Sur la théorie d'espaces d'interpolation
— les espaces de moyenne de plusieurs espaces de Banach —

par Atsushi YOSHIKAWA

(Communiqué par H. Komatsu)

Sommaire

0. Introduction
1. Préliminaires
2. Propriété d'interpolation
3. Espaces de moyenne de plusieurs espaces du type L^p.
4. Relations entre les espaces de moyenne de n espaces et ceux de $n-1$ espaces.
5. Non-équivalence de nos deux définitions
6. Espaces de moyenne relatifs aux domaines de plusieurs opérateurs non bornés commutatifs (I)
7. Espaces de moyenne relatifs aux domaines de plusieurs opérateurs (II) Propriété d'immersion
8. Espaces de moyenne relatifs aux domaines de plusieurs opérateurs (III) Propriété de trace
9. Quelques exemples
Bibliographie.

0. Introduction.

0.1. Nous allons généraliser la notion d'espaces de moyenne au cas de plusieurs espaces de Banach. Cette généralisation se fera par une analogie des définitions au cas de deux espaces, et nous étudierons de certaines propriétés de ces espaces généralisés. Dans l'article [3] paru dans la Publication Mathématique de l'I.H.E.S., MM. Lions et Peetre ont introduit une notion d'espaces de moyenne pour deux espaces de Banach E_0 et E_1 contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé et munis des injections continues. Plus précisément, ils ont defini un espace $S(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ pour $1 \leqq p_0, p_1 \leqq \infty$, ξ_0, ξ_1 réels avec $\xi_0\xi_1 < 0$. Rappelons la définition de cet espace. $S(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ est l'espace de tous les éléments $a \in E_0 + E_1$ tels que

$$a = \int_R u(x)dx \tag{0.1}$$

où $u(x)$ est une fonction définie sur l'espace euclidien R^1 de dimension 1 à

valeurs dans $E_0 \cap E_1$, fortement mesurable, et telle que

$$e^{\xi_i x} \| u(x) \|_{E_i} \in L^{p_i}(R) , \qquad i=0, 1 . \tag{0.2}$$

L'espace $S(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ est un espace de Banach pour la norme

$$a \longrightarrow \inf \{ \| e^{\xi_0 x} \| u(x) \|_{E_0} \|_{L^{p_0}(R)}, \| e^{\xi_1 x} \| u(x) \|_{E_1} \|_{L^{p_1}(R)} \} \tag{0.3}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les fonctions $u(x)$ telles que l'on ait les conditions (0.1) et (0.2).

Notons que l'intégrale (0.1) a un sens grâce aux conditions (0.2) au fait $\xi_0 \xi_1 < 0$. En effet, posons

$$G_0 = \{x \in R^1; (\xi_1 - \xi_0) x \geqq 0\} ,$$

$$G_1 = \{x \in R^1; (\xi_0 - \xi_1) x \geqq 0\} .$$

G_0 et G_1 donnent une division de l'espace R^1 et nous pouvons lui faire correspondre deux espaces E_0 et E_1. C'est à dire,

$$\left\| \int_{R^1} u(x) dx \right\|_{E_0 + E_1} \leqq \int_{R^1} \| u(x) \|_{E_0 + E_1} dx$$

$$\leqq \text{const.} \left\{ \int_{-G_0} \| u(x) \|_{E_0} dx + \int_{-G_1} \| u(x) \|_{E_1} dx \right\} .$$

Comme $\xi_i x \leqq 0$ pour $x \in G_i$, $i=0, 1$, ce dernier membre est fini d'après l'inégalité de Hölder et les conditions (0.2).

Par un procédé analogue, si l'on est donné $n+1$ espaces de Banach $E_0, \cdots, E_n$ contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé et munis des injections continues, et si l'on peut faire correspondre à ces $n+1$ espaces de Banach une division à $n+1$ de l'espace euclidien R^n à n dimension on pourra définir un espace de moyenne de $n+1$ espaces de Banach. C'est ce que nous allons faire. Pour cela, soient $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n \in R^n$ qui satisfont une certaine condition que nous préciserons dans la section 1 (l'hypothèse sur ξ (1.3)). Posons

$$G_j = \{x \in R^n; (\xi_k - \xi_j)(x) \geqq 0, k \neq j, k=0, \cdots, n\} , \qquad j=0, \cdots, n ,$$

où

$$\xi(x) = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$$

pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in R^n$.

Alors les G_j donnent une division de l'espace R^n, $\xi_j(x) \leqq 0$ pour $x \in G_j$, et l'intégrale

$$\int_{R^n} u(x)dx \tag{0.4}$$

a un sens pour toutes les fonctions $u(x)$, définies sur R^n à valeurs dans $E_0 \cap E_1 \cap \cdots \cap E_n$, fortement mesurables, et telles que l'on ait, pour $j=0, 1, \cdots, n$,

$$e^{\xi_j(x)} \| u(x) \|_{E_j} \in L^{p_j}(R^n) , \qquad 1 \leqq p_j \leqq \infty . \tag{0.5}$$

Ainsi pouvons-nous définir un espace de moyenne de $n+1$ espaces de Banach $E_0, \cdots, E_1$ comme l'espace de tous les éléments $a \in E_0 + \cdots + E_1$ tels que

$$a = \int_{R^n} u(x)dx \tag{0.4'}$$

pour une fonctions $u(x)$ avec (0.5). Nous le désignons par $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ où $\vec{p} = (p_0, \cdots, p_n)$, $\vec{\xi} = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ et $\vec{E} = (E_0, \cdots, E_n)$. Nous pouvons le munir d'une norme qui en fait un espace de Banach d'une façon analogue au cas $n=1$ (Définition 1.2).

0.2. D'autre part, MM. Lions et Peetre ont introduit un autre espace de moyenne $\underline{S}(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ pour deux espaces de Banach E_0 et E_1 (E_i, p_i, ξ_i, $i=0, 1$, étant comme dans le numéro précédent). Cet espace est l'espace de tous les éléments $a \in E_0 + E_1$ tels qu'il existe deux fonctions $v_0(x)$ et $v_1(x)$ définies sur R^1 à valeurs respectivement dans E_0 et E_1, fortement mesurables, et que l'on ait

$$a = v_0(x) + v_1(x) \quad \text{presque partout dans } R^1 \tag{0.6}$$

avec

$$e^{\xi_j x} \| v_j(x) \|_{E_j} \in L^{p_j}(R^1) , \qquad j=0, 1 . \tag{0.7}$$

L'espace $\underline{S}(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ est un espace de Banach pour la norme

$$a \longrightarrow \inf \{ \| e^{\xi_0 x} \| v_0(x) \|_{E_0} \|_{L^{p_0}(R^1)}, \| e^{\xi_1 x} \| v_1(x) \|_{E_1} \|_{L^{p_1}(R^1)} \} , \tag{0.8}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les fonctions $v_0(x)$ et $v_1(x)$ telles que les conditions (0.6) et (0.7) aient lieu.

Nous pouvons généraliser cette définition au cas de $n+1$ espaces de Banach $E_0, \cdots, E_n$, et nous obtenons l'espace $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ (Définition 1.3). MM. Lions et Peetre ont montré que les espaces $S(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ et $\underline{S}(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ coïncident. Mais lorsque $n \geqq 2$, cela n'a pas lieu en général. Nous donnerons un contre-exemple dans la section 5. Pour le moment, nous ne connaissons pas de conditions pour que ces deux espaces coïncident. Néanmoins dans la section 6 nous donnerons un exemple où ces deux espaces se réduisent à un même espace.

0.3. Parmi les propriétés de l'espace de moyenne de MM. Lions et Peetre, il y a donc les propriétés généralisables et celles non-généralisables. Nous énumérons un peu de propriétés des espaces de moyenne de $n+1$ espaces de Banach. D'abord nous avons

$$E_0 \cap \cdots \cap E_1 \subset S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset \underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset E_0 + \cdots + E_1 \tag{0.9}$$

avec toutes les injections continues. Nous avons aussi, topologiquement et algébriquement,

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset S(\vec{q}; \vec{\xi}; \vec{E}) \tag{0.10}$$

et

$$\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset \underline{S}(\vec{q}; \vec{\xi}; \vec{E}) \tag{0.10'}$$

pour $\vec{p}=(p_0, \cdots, p_n)$, $\vec{q}=(q_0, \cdots, q_n)$, $p_i \leqq q_i$, $i=0, \cdots, n$. Aussi pouvons-nous généraliser la propriété d'interpolation: supposons que l'on soit donné $2n+2$ espaces de Banach $E_0, \cdots, E_n, F_0, \cdots, F_n$, avec $E_i \subset \mathscr{E}$, $F_i \subset \mathscr{F}$, $i=0, \cdots, n$, topologiquement et algébriquement, pour deux espaces vectoriels topologiques séparés $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Si une application linéaire L de l'espace $\mathscr{E}$ dans l'espace $\mathscr{F}$ est une application linéaire continue de l'espace E_i dans l'espace F_i pour chaque $i=0, \cdots, n$, L l'est aussi de l'espace $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ dans l'espace $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F})$ et de l'espace $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ dans l'espace $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F})$ (Propositions 2.2 et 2.4).

Les propriétés ci-dessus seront étudiées dans les sections 1 et 2.

0.4. Dans la section 3, nous donnerons explicitement les espaces $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ et $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ lorsque $E_i = L^{p_i}_{\varphi_i}(F_i)$, $i=0, \cdots, n$, c'est-à-dire, quand l'espace E_i est l'espace de toutes les fonctions $u(x)$ définies sur l'espace euclidien R^n à valeurs dans l'espace de Banach F_i, fortement mesurables, et telles que l'on ait

$$\left\{\int_{R^n} \| u(x) \|^{p_i}_{F_i} \varphi_i(x)^{p_i} dx\right\}^{1/p_i} < \infty, \ 1 \leqq p_i \leqq \infty ,$$

où $\varphi_i(x)$ est une fonction positive et mesurable sur R^n. Alors nous avons

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = L^p_\varphi(S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F}))$$
$$\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = L^p_\varphi(\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F}))$$

pour un choix convenable de p et φ.

En utilisant ceci nous pourrons étudier, dans la section 4, la relation entre les espaces de moyenne de $n+1$ espaces et ceux de n espaces de Banach. En particulier, si les espaces $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ et $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ coïncident, nous verrons que l'espace de moyenne $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ de $n+1$ espaces est obtenu comme l'espace de

moyenne de deux espaces qui sont respectivement les espaces de moyenne de n espaces (Propositions 4.1-4.3).

