dans la suite de quelle manière. Par exemple

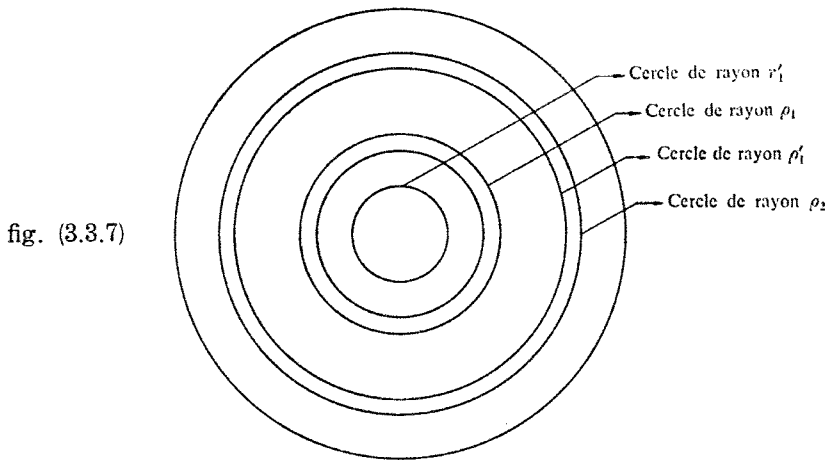


fig. (3.3.7)

Remarquons alors que les points de $C'_j \cap (D_i \times \{\eta e^{i\theta}\})$ sont situés sur le cercle de rayon r'_j centré en $(0, \eta e^{i\theta})$. Quand θ parcourt le segment $[0, 2\pi]$, les points de $C'_j \cap (D_i \times \{\eta\})$ ont tourné sur le cercle de rayon r'_j d'un angle $2\pi(m'_j/n'_j) < 2\pi$ d'après le lemme (3.3.1).

L'angle de rotation est alors le même respectivement pour C'_1, \dots, C'_{l_1} d'une part, $\dots, C'_{l_{s-1}+1}, \dots, C'_s$ d'autre part.

(3.3.8) Appelons alors $A(r, r')$ l'anneau ouvert des points compris entre les cercles

centrés en 0 de rayon r et r' .

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$, l'union des disques de rayon ε de $D_i \times \{\gamma e^{i\theta}\}$, centrés en les points de $C'_j \cap (D_i \times \{\gamma e^{i\theta}\})$ quand $\theta \in [0, 2\pi]$ est appelé ε -tube de $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$. Si $\mathcal{D}_k \cap (D_i \times \partial D)$ est contenu dans l' ε -tube de $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$, nous dirons que \mathcal{D}_k est ε -proche de C'_j sur $D_i \times \partial D$.

Remarquons que si $\varepsilon > 0$ est assez petit, un ε -tube de $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$ est un voisinage tubulaire de $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$.

On a alors le lemme "technique" suivant qui est fondamental pour la construction de notre champ de vecteurs.

LEMME (3.3.9): *Si $\eta > 0$ est assez petit, il existe R_k, R'_k ($k=1, \dots, s-1$), R_s tels que:*

$$\rho_k < R_k < R'_k < \rho'_k, \rho_s < R_s$$

et $\varepsilon_j > 0$ ($j=1, \dots, l$) tels que:

- 1) pour tout k , tel que $(\alpha_k, m_k/n_k) = (\alpha'_j, m'_j/n'_j)$, \mathcal{D}_k est $\varepsilon_j/2$ -proche de C'_j sur $D_i \times \partial D$;
- 2) Les ε_j -tubes des $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$ sont disjoints et sont des voisinages tubulaires des $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$;
- 3) pour tout j , $l_k+1 \leq j \leq l_{k+1}$ ($k=0, \dots, s-1$ avec $l_0=0$ et $l_s=l$) le ε_j -tube de $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$ est contenu dans l'anneau $A(R'_k, R_{k+1})$ ($k=0, \dots, s-1$ avec $R'_0=0$).

La preuve de ce lemme est élémentaire, mais très ennuyeuse. Aussi nous laissons au lecteur éventuel le soin de la faire. Avec la description de $(D_i \times \partial D) \cap \mathcal{D}$ donnée précédemment, il n'y a aucune difficulté à surmonter.

Maintenant nous sommes en mesure de construire le champ de vecteurs cherché.

Nous fixons alors $\eta > 0$ de telle sorte que les conclusions du lemme (3.3.9) soient vérifiées.

Rappelons que nous avons donné dans (3.2.2) partie A les propriétés du champ de vecteurs que nous cherchons à obtenir.