Nous verrons aussi que, si $n+1$ espaces de Banach sont en fait n espaces distincts, par exemple, si $E_0=E_1$, alors les espaces de moyenne $S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$ et $\underline{S}(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$ se réduisent aux espaces de moyenne correspondants de n espaces de Banach $E_0, E_2, \cdots, E_n$ (Propositions 4.4 et 4.5). Comme une application de cette propriété nous donnerons une démonstration du théorème de réitération de MM. Lions et Peetre pour quelques cas particuliers (Propositions 4.7 et 4.8).

0.5. Dans la section 6, nous calculerons les espaces $S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$ et $\underline{S}(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$ lorsque E_0 est un espace de Banach E et que E_i, $i=1, \cdots, n$, sont respectivement les domaines de n opérateurs A_i, $i=1, \cdots, n$, non-bornés dans l'espace E. Plus précisément, si $-A_i$, $i=1, \cdots, n$, sont respectivement "presque" les générateurs infinitésimaux de n semigroupes permutables fortement continus d'opérateurs bornés dans l'espace E, les espaces $S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$ et $\underline{S}(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$ coïncident ainsi que lorsque E_i, $i=1, \cdots, n$, sont respectivement les domaines des puissances des opérateurs A_i. Dans ce cas, nous pouvons nous ramener en certain sens au cas $n=1$. Par conséquent, en employant les résultats obtenus par MM. Lions et Peetre, Grisvard, Komatsu, etc., nous pouvons déduire de nombreuses propriétés de cet espace. Par exemple, dans la section 7, nous traiterons la propriété d'immersion, et dans la section 8, nous signalerons une espèce de théorèmes de trace. Dans la dernière section, section 9, nous signalerons comment on peut formuler des problèmes dans le cadre de l'espace introduit dans la section 6.

1. Préliminaires.

1.1. Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$, $\xi_j=(\xi_{j1}, \cdots, \xi_{jn})$, $j=0, \cdots, n$. Nous emploierons souvent l'abréviation $\vec{\xi}=(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ pour simplifier l'écriture. Posons, pour $k=0, \cdots, n$,

$$G_k(\xi_0, \cdots, \xi_n)=G_k(\vec{\xi})=\{x \in R^n; (\xi_k-\xi_j)(x) \geqq 0, j=0, \cdots, n, j \neq k\} .$$

Nous écrirons simplement G_k au lieu de $G_k(\vec{\xi})$ si les ξ_j sont fixés et entendus.

Les G_k forment une division de l'espace euclidien R^n, c'est à dire que nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 1.1.

$$\bigcup_{k=0}^{n} G_k=R^n .$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in R^n$. Il suffit de considérer le cas où tous les $\xi_j(x)$

sont distincts. Soit k l'indice qui correspond au maximum des $\xi_j(x)$. Alors $x \in G_k$, a fortiori,

$$x \in \bigcup_{k=0}^{n} G_k .$$

L'inclusion en sens inverse étant claire, la proposition est démontrée.

Nous désignons, pour $j=0, \cdots, n$,

$$\Delta_j(\xi_0, \cdots, \xi_n) = \Delta_j(\vec{\xi}) = (-1)^{n+j} \begin{vmatrix} \xi_{01} & \cdots & \xi_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix} \text{ (exclure la } (j+1)\text{-ième ligne)}$$

et

$$\Delta(\xi_0, \cdots, \xi_n) = \Delta(\vec{\xi}) = \begin{vmatrix} \xi_{01} & \cdots & \xi_{0n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} & 1 \end{vmatrix} .$$

Notons que

$$\sum_{j=0}^{n} \Delta_j(\vec{\xi}) = \Delta(\vec{\xi}) . \tag{1.1}$$

Nous écrirons Δ_j ou Δ au lieu de $\Delta_j(\vec{\xi})$ ou $\Delta(\vec{\xi})$ si les ξ_j considérés sont fixés et entendus. Nous supposons, dans la suite, que $\vec{\Delta}(\xi)$ soit distinct de zéro.

Nous montrons que les quantités $\Delta_j(\vec{\xi})/\Delta(\vec{\xi})$ sont invariantes par une transformation linéaire des coordonnés dans R^n si les $\Delta_j(\vec{\xi}) \neq 0$.

PROPOSITION 1.2. *Soient $\eta_0, \cdots, \eta_n \in R^n$. Pour qu'il existe un nombre réel $c \neq 0$ tel qu'on ait*

$$\Delta_j(\xi_0, \cdots, \xi_n) = c\Delta_j(\eta_0, \cdots, \eta_n) \neq 0 \qquad \textit{pour tout } j=0, \cdots, n , \tag{1.2}$$

il faut et il suffit qu'il existe une matrice

$$A \in GL(n, R)$$

telle que

$$\text{dét } A = c$$

et que

$$\xi_j = A\eta_j\,, \qquad \textit{pour tout } j=0, \cdots, n\,.$$

DÉMONSTRATION. La suffisance étant claire, nous allons démontrer la nécessité par récurrence sur n.

Le cas $n=1$ est évident. Dans le cas général, choisissons deux matrices A_1 et $B_1 \in GL(n, R)$ telles que

$$(1, 0, \cdots, 0) = A_1\xi_0 = B_1\eta_0\,.$$

Posons, pour $j=0, \cdots, n$,

$$\bar{\xi}_j = A_1\xi_j, \text{ et } \bar{\eta}_j = B_1\eta_j\,.$$

D'après la relation (1.2), nous avons, pour $j=1, \cdots, n$,

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \bar{\xi}_{12} & \cdots & \bar{\xi}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\xi}_{n2} & \cdots & \bar{\xi}_{nn} \end{vmatrix} \text{(exclure la } j\text{-ième ligne)} \\
&= c \text{ dét } A_1/\text{dét } B_1 \begin{vmatrix} \bar{\eta}_{12} & \cdots & \bar{\eta}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\eta}_{n2} & \cdots & \bar{\eta}_{nn} \end{vmatrix} \text{(exclure la } j\text{-ième ligne)} \\
&\neq 0\,.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice $A_2 \in GL(n-1, R)$ telle que

$$\text{dét } A_2 = c \text{ dét } A_1/\text{dét } B_1\,,$$

$$\bar{\xi}'_k = A_2\bar{\eta}'_k\,, \qquad k=1, \cdots, n\,,$$

où

$$\bar{\xi}'_k = (\bar{\xi}_{k2}, \cdots, \bar{\xi}_{kn}), \text{ et } \bar{\eta}'_k = (\bar{\eta}_{k2}, \cdots, \bar{\eta}_{kn})\,.$$

Posons

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A_2^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \in GL(n, R)\,.$$

Comme

$$\begin{vmatrix} \bar{\xi}_{11} & \bar{\eta}_{12} & \cdots & \bar{\eta}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\xi}_{n1} & \bar{\eta}_{n2} & \cdots & \bar{\eta}_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta_0(A_3\bar{\xi}_0, \cdots, A_3\bar{\xi}_n)$$

$$= (-1)^n \text{ dét } A_3 \Delta_0(\bar{\xi}_0, \cdots, \bar{\xi}_n)$$

$$= (-1)^n \text{ dét } A_3 \text{ dét } A_1 \Delta_0(\xi_0, \cdots, \xi_n)$$

$$= (-1)^n c \text{ dét } A_3 \text{ dét } A_1 \Delta_0(\eta_0, \cdots, \eta_n)$$

$$= (-1)^n c \text{ dét } A_3 \text{ dét } A_1 / \text{dét } B_1 \Delta_0(\bar{\eta}_0, \cdots, \bar{\eta}_n)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{\eta}_{11} & \cdots & \bar{\eta}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\eta}_{n1} & \cdots & \bar{\eta}_{nn} \end{vmatrix},$$

nous pouvons écrire, en choisissant convenablement a_j, $j=2, \cdots, n$,

$$\bar{\xi}_{k1} = \bar{\eta}_{k1} + \sum_{j=2}^{n} a_j \bar{\eta}_{kj}, \qquad k=1, \cdots, n.$$

Donc, en posant

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \cdots a_n \\ 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{pmatrix},$$

nous trouvons que la matrice

$$A = A_1^{-1} A_4 B_1$$

a toute la propriété cherchée. c. q. f. d.

L'HYPOTHÈSE SUR ξ. *Pour* $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$, *nous supposons, dans la suite, que les relations*

$$w_j = \Delta_j(\xi_0, \cdots, \xi_n)/\Delta(\xi_0, \cdots, \xi_n) > 0 \tag{1.3}$$

aient lieu pour $j=0, \cdots, n$.

Pour définir un espace de moyenne d'une famille finie d'espaces de Banach, nous avons besoin de la

PROPOSITION 1.3. *Sous l'hypothèse faite sur* ξ, *nous avons, pour tout* p, $1 \leq p \leq \infty$,

$$\left[\int_{G_k} e^{-p\sum_{j=1}^{n} \xi_{kj} x_j} dx_1 \cdots dx_n\right]^{1/p} < \infty, \qquad k=0, \cdots, n. \tag{1.4}$$

Pour $p=\infty$, nous interprétons (1.4) *comme le vrai maximum.*

DÉMONSTRATION. Pour simplifier l'écriture, posons, pour $i=0, \cdots, n$, $j=1, \cdots, n$,

$$\xi_{ij}^{(k)}=\begin{cases}\xi_{k+i,j} & \text{pour } k+i\leqq n\,,\\ \xi_{k+i-n-1,j} & \text{pour } k+i>n\,,\end{cases}$$

et

$$\Delta^{(k)}=\Delta(\xi_0^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})\,.$$

Nous désignons les cofacteurs de ce dernier par $\delta_{ir}^{(k)}$, $i=0, \cdots, n$, $r=1, \cdots, n+1$, $k=0, \cdots, n$. Nous avons

$$\delta_{in+1}^{(k)}=\Delta_i^{(k)}=\Delta_i(\xi_0^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})=w_i^{(k)}\Delta^{(k)}\,.$$

Comme

$$\Delta^{(k)}=(-1)^{k(n+1-k)}\Delta\,,$$

et comme

$$\Delta_i^{(k)}=\begin{cases}(-1)^{k(n+1-k)}\Delta_{k+i-n-1} & \text{pour } k+i>n\,,\\ (-1)^{k(n+1-k)}\Delta_{k+i} & \text{pour } k+i\leqq n\end{cases}$$

d'après les propriétés élémentaires de déterminants, nous avons

$$w_i^{(k)}=\begin{cases}w_{k+i-n-1}\,, & k+i>n\\ w_{k+i}\,, & k+i\leqq n\end{cases}>0\,.$$

Soit la transformation des coordonnés:

$$X_j^{(k)}=\sum_{r=1}^{n}(\xi_{0r}^{(k)}-\xi_{jr}^{(k)})x_r\,,\qquad j=1, \cdots, n\,.$$

Alors nous avons

$$\frac{D(X_1^{(k)}, \cdots, X_n^{(k)})}{D(x_1, \cdots, x_n)}=\begin{vmatrix}\xi_{01}^{(k)}-\xi_{11}^{(k)} & \cdots & \xi_{0n}^{(k)}-\xi_{1n}^{(k)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_{01}^{(k)}-\xi_{n1}^{(k)} & \cdots & \xi_{0n}^{(k)}-\xi_{nn}^{(k)}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\xi_{01}^{(k)} & \cdots & \xi_{0n}^{(k)} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_{n1}^{(k)} & \cdots & \xi_{nn}^{(k)} & 1\end{vmatrix}=\Delta^{(k)}\neq 0\,.$$

Comme, nous avons, en désignant par $D_{rj}^{(k)}$, j, $r=1, \cdots, n$, les cofacteurs de

$D(X_1^{(k)}, \cdots, X_n^{(k)})/D(x_1, \cdots, x_n)$,

$$D_{rj}^{(k)}=(-1)^{j+r}\begin{vmatrix} \xi_{01}^{(k)}-\xi_{11}^{(k)} & \cdots & \xi_{0n}^{(k)}-\xi_{1n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{01}^{(k)}-\xi_{n1}^{(k)} & \cdots & \xi_{0n}^{(k)}-\xi_{nn}^{(k)} \end{vmatrix} \quad \text{(exclure la } j\text{-ième colonne et } r\text{-ième ligne)}$$

$$=(-1)^{j+r}\begin{vmatrix} \xi_{01}^{(k)} & \cdots & \xi_{0n}^{(k)} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1}^{(k)} & \cdots & \xi_{nn}^{(k)} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(exclure la } j\text{-ième colonne et la } (r+1)\text{-ième ligne)}$$

$$=-\delta_{rj}^{(k)},$$

il s'ensuit que

$$x_j=\Delta^{(k)-1}\sum_{r=1}^{n} D_{rj}^{(k)} X_r^{(k)}$$

$$=-\Delta^{(k)-1}\sum_{r=1}^{n} \delta_{rj}^{(k)} X_r^{(k)}, \qquad j=1, \cdots, n,$$

d'où nous avons

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{kj}x_j=\sum_{r=1}^{n}\left(-\Delta^{(k)-1}\sum_{j=1}^{n}\delta_{rj}^{(k)}\xi_{kj}\right)X_r^{(k)}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\left\{-\Delta^{(k)-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_{rj}^{(k)}\xi_{0j}^{(k)}+\delta_{rn+1}^{(k)}\right)+\delta_{rn+1}^{(k)}\Delta^{(k)-1}\right\}X_r^{(k)}=\sum_{r=1}^{n} w_r^{(k)}X_r^{(k)}.$$

Par conséquent,

$$\left[\int_{G_k} e^{-p\sum_{j=1}^{n}\xi_{kj}x_j}dx\right]^{1/p}$$

$$=|\Delta|^{-1/p}\left[\int\cdots\int_{X_1^{(k)}\geqq 0\cdots X_n^{(k)}\geqq 0} e^{-p\sum_{r=1}^{n} w_r^{(k)}X_r^{(k)}}dX_1^{(k)}\cdots\right]^{1/p}$$

$$=|\Delta|^{-1/p}\left[\int_0^\infty e^{-pw_1^{(k)}X_1^{(k)}}dX_1^{(k)}\right]^{1/p}\cdots\left[\int_0^\infty e^{-pw_n^{(k)}X_n^{(k)}}dX_n^{(k)}\right]^{1/p}<\infty. \text{ c. q. f. d.}$$

1.2. Maintenant nous pouvons définir l'espace de moyenne d'une famille finie d'espaces de Banach. Nous commençons par la définition suivante.

DÉFINITION 1.1. *Soient* $\xi\in R^n$ *et* $p\in[1,\infty]$. *Nous désignons par* $L^{p,\xi}(E)$ *l'espace de fonctions* u *définies sur* R^n *à valeurs dans un espace de Banach* E, *fortement mesurables telles que*

$$\|e^{\xi(x)}\|\,\|u(x)\|_E\,\|_{L^p(R^n)}<\infty. \tag{1.5}$$

Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ satisfaisant l'hypothèse sur ξ. Soient $p_0, \cdots, p_n \in [1, \infty]$. Nous avons la proposition fondamentale:

PROPOSITION 1.4. *Si E_j, $j=0, \cdots, n$, sont $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathscr{E}$, alors l'application:*

$$\bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j, \xi_j}(E_j) \ni u(x) \to \int_{R^n} u(x)dx \in E_0 + \cdots + E_n \tag{1.6}$$

est linéaire continue. L'intégrale à droite est celle de Bochner.

DÉMONSTRATION. D'abord, comme u est fortement mesurable dans tous les espaces E_j, il est évident que u l'est aussi à valeurs dans l'espace $E_0 + \cdots + E_n$. Ceci dit, nous avons l'estimation suivante:

$$\int_{R^n} \| u \|_{E_0+\cdots+E_n} dx = \sum_{j=0}^{n} \int_{G_j} \| u \|_{E_0+\cdots+E_n} dx \leqq \text{const.} \sum_{j=0}^{n} \int_{G_j} \| u \|_{E_j} dx .$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder et la proposition 1.3, nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{G_j} \| u \|_{E_j} dx &= \int_{G_j} e^{-\xi_j(x)} e^{\xi_j(x)} \| u \|_{E_j} dx \\ &\leqq \left[\int_{G_j} e^{-\xi_j(x) p_j'} dx \right]^{1/p_j'} \left[\int_{G_j} e^{\xi_j(x) p_j} \| u \|_{E_j}^{p_j} dx \right]^{1/p_j} < \infty , \end{aligned}$$

où $p_j' = p_j/(p_j - 1)$. Donc,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{R^n} u dx \right\|_{E_0+\cdots+E_n} &\leqq \int_{R^n} \| u \|_{E_0+\cdots+E_n} dx \\ &\leqq \text{const.} \sum_{j=0}^{n} \left[\int_{G_j} e^{-\xi_j(x) p_j'} dx \right]^{1/p_j'} \left[\int_{G_j} e^{\xi_j(x) p_j} \| u \|_{E_j}^{p_j} dx \right]^{1/p_j} , \end{aligned}$$

ce qui démontre cette proposition.

DÉFINITION 1.2. *Nous désignons par $S(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; E_0, \cdots, E_n)$ l'espace d'images de l'application* (1.6), *muni de la topologie la plus fine qui rende l'application* (1.6) *continue. Nous l'écrivons très souvent $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ pour simplifier l'écriture.*

De cette définition, nous voyons que pour $a \in S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ il existe une fonction

$$u \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j, \xi_j}(E_j) \tag{1.7}$$

telle que

$$a = \int_{R^n} u(x)dx . \tag{1.8}$$

L'espace $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|a\|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} = \inf \max_{0 \leq j \leq n} \|u\|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)}, \tag{1.9}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les u satisfaisant (1.7) et (1.8).

REMARQUE 1.1. Le cas $n=1$ a été traité par MM. Lions et Peetre [3], c'est-à-dire,

$$S(p_0, p_1; \xi_0, \xi_1; E_0, E_1) = S(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1),$$

le deuxième membre étant le notation de MM. Lions et Peetre. Cet espace est aussi désigné de plusieurs façons, notamment $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ où $\theta = \xi_0/(\xi_0 - \xi_1)$ et $p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ grâce à un théorème de M. Peetre, cf. [4], [5]. Des propositions 1.2, 1.3, 1.4, et de la définition 1.2, nous avons les propositions suivantes faciles à voir.

PROPOSITION 1.5. *Soient* $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ *et* $\eta_0, \cdots, \eta_n \in R^n$. *Supposons que la relation* (1.2) *ait lieu. Alors nous avons*

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = S(\vec{p}; \vec{\eta}; \vec{E}).$$

Par exemple, en posant

$$\begin{aligned} W_0 &= (w_1, w_2, \cdots, w_n), \\ W_1 &= (w_1 - 1, w_2, \cdots, w_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_n &= (w_1, \cdots, w_{n-1}, w_n - 1), \end{aligned}$$

nous voyons que

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = S(\vec{p}; \vec{W}; \vec{E}).$$

PROPOSITION 1.6. *Soit* π *une permutation de* $(0, \cdots, n)$. *Posons*

$$\pi\vec{p} = (p_{\pi(0)}, \cdots, p_{\pi(n)}),$$
$$\pi\vec{\xi} = (\xi_{\pi(0)}, \cdots, \xi_{\pi(n)}),$$

et

$$\pi\vec{E} = (E_{\pi(0)}, \cdots, E_{\pi(n)}).$$

Alors nous avons

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = S(\pi\vec{p}; \pi\vec{\xi}; \pi\vec{E}).$$

1.3. Nous introduisons la deuxième définition de l'espace de moyenne qui correspond à l'espace $S(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ de MM. Lions et Peetre. Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ satisfaisant l'hypothèse sur ξ. Soient $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé avec les injections continues.

DÉFINITION 1.3. *Nous désignons par* $S(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; E_0, \cdots, E_n)$ *l'espace de tous les éléments* $a \in E_0 + \cdots + E_n$, *pour lequel il existe des fonctions* $v_j \in L^{p_j, \xi_j}(E_j)$ *telles que l'on ait*

$$a = \sum_{j=0}^{n} v_j(x) \tag{1.10}$$

presque partout dans R^n.