Si $\theta \in \mathcal{C}$ est assez petit, disons $|\theta| < \theta_0$, $\mathcal{D}_\theta \cap (D_i \times \partial D)$, où \mathcal{D}_θ est défini par $\delta = \theta$ est contenu dans les $\varepsilon_0/2$ -tubes des C_j , avec $\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$.

Cette remarque étant faite, nous avons:

LEMME (3.3.10): *Il existe sur $D_i \times \partial D$ un champ de vecteurs différentiable tel que:*

- 1) La projection de ce champ de vecteurs sur ∂D est le champ de vecteurs unité de ∂D (au sens donné dans (3.2.2));

- 2) La restriction de ce champ de vecteurs à $\{0\} \times \partial D$ est le champ de vecteurs unité de $\{0\} \times \partial D$;
- 3) Le champ de vecteurs est tangent à $(D_i \times \partial D) \cap \mathcal{D}_\theta$ pour tout $\theta \in \mathcal{C}$ assez petit;
- 4) Aucune ligne intégrale de ce champ de vecteurs autre que $\{0\} \times \partial D$ ne se referme au bout d'un tour sur ∂D .

PREUVE: Appelons w_0 le champ de vecteurs de $D_i \times \partial D$ extension triviale du champ de vecteurs unité de $\{0\} \times \partial D$.

Dans $D_i \times \{r\}$ nous avons un champ de vecteurs tel que:

- 1) Dans les anneaux $A(R'_k, R_{k+1})$ ($k=0, \dots, s-1$), c'est le champ de vecteurs qui réalise la rotation d'angle $2\pi(m'_{k+1}/n'_{k+1})$ (avec $l_0=0$), i.e. le champ de vecteur qui en un point de $A(R'_k, R_{k+1})$ situé à la distance r de 0 est tangent au cercle de rayon r , est orienté dans le sens positif et a pour norme $r(m'_{k+1}/n'_{k+1})$.
- 2) A l'origine ce champ de vecteurs est nul.
- 3) Dans les zones entre les anneaux ou à l'extérieur du dernier anneau le champ de vecteur en un point x est tangent au cercle centré en 0 et passant par x .

Très précisément soit $\varphi : [0, R] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^∞ sur l'intervalle fermé $[0, R]$ où R est le rayon de D_i telle que

- a) φ soit constante sur les intervalles fermés $[0, R_1], [R'_1, R_2], \dots, [R'_{s-1}, R]$ avec les valeurs respectives $m'_{i_1}/n'_{i_1}, m'_{i_2}/n'_{i_2}, \dots, m'_i/n'_i$;
- b) φ soit décroissante.

L'existence d'une telle fonction φ est assez facile, aussi nous ne le démontrerons pas.

Dans les anneaux fermés $A(R_k, R'_k)$ ($k=1, \dots, s-1$) le champ de vecteurs donne en un point $x \in A(R_k, R'_k)$ à la distance r de 0 tangent au cercle de rayon r centré en 0 de direction positive et de longueur $r_\varphi(r)$.

On étend trivialement ce champ de vecteurs à tout $D_i \times \partial D$. A l'aide d'une partition de l'unité convenable, on modifie ce champ de vecteurs en un champ de vecteurs égal au précédent à l'extérieur des ε_j -tubes des $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$ ($j=1, \dots, l$) et nul à l'intérieur des $\varepsilon_j/2$ -tubes des $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$. On appelle w_1 le champ de vecteurs de $D_i \times \partial D$ somme de celui-ci et de w_0 construit au début. Il est maintenant facile de construire un champ de vecteurs w_2 , qui, dans les $\varepsilon_j/2$ -tubes des $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$, soit tangent à $\mathcal{D}_\theta \cap (D_i \times \partial D)$ pour $\theta \in \mathcal{C}$ assez petit, car $D_i \times \partial D$ coupe \mathcal{D}_θ transversalement quand $\theta \in \mathcal{C}$ est assez petit, et qui à l'extérieur des ε_j -tubes des $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$ ($j=1, \dots, l$) soit nul.

En sommant les deux champs de vecteurs w_1 et w_2 précédents on obtient le champ de vecteurs w cherché. En effet aucune ligne intégrale à l'extérieur des

ε_j -tubes de $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$ ne se referme au bout d'un tour sur ∂D , car cette ligne intégrale reste sur un tore $\partial D_r \times \partial D$ (où ∂D_r est le cercle de rayon r centré en 0) et partant d'un point de $\partial D_r \times \{\eta\}$ arrive en un point de $\partial D_r \times \{\eta\}$ obtenu par une rotation d'angle strictement inférieur à 2π au bout d'un tour sur ∂D (car $\varphi(r) < 1$). D'autre part une ligne intégrale dans un ε_j -tube n'en sort pas et évidemment ne peut pas se refermer au bout d'un tour.