Nous munirons cet espace de la norme suivante:

$$\| a \|_{S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})} = \inf \max_{0 \leq j \leq n} \| v_j \|_{L^{p_j, \xi_j}(E_j)} \tag{1.11}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les fonctions $v_j \in L^{p_j, \xi_j}(E_j)$ qui donnent la relation (1.10). Nous pouvons munir cet espace de la norme suivante qui est équivalente à celle donnée par (1.11):

$$\| a \|_{\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})} = \inf \sum_{j=0}^{n} \| v_j \|_{L^{p_j, \xi_j}(E_j)} \tag{1.11'}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les fonctions v_j avec (1.10). Il est évident que l'espace $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ ainsi défini est un espace de Banach pour la norme (1.11).

REMARQUE 1.2. Le cas $n=1$ a été traité par MM. Lions et Peetre [3];

$$S(p_0, p_1; \xi_0, \xi_1; E_0, E_1) = S(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1) ,$$

le deuxième membre étant la notation de MM. Lions et Peetre.

Nous avons les propositions analogues aux propositions 1.5 et 1.6 pour l'espace $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$:

PROPOSITION 1.7. *Soient* $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ *et* $\eta_0, \cdots, \eta_n \in R^n$. *Supposons que la relation* (1.2) *ait lieu. Alors nous avons*

$$\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = \underline{S}(\vec{p}; \vec{\eta}; \vec{E}) .$$

PROPOSITION 1.8. *Soit* π *une permutation de* $(0, \cdots, n)$. *Alors nous avons*

$$\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = \underline{S}(\pi\vec{p}; \pi\vec{\xi}; \pi\vec{E}) .$$

Nous avons aussi la proposition suivante.

PROPOSITION 1.9. *Nous ne changeons pas l'espace* $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ *(resp.* $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$*) si nous supposons que* u *(resp.* v_j*) satisfait à*

$$D^\alpha u \in L^{p_j, \xi_j}(E_j)$$

quelque soit α, $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ *(resp.*

$$D^\alpha v_j \in L^{p_j, \xi_j}(E_j)$$

quel que soit α*).*

DÉMONSTRATION. Il suffit de remplacer u (resp. v_j) par $u^*\rho$ (resp. $v_j^*\rho$) où ρ est une fonction indéfiniment différentiable sur R^n à support compact et à valeurs scalaires, telle que $\int_{R^n} \rho(x)dx = 1$. Le signe * désigne la convolution en x.

1.4. Nous généralisons, par la méthode discrète, les définitions d'espaces de moyenne, qui correspondent aux espaces $s(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ et $\underline{s}(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1)$ de MM. Lions et Peetre [3]. Comme dans le cas considéré par MM. Lions et Peetre, nous verrons que ces définitions donnent les mêmes espaces de moyenne définis par les définitions 1.2 et 1.3, mais ces nouvelles définitions seront utiles au moins pour déduire quelques propriétés d'espaces de moyenne.

Nous commençons par la définition suivante.

DÉFINITION 1.4. *Soit* $\xi \in R^n$. *Nous désignons par* $\ell^{p,\xi}(E)$ *pour* $1 \leqq p \leqq \infty$, *et pour un espace de Banach* E, *l'espace des éléments* $u = \{u_z\}_{z \in Z^n}$ *tels que l'on ait*

$$\|u\|_{\ell^{p,\xi}(E)} = \left\{ \sum_{z \in Z^n} e^{\xi(z)p} \|u_z\|_E^p \right\}^{1/p} < \infty . \tag{1.12}$$

Cet espace $\ell^{p,\xi}(E)$ *est un espace de Banach pour la norme donnée par la formule* (1.12).

Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$. Si nous posons $G'_k = G'_k(\xi_0, \cdots, \xi_n) = G_k(\xi_0, \cdots, \xi_n) \cap Z^n$, nous voyons, d'après la proposition 1.1, que

$$\bigcup_{k=0}^{n} G'_k = Z^n . \tag{1.13}$$

Si nous supposons, en outre, que $\xi_0, \cdots, \xi_n$ satisfont à la relation (1.3), nous avons la proposition suivante d'après la proposition 1.3.

PROPOSITION 1.10. *Nous avons*

$$\left[\sum_{z \in Z^n} e^{-\xi_k(z)p} \right]^{1/p} < \infty , \qquad k = 0, \cdots, n , \tag{1.14}$$

quel que soit p, $1 \leqq p \leqq \infty$.

DÉMONSTRATION. D'après la démonstration de la proposition 1.3, nous avons

$$\sum_{z\in G_k'} e^{-\xi_k(z)p}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{Z_j^{(k)}\geqq 0} e^{-p\sum \xi_r^{(k)}Z_r^{(k)}}$$

$$\leqq\int\cdots\int_{X_1^{(k)}\geqq -1,\cdots,X_n^{(k)}\geqq -1} e^{-p\sum w_r^{(k)}X_r^{(k)}}dX_1^{(k)}\cdots dX_n^{(k)}<\infty\ ,$$

où $Z_j^{(k)}=\sum_{r=1}^{n}(\xi_{0r}^{(k)}-\xi_{jr}^{(k)})z_r$, et $w_r^{(k)}$ sont ceux de la démonstration de la proposition 1.3.

De cette proposition, nous tirons la proposition analogue à la proposition 1.4 avec la même démonstration.

PROPOSITION 1.11. *Si E_j, $j=0,\cdots,n$, sont $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathscr{E}$ algébriquement et topologiquement, alors l'application*:

$$\bigcap_{j=0}^{n}\mathscr{L}^{p_j,\xi_j}(E_j)\ni u=\{u_z\}_{z\in Z^n}\mapsto\sum_{z\in Z^n}u_z\in E_0+\cdots+E_n \tag{1.15}$$

est linéaire et continue.

Maintenant nous pouvons donner une définition d'espaces de moyenne discrète.

DÉFINITION 1.5. *Nous désignons par $s(p_0,\cdots,p_n;\xi_0,\cdots,\xi_n;E_0,\cdots,E_n)$ l'espace image de l'application* (1.15) *muni de la topologie la plus fine qui rende l'application* (1.15) *continue. Nous l'écrivons très souvent $s(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$ pour simplifier l'écriture.*

De cette définition, nous voyons que pour $a\in s(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$ il existe une suite

$$u=\{u_z\}\in\bigcap_{j=0}^{n}\mathscr{L}^{p_j,\xi_j}(E_j) \tag{1.16}$$

telle que

$$a=\sum_{z\in Z^n}u_z\ . \tag{1.17}$$

L'espace $s(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|a\|_{s(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})}=\inf\max_{0\leqq j\leqq n}\|u\|_{\mathscr{L}^{p_j,\xi_j}(E_j)}\ , \tag{1.18}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les u satisfaisant (1.16) et (1.17).

REMARQUE 1.3. Le cas $n=1$ a été traité par MM. Lions et Peetre [3], c'est-à-dire,

$$s(p_0,p_1;\xi_0,\xi_1;E_0,E_1)=s(p_0,\xi_0,E_0;p_1,\xi_1,E_1)\ ,$$

le deuxième membre étant la notation de MM. Lions et Peetre.

DÉFINITION 1.6. *Nous désignons par* $s(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; E_0, \cdots, E_n)$ *l'espace de tous les éléments* $a \in E_0 + \cdots + E_n$, *pour lesguels il existe* $n+1$ *suites* $v_j = \{v_{jz}\} \in \ell^{p_j, \xi_j}(E_j)$ *telles que l'on ait*

$$a = \sum_{j=0}^{n} v_{jz} \qquad \text{pour tout } z \in Z^n . \tag{1.19}$$

Nous écrivons cet espace très souvent $s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$. *Nous munirons cet espace de la norme suivante*:

$$\| a \|_{s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})} = \inf \max_{0 \leqq j \leqq n} \| v_j \|_{\ell^{p_j, \xi_j}(E_j)} \tag{1.20}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les suites $v_j \in \ell^{p_j, \xi_j}(E_j)$ *qui satisfont la relation* (1.19).

Nous pouvons munir cet espace de la norme suivante qui est équivalente à celle donnée par (1.20):

$$a \mapsto \inf \sum_{j=0}^{n} \| v_j \|_{\ell^{p_j, \xi_j}(E_j)} \tag{1.20'}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les suites qui donnent la relation (1.19).

Il est évident que l'espace $s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ ainsi défini est un espace de Banach pour la norme (1.20).

REMARQUE 1.4. Le cas $n=1$ a été traité par MM. Lions et Peetre [3], c'est-à-dire,

$$s(p_0, p_1; \xi_0, \xi_1; E_0, E_1) = s(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1) ,$$

le deuxième membre étant la notation de MM. Lions et Peetre. Nous avons les propositions analogues aux propositions 1.5, 1.6, 1.7 et 1.8 pour les espaces $s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ et $s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$.

1.5. Nous montrons ici que les définitions 1.2 et 1.5 et les définitions 1.3 et 1.6 donnent respectivement les mêmes espaces. Nous examinerons aussi quelques relations entre les définitions 1.2 et 1.3.

PROPOSITION 1.12. *Soient* $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ *qui satisfont l'hypothèse sur* ξ. *Soient* $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ *espaces de Banach, contenus dans un espace vectoriel topologique séparé, munis des injections continues. Nous avons*

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$$

quels que soient p_j, $1 \leqq p_j \leqq \infty$, $j = 0, \cdots, n$.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier l'écriture, nous désignons par S (resp. s) l'espace $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ (resp. $s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$).

i) Soit $a \in S$. Il existe une fonction $u \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j, \xi_j}(E_j)$ telle que $a = \int_{R^n} u(x)dx$. Posons

$$u_z = \int_{\Gamma(z)} u(x)dx \qquad \text{pour } z \in Z^n ,$$

où

$$\Gamma(z) = \{x \in R^n;\ z_j \leqq x_j \leqq z_j + 1,\ j = 1, \cdots, n\} .$$

Alors nous avons

$$u_z \in \bigcap_{j=0}^{n} \ell^{p_j, \xi_j}(E_j) .$$

En effet,

$$e^{\xi_j(z) p_j} \| u_z \|_{E_j}^{p_j} \leqq c_j^{p_j} \int_{\Gamma(z)} \| u(x) \|_{E_j}^{p_j} e^{\xi_j(x) p_j} dx ,$$

où $c_j^{p_j} = \max\{1, \exp(-p_j \sum_{\xi_{jk} < 0} \xi_{jk})\}$, ce qui entraîne que

$$\sum_{z \in Z^n} e^{\xi_j(x) p_j} \| u_z \|_{E_j}^{p_j} \leqq c_j^{p_j} \int_{R^n} e^{\xi_j(x) p_j} \| u(x) \|_{E_j}^{p_j} dx .$$

Comme

$$\sum_{z \in Z^n} u_z = \int_{R^n} u(x)dx = a ,$$

nous avons $a \in s$, et

$$\| a \|_s \leqq \max(c_0, \cdots, c_n) \| a \|_S .$$

ii) Soit $a \in s$. Il existe une suite $u_z \in \bigcap_{j=0}^{n} \ell^{p_1, \xi_1}(E_j)$ telle que $\sum_{z \in Z^n} u_z = a$. Posons

$$u(x) = u_z \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma(z) .$$

Nous avons

$$\int_{\Gamma(z)} \| u(x) \|_{E_j}^{p_j} e^{\xi_j(x) p_j} dx \leqq c_j'^{p_j} e^{\xi_j(z) p_j} \| u_z \|_{E_j}^{p_j} ,$$

où $c_j'^{p_j} = \max\{1, \exp(p_j \sum | \xi_{jk} |)\}$, donc il s'ensuit que

$$u \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j, \xi_j}(E_j) .$$

Comme

$$\int_{R^n} u(x)dx = \sum_{z \in Z^n} u_z = a ,$$

nous avons $a \in S$, et

$$\| a \|_S \leqq \max(c'_0, \cdots, c'_n) \| a \|_s .$$

PROPOSITION 1.13. *Soient* $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ *satisfaisant l'hypothèse sur* ξ. *Soient* $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ *espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé, munis des injections continues. Nous avons*

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) ,$$

quels que soient p_j, $1 \leqq p_j \leqq \infty$, $j=0, \cdots, n$.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier l'écriture, nous désignons par $\underline{S}$ (resp. $\underline{s}$) l'espace $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ (resp. $s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$).

i) Soit $a \in S$. Il existe $n+1$ fonctions $v_j \in L^{p_j, \xi_j}(E_j)$ telles que $a = \sum_{j=0}^{n} v_j(x)$ presque partout. Comme nous pouvons supposer, grâce à la proposition 1.9, que

$$D^\alpha v_j \in L^{p_j, \xi_j}(E_j), \alpha \in \gamma_0 = \Gamma(0) \cap Z^n ,$$

nous pouvons définir $v_j(z)$, $z \in Z^n$. Alors, par la méthode élémentaire, en utilisant le fait que $\int_{\Gamma(z)} 1\, dx = 1$, nous avons que

$$\| v_j(z) \|_{E_j}^{p_j} \leqq c^{p_j} \sum_{\alpha \in \gamma_0} \int_{\Gamma(z)} \| D^\alpha v_j(x) \|_{E_j}^{p_j} dx, \quad j=0, \cdots, n ,$$

avec une constante c indépendante de p_j et de z. Par cette majoration, nous avons:

$$\| e^{\xi_j(z)} v_j(z) \|_{E_j}^{p_j} \leqq c^{p_j} c_j'^{p_j} \int_{\Gamma(z)} \sum_{\alpha \in \gamma_0} \| D^\alpha v_j \|_{E_j}^{p_j} e^{\xi_j(x) p_j} dx ,$$

où $c_j'^{p_j} = \max\{1, \exp(p_j \sum |\xi_{jk}|)\}$. Donc,

$$v_j = \{v_j(z)\} \in \ell^{p_j, \xi_j}(E_j) ,$$

et

$$\| v_j \|_{\ell^{p_j, \xi_j}(E_j)} \leqq c c_j'' \sum_{\alpha \in \gamma_0} \| D^\alpha v_j \|_{L^{p_j, \xi_j}(E_j)}$$

avec une nouvelle constante c. Par conséquent,

$$a = \sum_{j=0}^{n} v_j(z) \in \underline{s} ,$$

et, en appliquant encore une fois la proposition 1.9,

$$\| a \|_{\underline{s}} \leqq \text{const.} \| a \|_{\underline{S}} .$$

ii) Soit $a \in \underline{s}$. Il existe $n+1$ suites $v_j = \{v_{jz}\} \in \ell^{p_j, \xi_j}(E_j)$ telles que $a = \sum_{j=0}^{n} v_{jz}$ pour tout $z \in Z^n$. Posons

$$v_j(x) = v_{jz} \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma(z) .$$

Alors $a = \sum_{j=0}^{n} v_j(x)$ presque partout, et comme dans la démonstration de la proposition précédente, nous voyons que $v_j \in L^{p_j, \xi_j}(E_j)$. Donc $a \in \underline{S}$.

PROPOSITION 1.14. *Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ satisfaisant l'hypothèse sur ξ. Soient $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ espaces de Banach, contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé, munis des injections continues. Alors nous avons pour tout p_j, $1 \leqq p_j \leqq \infty$, $j = 0, \cdots, n$,*

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset \underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$$

avec l'injection continue.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$. Alors il existe une fonction $u(x) \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j, \xi_j}(E_j)$ telle que $a = \int_{R^n} u(x)dx$. Posons, pour $j = 0, \cdots, n$,

$$v_j(x) = \int_{-G_j} u(x-y)dy .$$

D'après le choix de la fonction u, $a = \sum_{j=0}^{n} v_j(x) = \int_{R^n} u(x-y)dy$ presque partout. Montrons que $v_j \in L^{p_j, \xi_j}(E_j)$. Comme

$$e^{\xi_j(x)} v_j(x) = \int_{-G_j} e^{\xi_j(y)} e^{\xi_j(x-y)} u(x-y)dy ,$$

nous avons

$$\begin{aligned} e^{\xi_j(x)} \| v_j(x) \|_{E_j} &\leqq \int_{-G_j} e^{\xi_j(y)} e^{\xi_j(x-y)} \| u(x-y) \|_{E_j} dy \\ &= \int_{R^n} K_j(y) F_j(x-y) dy , \end{aligned}$$

où

$$K_j(y) = \begin{cases} e^{\xi_j(y)} & \text{pour } y \in -G_j , \\ 0 & \text{ailleurs} , \end{cases}$$

et

$$F_j(y) = e^{\xi_j(y)} \| u(y) \|_{E_j} .$$

D'après la proposition 1.3, $K_j \in L^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, et de l'hypothèse, $F_j \in L^{p_j}$. Par

conséquent, d'après l'inégalité de Young, nous avons $v_j \in L^{p_j,\xi_j}(E_j)$, et

$$\| v_j \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)} \leqq \| K_j \|_{L^1} \| u \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)} .$$

Donc $a \in S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ et

$$\| a \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} \leqq \max(\| K_0 \|_{L^1}, \cdots, \| K_n \|_{L^1}) \| a \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} .$$

REMARQUE 1.5. Dans le case $n=1$, MM. Lions et Peetre [3] ont montré que ces deux espaces coïncident:

$$S(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1) = S(p_0, \xi_0, E_0; p_1, \xi_1, E_1) .$$

Mais dans le cas général les espaces S et S sont différents. Nous donnerons un contre-exemple plus loin (section 5).

PROPOSITION 1.15. *Soient* $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ *satisfaisant l'hypothèse sur* ξ. *Soient* $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ *espaces de Banach, contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé, munis des injections continues. Alors nous avons pour* $1 \leqq p_j \leqq q_j \leqq \infty$, $j=0, \cdots, n$,

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset S(\vec{q}; \vec{\xi}; \vec{E})$$

avec l'injection continue.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$. Alors il existe une fonction $u \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j,\xi_j}(E_j)$ telle que $a = \int_{R^n} u(x)dx$. Posons $v(x) = \int \rho(x-y)u(y)dy$, où $\rho \in \mathscr{D}(R^n)$ fixée avec $\int \rho(x)dx = 1$. Alors $\int v(x)dx = a$, et nous avons, pour chaque j, $j=0, \cdots, n$,

$$\| e^{\xi_j(x)} v(x) \|_{E_j} \leqq \int_{R^n} e^{\xi_j(x-y)} \rho(x-y) \| e^{\xi_j(y)} u(y) \|_{E_j} dy .$$

Comme $e^{\xi_j(x)}\rho(x) \in L^{r_j}$, $r_j = p_j q_j/(p_j q_j + p_j - q_j) \geqq 1$, nous avons, d'après l'inégalité de Young,

$$\| v \|_{L^{q_j,\xi_j}(E_j)} \leqq \| e^{\xi_j(x)} \rho(x) \|_{L^{r_j}} \| u \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)} .$$

d'où $a \in S(\vec{q}; \vec{\xi}; \vec{E})$ et

$$\| a \|_{S(\vec{q};\vec{\xi};\vec{E})} \leqq c \| a \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})}$$

où c est une constante indépendante de a.

De façon analogue, nous avons la

PROPOSITION 1.16. *Sous les hypothèses de la proposition* 1.15, *nous avons*

$$\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset \underline{S}(\vec{q}; \vec{\xi}; \vec{E})$$

avec l'injection continue.

Nous signalons aussi les résultats suivants.

PROPOSITION 1.17. *Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ satisfaisant l'hypothèse sur ξ. Nous nous donnons $2n+2$ espaces de Banach $E_0, \cdots, E_n, F_0, \cdots, F_n$, contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé, munis des injections continues. Si $E_j \subset F_j$ avec l'injection continue pour chaque j, $j=0, \cdots, n$, alors nous avons, pour $1 \leqq p_j \leqq \infty$, $j=0, \cdots, n$*

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F})$$

avec l'injection continue.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$. Alors il existe $u \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j, \xi_j}(E_j)$ telle que

$$a = \int_{R^n} u(x) dx \,. \tag{1.21}$$

D'après les hypothèses, avec une constante positive C indépendante de u, on a:

$$\| u(x) \|_{F_j} \leqq C \| u(x) \|_{E_j} \,, \qquad j=0, \cdots, n \,, \tag{1.22}$$

d'où

$$u \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j, \xi_j}(F_j) \,,$$

et

$$b = \int_{R^n} u(x) dx \in S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F}) \,.$$

d'après (1.21) et (1.22), $a=b$, et

$$\| a \|_{S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F})} \leqq C \| a \|_{S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})} \,.$$

De façon analogue, nous avons la

PROPOSITION 1.18. *Sous les hypothèses de la proposition 1.17, nous avons*

$$S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset \underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F})$$

avec l'injection continue.