Remarquons qu'une ligne intégrale dans $A(R'_k, R_{k+1}) \times \partial D$ ($k=0, \dots, s-1$) extérieure aux ε_j -tubes de $C'_j \cap (D_i \times \partial D)$ se referme au bout de n'_k tours.

(3.4) Relèvement du champ de vecteurs w .

Nous sommes maintenant en mesure de réaliser la procédure B décrite dans (3.2.2).

L'hypothèse de récurrence nous dit que nous avons un champ de vecteurs C^∞ sur $(\{0\} \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f|=\eta\}$ qui relève le champ de vecteurs unité de $\{0\} \times \partial D$. Comme sur $U_0 \times \partial D$ (où U_0 est un voisinage de 0 dans D_i), $\Phi=(z_0, f)$ n'a aucun point critique et est de rang maximum sur les strates du bord de $U_0 \times \mathcal{A}_i$, on peut étendre le champ de vecteurs dans $(\{0\} \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f|=\eta\}$ en un champ de vecteurs w' C^∞ de $(U_0 \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f|=\eta\}$ en utilisant le lemme (1.3.5).

De plus en tout point de $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f|=\eta\}$ qui n'est pas situé sur la courbe polaire de $z_0=0$ relativement à f , on peut localement relever ce champ de vecteurs w sur $D_i \times \partial D$, i.e. en tout point x de $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f|=\eta\}$ qui n'est pas dans $(U_0 \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f|=\eta\}$ il existe un voisinage ouvert U_x de x dans $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f|=\eta\}$ qui ne rencontre pas $(\{0\} \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f|=\eta\}$ et un champ de vecteurs w_x dont l'image par Φ donne la champ de vecteurs restriction de w à $\Phi(U_x)$. Remarquons que les points de $\partial(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f|=\eta\}$ ne sont pas sur la courbe polaire.

Il reste à considérer le cas où x est un point de la courbe polaire de $z_0=0$ relativement à f .

Pour cela nous avons besoin du lemme suivant:

LEMME (3.4.1): Soit $F: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un morphisme analytique plat dont la fibre en 0 en une singularité quadratique ordinaire, alors il existe deux germes d'isomorphismes analytiques $\varphi: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ et $\psi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tels que $F_0 = \psi F \varphi^{-1}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0)$ soit défini par la fonction $f(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ et la projection $p(x_1, \dots, x_n, t) = t$. De plus si $\delta=0$ est le discriminant de F , on peut choisir φ et ψ de telle sorte que l'image de $\delta=\varepsilon$ par ψ soit $\mathbb{C} \times \{\varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{C}$ assez petit.

PREUVE: Elle dérive immédiatement de ce que la déformation miniverselle

d'une singularité quadratique ordinaire définie localement au voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n par

$$g = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

est donné par $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. (cf. [12]).

Soit x un point de $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$ situé sur la courbe polaire. Le morphisme ϕ induit un germe de morphisme de $(\mathbb{C}^{n+1}, x) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(x))$ dont la fibre au-dessus de $\phi(x)$ a une singularité quadratique ordinaire en x d'après la remarque (2.2.5). D'après le lemme (3.4.1) tout champ de vecteurs différentiable dans un voisinage ouvert suffisamment petit de $\phi(x)$ dans \mathbb{C}^2 tangent à $\delta = \theta$ se relève par ϕ dans un voisinage ouvert suffisamment petit de x dans \mathbb{C}^{n+1} en un champ de vecteurs différentiable tangent au lieu critique de ϕ . En particulier le champ de vecteurs w de $D_i \times \partial D$ que l'on a construit dans (3.3), au voisinage de $\phi(x)$, est tangent à $\delta = \theta$, pour tout $\theta \in \mathbb{C}$ assez petit. Quitte à imaginer qu'il est la restriction à $D_i \times \partial D$ d'un champ de vecteurs différentiable de \mathbb{C}^2 , la restriction de ce champ de vecteurs à un voisinage de $\phi(x)$ dans $D_i \times \partial D$ suffisamment petit se relève en un champ de vecteurs différentiable dans un voisinage de x dans $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$ suffisamment petit. Ce nouveau champ de vecteurs est alors tangent à l'intersection de la courbe polaire et de $\{|f| = \eta\}$.