PROPOSITION 1.19. *Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ satisfaisant l'hypothèse sur ξ. Soient $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé, munis des injections continues. Alors nous avons, pour $1 \leqq p_j \leqq \infty$, $j=0, \cdots, n$,*

$$E_0 \cap \cdots \cap E_n \subset S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset \underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset E_0 + \cdots + E_n$$

avec toutes les injections continues. En particulier, si tout $p_j<\infty$, *alors*

(1.23) $\qquad E_0\cap\cdots\cap E_n$ *est dense dans l'espace* $S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$.

DÉMONSTRATION. D'après les définitions 1.2 et 1.3, et d'après la proposition 1.14, il suffit de démontrer que:

$$E_0\cap\cdots\cap E_n\subset S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E}),$$

l'injection étant continue. En effet, soit $a\in E_0\cap\cdots\cap E_n$, et soit $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$ telle que $\int\varphi(x)dx=1$. Posons $u(x)=\varphi(x)a$. Alors

$$u(x)\in\bigcap_{j=0}^{n}L^{p_j,\xi_j}(E_j),$$

$$a=\int u(x)dx,$$

et

$$\|a\|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})}\leqq\max_{0\leqq j\leqq n}\|e^{\xi_j(x)}\varphi(x)\|_{L^{p_j}}\|a\|_{E_0\cap\cdots\cap E_n}.$$

Montrons (1.23). Soit $a\in S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$. Alors il existe $u\in\cap L^{p_j,\xi_j}(E_j)$ telle que $a=\int_{R^n}u(x)dx$. Posons, pour $N>0$,

$$u_N(x)=\begin{cases}u(x), & |x|<N,\\ 0, & |x|>N.\end{cases}$$

Il est évident que $u_N\in\bigcap_{j=0}^{n}L^{p_j,\xi_j}(E_j)$ et $a_N=\int u_N(x)dx\in E_0\cap\cdots\cap E_n$. Mais nous avons: $1\leqq p_j<\infty$, $j=0,\cdots,n$,

$$\|a-a_N\|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})}\leqq\max_{0\leqq j\leqq n}\{\|e^{\xi_j(x)}(u(x)-u_N(x))\|_{L^{p_j}(E_j)}\}\to 0,$$

lorsque $N\to\infty$, ce qui démontre (1.23).

2. Propriété d'interpolation.

Nous donnons tout d'abord la propriété d'interpolation des espaces de moyenne qui est une généralisation de celle traitée par MM. Lions et Peetre [3] dans le cas $n=1$. Commençons par la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. *Pour tout* $a\in S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})$, *nous avons*

(2.1) $$\|a\|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})}=\inf\prod_{j=0}^{n}\{\|u\|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)}\}^{w_j},\qquad w_j=\Delta_j(\vec{\xi})/\Delta(\vec{\xi}),$$

où l'infinimum au membre droit est pris sur toutes les $u \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j,\xi_j}(E_j)$ *telles que* $a=\int_{R^n} u(x)dx$.

DÉMONSTRATION. Désignons par B le terme au membre droit dans la formule (2.1). Par définition,

$$\| a \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} = \inf \max_{0 \leqq j \leqq n} \| u \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)} ,$$

il s'ensuit immédiatement que

$$\| a \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} \geqq B .$$

Nous allons montrer l'inégalité en sens inverse. En utilisant le fait que

$$a=\int_{R^n} u(x)dx=\int_{R^n} u(x+y)dx , \qquad y \in R^n ,$$

nous avons

$$\| a \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} \leqq \max_{0 \leqq j \leqq n} e^{-\xi_j(y)} \| u \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)} .$$

Montrons que

$$\inf_{y \in R^n} \max_{0 \leqq j \leqq n} e^{-\xi_j(y)} \| u \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)} = \prod_{j=0}^{n} \{\| u \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)}\}^{w_j} \tag{2.2}$$

d'où suivra l'inégalité cherchée.

Nous allons démontrer l'égalité (2.2) par la récurrence sur n. Avant de commencer, nous désignons $C_j=\| u \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)}$, $j=0, \cdots, n$, pour simplifier l'écriture. Nous montrerons que:

$$\inf_{y \in R^n} \max_{0 \leqq j \leqq n} e^{-\xi_j(y)} C_j = \prod_{j=0}^{n} C_j^{w_j} .$$

Pour le cas $n=1$ qui a été traité par MM. Lions et Peetre [3], il suffit de prendre $(\xi_0-\xi_1)y=\log(C_0/C_1)$. Pour le cas général, notons que nous pouvons prendre $\xi_0=(1, 0, \cdots, 0)$ d'après la proposition 1.5. Donc posons

$$\xi_j(y)=\xi_{j1}y_1+\xi_j'(y') , \qquad j \geqq 1 ,$$

où

$$\xi_j'=(\xi_{j2}, \cdots, \xi_{jn}) , \qquad y'=(y_2, \cdots, y_n) ,$$

et

$$\xi_j'(y')=\xi_{j2}y_2+ \cdots +\xi_{jn}y_n .$$

Alors nous avons

$$\max_{0\leq j\leq n}\{e^{-\xi_j(y)}C_j\}=\max\left(e^{-y_1}C_0,\ \max_{1\leq j\leq n} e^{-\xi'_j(y')}e^{-\xi_{j1}y_1}C_j\right).$$

Or, comme nous avons que

$$\Delta'=\begin{vmatrix} \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} & 1 \end{vmatrix}-(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}=\Delta-\Delta_0,$$

$$\Delta'_j=(-1)^{n+j}\begin{vmatrix} \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}\ \text{(exclure la } j\text{-ième ligne)}$$

$$=(-1)^{n+j}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \xi_{11} & \cdots & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}\ \text{(exclure la } (j+1)\text{-ième ligne)}$$

$$=(-1)^{n+j}(-1)^{n+2+j}\Delta_j=\Delta_j$$

pour $1\leq j\leq n$, et que

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\Delta_j+\Delta_0=0,$$

nous avons, d'après l'hypothèse de la récurrence, que

$$\inf_{y'}\max_{1\leq j\leq n} e^{-\xi'_j(y')}(e^{-\xi_{j1}y_1}C_j)=\prod_{j=1}^{n}C_j^{\Delta'_j/\Delta'}\,e^{-\sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\Delta'_j y_1/\Delta'}$$

$$=e^{\Delta_0 y_1/(\Delta-\Delta_0)}\left\{\prod_{j=1}^{n}C_j^{\Delta_j}\right\}^{1/(\Delta-\Delta_0)}.$$

Donc, nous avons

$$\inf_{y}\max_{0\leq j\leq n} e^{-\xi_j(y)}C_j=\inf_{y_1}\max\left\{e^{-y_1}C_1,\ e^{\Delta_0 y_1/(\Delta-\Delta_0)}\left(\prod_{j=1}^{n}C_j^{\Delta_j}\right)^{1/(\Delta-\Delta_0)}\right\}$$

$$=\prod_{j=0}^{n}C_j^{w_j},\qquad w_j=\Delta_j/\Delta,$$

en choisissant convenablement y_1, c'est-à-dire, tel que:

$$e^{y_1}=\left\{C_1\Big/\left(\prod_{j=1}^{n}C_j^{\Delta_j}\right)^{1/(\Delta-\Delta_0)}\right\}^{(\Delta-\Delta_0)/\Delta}.$$

En utilisant la proposition que nous venons de démontrer, nous obtenons la

PROPOSITION 2.2. *Soient E_j, $j=0, \cdots, n$, $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathscr{E}$ avec les injections continues; soient F_j, $j=0, \cdots, n$, $n+1$ espaces de Banach contenus dans un espace vectoriel topologique séparé $\mathscr{F}$, munis des injections continues. Si L est une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ et si les restrictions de L comme applications de E_j dans F_j, $j=0, \cdots, n$, sont continues et de norme N_j, alors la restriction de L comme application de $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ dans $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F})$ est continue et de norme $N=\prod_{j=0}^{n} N_j^{w_j}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$. Il existe $u \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j, \xi_j}(E_j)$ telle que $a=\int u(x)dx$.

L étant un opérateur borné de E_j dans F_j pour tout j, L en est un de l'espace $E_0+ \cdots +E_n$ dans l'espace $F_0+ \cdots +F_n$. Donc,

$$La=L\int u(x)dx=\int Lu(x)dx\,. \tag{2.3}$$

Or, d'après l'hypothèse,

$$\| Lu \|_{F_j} \leqq N_j \| u \|_{E_j}\,, \qquad j=0, \cdots, n\,, \tag{2.4}$$

et comme il est clair que Lu est fortement mesurable, nous avons

$$Lu \in \bigcap_{j=0}^{n} L^{p_j, \xi_j}(F_j)\,. \tag{2.5}$$

D'après (2.3) et (2.5), nous avons $La \in S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F})$ et d'après (2.1),

$$\| La \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{F})} \leqq \prod_{j=0}^{n} \{\| Lu \|_{L^{p_j,\xi_j}(F_j)}\}^{w_j} \leqq \prod_{j=0}^{n} N_j^{w_j} \prod_{j=0}^{n} \{\| u \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)}\}^{w_j}\,.$$

En employant encore une fois la formule (2.1), nous voyons que

$$\| La \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{F})} \leqq N \| a \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})}\,, \qquad N=\prod_{j=0}^{n} N_j^{w_j}\,.$$

Par des démonstrations tout à fait analogues à celles des propositions 2.1 et 2.2, nous avons les proposition suivantes.

PROPOSITION 2.3. *Pour tout $a \in \underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$, nous avons*

$$\| a \|_{\underline{S}(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})}=\inf \prod_{j=0}^{n} \{\| v_j \|_{L^{p_j,\xi_j}(E_j)}\}^{w_j}\,, \qquad w_j=\vec{\Delta}_j(\xi)/\vec{\Delta}(\xi)\,, \tag{2.6}$$

où l'infinimum est pris sur toutes $v_j \in L^{p_j,\xi_j}(E_j)$ telles que $a=\sum_{j=0}^{n} v_j(x)$ presque

partout.

PROPOSITION 2.4. *Soient E_j, $j=0, \cdots, n$, $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathscr{E}$, munis des injections continues; soient F_j, $j=0, \cdots, n$, $n+1$ espaces de Banach contenus dans un espace vectoriel topologique séparé $\mathscr{F}$, munis des injections continues. Si L est une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ et si les restrictions de L comme applications de E_j dans F_j, $j=0, \cdots, n$, sont continues de norme N_j, alors la restriction de L comme application de $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ dans $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{F})$ est continue de norme $N=\prod_{j=0}^{n} N_j^{w_j}$.*

REMARQUE 2.1. Nous avons les propositions suivantes, analogues aux propositions 2.1 et 2.3:

PROPOSITION 2.5. *Pour tout $a \in s(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$, nous avons*

$$\| a \|_{s(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} = \inf \prod_{j=0}^{n} \{ \| u \|_{\ell^{p_j, \xi_j}(E_j)} \}^{w_j}, \qquad w_j = \Delta_j(\vec{\xi}) / \Delta(\vec{\xi}),$$

où l'infinimum est pris sur toutes $u=\{u_z\}_{z \in Z^n} \in \bigcap_{j=0}^{n} \ell^{p_j, \xi_j}(E_j)$ telles que $a=\sum_{z \in Z^n} u_z$.

PROPOSITION 2.6. *Pour tout $a \in \underline{s}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$, nous avons*

$$\| a \|_{\underline{s}(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} = \inf \prod_{j=0}^{n} \{ \| v_j \|_{\ell^{p_j, \xi_j}(E_j)} \}^{w_j}, \qquad w_j = \Delta_j(\vec{\xi}) / \Delta(\vec{\xi}),$$

où l'infinimum est pris sur toutes $v_j=\{v_{jz}\}_{z \in Z^n} \in \ell^{p_j, \xi_j}(E_j)$, $j=0, \cdots, n$, telles que $a=\sum_j v_{jz}$ $(z \in Z^n)$.

Nous remarquons aussi que les propositions 1.9 et 2.1 ou 2.5 impliquent la

PROPOSITION 2.7. *Soit $a \in E_0 \cap \cdots \cap E_n$. Alors nous avons*

$$\| a \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} \leqq c \prod_{j=0}^{n} \| a \|_{E_j}^{w_j}, \tag{2.7}$$

avec une constante c indépendante de a.

DÉMONSTRATION. Fixons une fonction $\varphi(x) \in \mathscr{D}(R^n)$ telle que $\int \varphi(x) dx = 1$. Posons $u(x)=\varphi(x)a$. De la proposition 2.1, on deduit:

$$\| a \|_{S(\vec{p};\vec{\xi};\vec{E})} \leqq \prod_{j=0}^{n} \{ \| u \|_{L^{p_j, \xi_j}(E_j)} \}^{w_j}.$$

Comme

$$\| u \|_{L^{p_j, \xi_j}(E_j)} = \left[\int e^{\xi_j(x) p_j} | \varphi(x) |^{p_j} dx \right]^{1/p_j} \| a \|_{E_j} \qquad j=0, \cdots, n,$$

nous avons (2.7).

3. Espaces de moyenne de plusieurs espaces du type L^p

En vue des prochains résultats, nous calculons ici quelques exemples qui correspondront aussi à un exemple calculé par MM. Lions et Peetre [3]. Nous commençons par la définition suivante.

DÉFINITION 3.1. *Soit $(\Omega, d\mu)$ un espace mesuré sur lequel est définie une fonction positive et mesurable ψ. Soit E un espace de Banach. Nous désignons par $L^p_\psi(E)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, l'espace de toutes les fonctions u définies sur Ω à valeurs dans E, fortement mesurables et qui satisfont à la condition: $\psi(x)\,||\,u(x)\,||_E \in L^p(\Omega; d\mu)$. $L^p_\psi(E)$ est un espace de Banach pour la norme*

$$||\,u\,||_{L^p_\psi(E)} = \left[\int_\Omega ||\,u(x)\,||_E^p \psi(x)^p d\mu(x)\right]^{1/p}. \tag{3.1}$$

PROPOSITION 3.1. *Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ qui satisfont l'hypothèse sur ξ. Soient $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé munis des injections continues. Soient $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ $n+1$ fonctions positives mesurables définies sur Ω. Alors nous avons*

$$\begin{aligned} &S(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; L^{p_0}_{\varphi_0}(E_0), \cdots, L^{p_n}_{\varphi_n}(E_n)) \\ &= L^p_\varphi(S(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; E_0, \cdots, E_n)) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p} = \sum_{j=0}^n w_j/p_j,\ 1 \leqq p_j \leqq \infty,\ \varphi = \prod_{j=0}^n \varphi_j^{w_j}, \\ &w_j = \Delta_j(\vec{\xi})/\Delta(\vec{\xi}), \qquad j=0, \cdots, n. \end{aligned}$$

Nous évitons le cas $\varphi \equiv 1$ soit en multipliant φ par une constante $\neq 1$, soit en convenant que toutes les fonctions $\varphi_j \equiv 1$.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier l'écriture, posons $S = S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ et $L = S(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; L^{p_0}_{\varphi_0}(E_0), \cdots, L^{p_n}_{\varphi_n}(E_n))$. Nous montrons que $L^p_\varphi(S) = L$ en utilisant le fait $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) = s(\vec{p}; \vec{\xi}, \vec{E})$ (Proposition 1.12).

i) Soit $a(x) \in L$. Alors il existe une suite $u(x) = \{u_z(x)\}$ telle que

$$a(x) = \sum_{z \in Z^n} u_z(x)$$

et

$$\{e^{\xi_j(z)} u_z(x)\} \in \ell^{p_j}(L^{p_j}_{\varphi_j}(E_j)), \qquad j=0, \cdots, n.$$

Donc nous avons presque partout $a(x) \in S$ et

$$\| a(x) \|_S \leqq \prod_{j=0}^{n} \{ \sum_{z \in Z^n} e^{\xi_j(z)} \| u_z(x) \|_{E_j}^{p_j} \}^{w_j/p_j} ,$$

d'où

$$\| a(x) \|_S \varphi(x) \leqq \prod_{j=0}^{n} \{ \sum_{z \in Z^n} e^{\xi_j(z)} \| u_z(x) \|_{E_j}^{p_j} \varphi_j(x)^{p_j} \}^{w_j/p_j} .$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\int_\Omega \| a(x) \|_S^p \varphi(x)^p d\mu(x) \leqq \prod_{j=0}^{n} \left[\int_\Omega \varphi_j(x)^{p_j} d\mu(x) \sum_{z \in Z^n} e^{\xi_j(z) p_j} \| u_z(x) \|_{E_j}^{p_j} \right]^{w_j p/p_j}$$
$$= \prod_{j=0}^{n} \left[\sum e^{\xi_j(z) p_j} \{ \| u_z \|_{L_{\varphi_j}^{p_j}(E_j)} \}^{p_j} \right]^{p w_j/p_j} .$$

Par conséquent, $a \in L_\varphi^p(S)$ et

$$\| a \|_{L_\varphi^p(S)} \leqq \| a \|_L ,$$

où nous avons employé la proposition 2.1.

ii) Comme MM. Lions et Peetre, soit a une fonction simple à valeurs dans S, c'est-à-dire, $a = \sum_{\text{finie}} a_j \chi_j$, $a_j \in S$, χ_j fonction caractéristique d'un ensemble mesurable. Alors pour presque tout $x \in \Omega$, nous pouvons trouver $\{w_z(x)\}$ telles que

$$a(x) = \sum_{z \in Z^n} w_z(x) ,$$
$$w_z(x) \in \mathscr{L}^{p_j, \xi_j}(E_j) , \qquad j = 0, \cdots, n ,$$

et

$$\| a(x) \|_S \geqq \frac{1}{2} \max_{0 \leqq j \leqq n} \{ \| w_z(x) \|_{\mathscr{L}^{p_j, \xi_j}(E_j)} \} .$$

Nous utilisons, dans la suite de la démonstration, la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2. *Soient* $Z_j \in R$, $j = 0, \cdots, n$, *et* $Z = \sum_{j=0}^{n} w_j Z_j \neq 0$. *Alors il existe une solution unique* $x \in R^n$ *du système d'équations*:

$$Z_j - Z \xi_j(x) = pZ/p_j , \qquad j = 0, \cdots, n .$$

SUITE DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1. Soient X et $Y(x) \in R$ les solutions respectives des systèmes d'équations

$$1 - \xi_j(X) = p/p_j , \qquad j = 0, \cdots, n ,$$

et

$$\log \varphi_j(x) - \xi_j(Y(x)) \log \varphi(x) = p[\log \varphi(x)]/p_j , \qquad j = 0, \cdots, n .$$

Ici, nous prenons $Y(x)=0$ si $\varphi\equiv\varphi_j\equiv 1$. Posons

$$u_z(x)=w_{z'}(x)\,, \qquad z'=z+z_a(x)+z_\varphi(x)\,,$$

où

$$z_a(x)=([X_1\log\|a(x)\|_S],\cdots,[X_n\log\|a(x)\|_S])\,,$$

et

$$z_\varphi(x)=([Y_1(x)\log\varphi(x)],\cdots,[Y_n(x)\log\varphi(x)])\,,$$

en désignant par $[r]$, $r\in R$, le plus grand entier $<r$. Alors, la fonction $x\mapsto u_z(x)$ étant mesurable, nous avons, pour presque tout $x\in\Omega$,

$$a(x)=\sum_{z\in Z^n}u_z(x)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{z\in Z^n}e^{\xi_j(z)p_j}\|u_z(x)\|_{E_j}^{p_j}&=\sum_{z'}e^{\xi_j(z')p_j}\|w_{z'}(x)\|_{E_j}^{p_j}e^{-\xi_j(z_a)p_j-\xi_j(z_\varphi)p_j}\\&\leqq(2c_j)^{p_j}\|a(x)\|_S^{p_j-\xi_j(X)p_j}\varphi(x)^{-p_j\xi_j(Y(x))}\,,\end{aligned}$$

où

$$c_j^{p_j}=\left[\max\left\{1,\exp\left(p_j\sum_k|\xi_{jk}|\right)\right\}\right]^2.$$

Donc

$$\varphi_j(x)^{p_j}\sum_z e^{\xi_j(z)p_j}\|u_z(x)\|_{E_j}^{p_j}\leqq(2c_j)^{p_j}\varphi(x)^p\|a(x)\|_S^p\,,$$

d'où

$$\sum_{z\in Z^n}e^{\xi_j(z)p_j}\int_\Omega\|u_z(x)\|_{E_j}^{p_j}\varphi_j(x)^{p_j}d\mu(x)\leqq(2c_j)^{p_j}\int_\Omega\varphi(x)^p\|a(x)\|_S^p d\mu(x)\,,$$

ou

$$\{u_z\}\in\ell^{p_j,\xi_j}(L_{\varphi_j}^{p_j}(E_j))\quad\text{et}\quad\sum_{z\in Z^n}e^{\xi_j(z)p_j}\{\|u_z\|_{L_{\varphi_j}^{p_j}(E_j)}\}^{p_j}\leqq(2c_j)^{p_j}\{\|a\|_{L_\varphi^p(S)}\}^p\,.$$