En utilisant une technique classique de recollement (cf. [9] par exemple) à l'aide d'une partition de l'unité associée à un recouvrement de $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$ par des ouverts où l'on a, comme ci-dessus, construit un champ de vecteurs avec les propriétés voulues, on obtient sur $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$ un champ de vecteurs différentiable v , tangent aux strates de $\partial(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\}$ et qui se projette par ϕ sur le champ de vecteurs différentiable w .

Par conséquent toute orbite de v qui se ferme après un tour sur ∂D se projette sur $D_i \times \partial D$ en une orbite de w qui se ferme après un tour sur ∂D . Or la seule orbite de w qui se ferme après un tour sur ∂D est $\{0\} \times \partial D$, par conséquent une orbite de v qui se fermerait après un tour sur ∂D serait dans $\{z_0 = 0, |f| = \eta\}$ ce qui est exclu d'après l'hypothèse par récurrence. Ceci montre qu'en intégrant le champ de vecteurs v on obtient un difféomorphisme caractéristique de la fibration $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ qui n'a pas de point fixe. Ceci achève la démonstration de notre théorème.

REMARQUE (3.4.2): Le difféomorphisme caractéristique de $(D_i \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ainsi construit induit un difféomorphisme de $(\{0\} \times \mathcal{A}_i) \cap \{|f| = \eta\} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Ceci permet de définir la *monodromie relative* de f en 0 par rapport à $z_0 = 0$. Si F est la fibre

de Milnor de f en 0 et si F' est la fibre de Milnor de la restriction de f à $z_0=0$ en 0, alors la monodromie relative de f en 0 par rapport à $z_0=0$ est un automorphisme:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n &: H_n(F, F') \rightarrow H_n(F, F') \\ (\text{resp. } \tilde{h}^n &: H^n(F, F') \rightarrow H^n(F, F')) . \end{aligned}$$

On a alors:

COROLLAIRE (3.4.3): *La trace de la monodromie relative de f en 0 relativement à $z_0=0$ est nulle.*

REMARQUE (3.4.4): La première paire de Puiseux non transverse du diagramme de Cerf donne une filtration naturelle de $H_n(F, F')$. Nous pensons qu'une investigation plus poussée de la géométrie du difféomorphisme caractéristique que nous avons construit devrait donner une démonstration topologique de la quasi-unipotence de la monodromie relative (cf. théorème de la monodromie). Dans le cas des singularités isolées, B. Teissier a introduit dans [11] des invariants (e_q/m_q) et démontré que les (m_j/n_j) de (3.3.2) (appelés exposants de Puiseux non transverses du diagramme de Cerf) sont égaux aux $(m_q/(e_q + m_q))$ quand l'hyperplan L est assez général. Par ailleurs quand $n=1$, M. Merle a montré que les (e_q/m_q) de [11] sont des invariants topologiques (cf. [8]). Des résultats récents de J. Briançon et J. P. Speder ont montré que ceci n'est pas le cas en général.

Bibliographie

- [1] A'Campo, N.: Le nombre de Lefschetz d'une monodromie, Ind. Mat. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., serie A, **76** (1973), 113-118.
- [2] Brown, R. F.: The Lefschetz fixed point theorem, Scott, Foresman and Co. Ed.
- [3] Cartan, H.: Séminaire, Topologie différentielle, 1961-1962, I. H. P. Publ. Math., Paris.
- [4] Dold, A.: Partitions of unity in the theory of fibration, Ann. of Math. **78** (1963), 223-255.
- [5] Hamm, H. et Lê Dũng Tráng: Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., t. **6** (1973), 317-355, Paris.
- [6] Lê Dũng Tráng: Calcul des cycles évanouissants des hypersurfaces complexes, Ann. Inst. Fourier, fasc. **4** (1973), 261-270, Grenoble.
- [7] Mather, J.: Generic projections, Ann. of Math., **98** (1973), 226-245.
- [8] Merle, M.: Thèse de 3ème cycle, Paris VII, à paraître.
- [9] Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Stud. **61**, Princeton.
- [10] Prill, D.: Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups, Duke Math. J., **34** (1967), 365-386.

- [11] Teissier, B.: Invariants polaires des hypersurfaces, à paraître.
- [12] Tiourina, C.: Déformation locale plate et semi-universelle...(en russe, traduit par l'A. M. S.) *Izv. Akad. Nauk.*, **33** (1969), 967-999.

(Reçu le 19 septembre 1974)

Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91120 Palaiseau
France

et

Department of Mathematics
Harvard University
1 Oxford Street
Cambridge, Mass. 02138
U. S. A.