Il s'ensuit que $a\in L$ et, d'après la proposition 2.1, que $\|a\|_L\leqq c\|a\|_{L_\varphi^p(S)}$, où $c=(2c_0)\cdots(2c_n)$. Cela étant montré pour les fonctions simples qui sont denses dans l'espace $L_\varphi^p(S)$, nous avons démontré la proposition.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2. Il existe une seule solution $x\in R^n$ du système d'équations

$$Z_{\xi_j}(x)=Z_j-pZ/p_j\,, \qquad j=0,\cdots,n-1\,,$$

le déterminant $\Delta_n(\vec{\xi})$ étant $\neq 0$. Nous vérifions que cette solution x satisfait la $(n+1)$-ième équation. En effet, d'après la définition de x,

$$Z\sum_{j=0}^{n-1} w_j\xi_j(x)=\sum_{j=0}^{n-1} w_jZ_j-pZ\sum_{j=0}^{n-1} w_j/p_j=Z-w_nZ_n-pZ(1/p-w_n/p_n)$$
$$=-w_n(Z_n-pZ/p_n)\ .$$

Or, de même que dans la démonstration de la proposition 1.3,

$$\sum_{j=0}^{n-1} w_j\xi_j(x)=\sum_{j=0}^{n-1} w_j(\xi_j-\xi_n)(x)+\left(\sum_{j=0}^{n-1} w_j\right)\xi_n(x)=-\sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)}X_j^{(n)}+(1-w_n)\xi_n(x)$$
$$=-\xi_n(x)+(1-w_n)\xi_n(x)=-w_n\xi_n(x)\ ,$$

où $X_j^{(n)}$, $w_k^{(n)}$ sont ceux de la démonstration de la proposition 1.3. Par conséquent, nous avons

$$Z\xi_n(x)=Z_n-pZ/p_n\ .$$

De façon tout à fait analogue nous obtenons la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. *Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ satisfaisant l'hypothèse sur ξ. Soient $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé munis des injections continues. Soient $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ $n+1$ fonctions positives et mesurables définies sur Ω. Alors nous avons*

$$S(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; L_{\varphi_0}^{p_0}(E_0), \cdots, L_{\varphi_n}^{p_n}(E_n))$$
$$=L_\varphi^p(S(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; E_0, \cdots, E_n))$$

où

$$1/p=\sum_{j=0}^{n} w_j/p_j\ , \qquad 1\leqq p_j\leqq\infty\ , \qquad \varphi=\prod_{j=0}^{n}\varphi_j^{w_j}\ ,$$
$$w_j=\Delta_j(\vec{\xi})/\Delta(\vec{\xi})\ , \qquad j=0, \cdots, n\ .$$

Pour le cas $\varphi\equiv 1$ nous faisons la même convention que dans la proposition 3.1.

Comme les cas particuliers des propositions 3.1 et 3.2, nous avons les définitions et propositions suivantes.

DÉFINITIONS 3.2. *Soient E un espace de Banach et ψ une fonction positive sur Z^n. Nous désignons par $\ell_\psi^p(E)$, $1\leqq p\leqq\infty$, l'espace de toutes les suites $u=\{u_z\}_{z\in Z^n}$ à valeurs dans l'espace E telles que*

$$\{\psi(z)\,||\,u_z\,||_E\}_{z\in Z^n}\in\ell^p\ .$$

$\ell_\psi^p(E)$ est un espace de Banach pour la norme:

$$||\,u\,||_{\ell_\psi^p(E)}=\left\{\sum_{z\in Z^n}\psi(z)^p\,||\,u_z\,||_E^p\right\}^{1/p}\ . \tag{3.2}$$

PROPOSITION 3.4. *Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ satisfaisant l'hypothèse sur ξ. Soient $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé munis des injections continues. Soient $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ $n+1$ fonctions positives définies sur Z^n. Alors nous avons*

$$\begin{aligned} &s(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; \mathscr{L}^{p_0}_{\varphi_0}(E_0), \cdots, \mathscr{L}^{p_n}_{\varphi_n}(E_n)) \\ &= \mathscr{L}^{p}_{\varphi}(s(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; E_0, \cdots, E_n)) , \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &1/p = \sum_{j=0}^{n} w_j/p_j , \qquad 1 \leqq p_j \leqq \infty, \qquad \varphi = \prod_{j=0}^{n} \varphi_j^{w_j} , \\ &w_j = \Delta_j(\vec{\xi})/\Delta(\vec{\xi}) , \qquad\qquad j=0, \cdots, n . \end{aligned}$$

Nous évitons le cas $\varphi \equiv 1$ soit en multipliant φ par une constante $c \neq 1$, soit en convenant que toutes les fonctions $\varphi_j \equiv 1$.

PROPOSITION 3.5. *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.4, nous avons*

$$\begin{aligned} &\underline{s}(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; \mathscr{L}^{p_0}_{\varphi_0}(E_0), \cdots, \mathscr{L}^{p_n}_{\varphi_n}(E_n)) \\ &= \mathscr{L}^{p}_{\varphi}(\underline{s}(p_0, \cdots, p_n; \xi_0, \cdots, \xi_n; E_0, \cdots, E_n)) , \end{aligned}$$

p, p_j, w_j, et φ étant ceux de la proposition 3.4.

REMARQUE 3.1. La proposition 3.1 dans le cas $n=1$ a été démontrée par MM. Lions et Peetre de façon analogue. Leur démonstration nous a inspiré.

4. Relations entre les espaces de moyenne de n espaces et ceux de $n-1$ espaces.

Nous considérons ici une sorte de factorisation d'espaces de moyenne, c'est-à-dire que nous examinons les relations entre les espaces de moyenne de $(n+1)$ espaces de Banach et ceux de n espaces de Banach. Soient $\xi_0, \cdots, \xi_n \in R^n$ qui satisfont l'hypothèse sur ξ. En posant $w_j = \Delta_j(\xi)/\Delta(\xi)$, $j=0, \cdots, n$, définissons

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} W_0 = (w_1, \cdots, w_n) , \\ W_1 = (w_1 - 1, w_2, \cdots, w_n) , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_n = (w_1, w_2, \cdots, w_n - 1) . \end{cases}$$

Rappelons que $W_0, \cdots, W_n$ aussi satisfont l'hypothèse sur ξ avec $w_j = \Delta_j(\vec{W})/\Delta(\vec{W})$ (cf. propositions 1.2 et 1.5).

Posons

$$(4.2)\qquad \begin{cases} W_0' &= (w_2, \cdots, w_n)\,, \\ W_1' &= (w_2-1, w_3, \cdots, w_n)\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-1}' &= (w_2, w_3, \cdots, w_n-1)\,. \end{cases}$$

Alors nous voyons facilement que $W_0', \cdots, W_{n-1}'$ $(\in R^{n-1})$ satisfont l'hypothèse sur ξ pour $n-1$. En effet, nous avons

$$\Delta_0(\vec{W}')/\Delta(\vec{W}') = w_0+w_1\,, \qquad \Delta_j(\vec{W}')/\Delta(\vec{W}') = w_{j+1}\,, \qquad j=1, \cdots, n-1\,.$$

PROPOSITION 4.1. *Soient $E_0, \cdots, E_n$ $n+1$ espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé munis des injections continues. Soient W_j, W_k' comme* (4.1) *et* (4.2). *Posons*

$$F_0 = s(p_0, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E_0, E_2, \cdots, E_n)$$

et

$$F_1 = s(p_1, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E_1, E_2, \cdots, E_n)\,,$$

où $1 \leqq p_j \leqq \infty$, $j=0, \cdots, n$. *Alors nous avons*

$$s(p_0, p_1, \cdots, p_n; W_0, \cdots, W_n; E_0, E_1, \cdots, E_n) \subset s(q_0, q_1; w_1, -w_0; F_0, F_1)\,,$$

où

$$1/q_i = (w_0+w_1)/p_i + \sum_{j=2}^{n} w_j/p_j\,, \qquad i=0, 1\,.$$

L'injection est continue.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in s(\vec{p}; \vec{W}; \vec{E})$. Alors il existe une suite $u=\{u_z\}_{z\in Z^n}$ telle que $a=\sum_{z\in Z^n} u_z$ et $u \in \bigcap_{j=0}^{n} \ell^{p_j, W_j}(E_j)$. Nous pouvons en déduire que

$$e^{\sum_j w_j z_j}\{u_z\} \in \ell^{p_0}(E_0)\,,$$
$$e^{\sum_j w_j z_{j-z_k}}\{u_z\} \in \ell^{p_k}(E_k)\,, \qquad k=2, \cdots, n\,,$$

et

$$e^{\sum_j w_j z_{j-z_1}}\{u_z\} \in \ell^{p_1}(E_1)\,,$$
$$e^{\sum_j w_j z_{j-z_k}}\{u_z\} \in \ell^{p_k}(E_k)\,, \qquad k=2, \cdots, n\,.$$

En posant $z'=(z_2, \cdots, z_n) \in Z^{n-1}$, nous obtenons

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} &e^{W_0'(z')}\{u_{z_1, z'}\} \in \ell^{p_0}_{(z')}(\ell^{p_0, w_1}_{(z_1)}(E_0))\,, \\ &e^{W_k'(z')}\{u_{z_1, z'}\} \in \ell^{p_k}_{(z')}(\ell^{p_k, w_1}_{(z_1)}(E_k))\,, \qquad k=2, \cdots, n\,, \end{aligned}$$

et

$$
(4.4)\qquad \begin{aligned}
&e^{W_0'(z')}\{u_{z_1,z'}\} \in \mathscr{L}^{p_1}_{(z')}(\mathscr{L}^{p_2,w_1-1}_{(z_1)}(E_1)) ,\\
&e^{W_k'(z')}\{u_{z_1,z'}\} \in \mathscr{L}^{p_k}_{(z')}(\mathscr{L}^{p_k,w_1}_{(z_1)}(E_k)) , \qquad k=2,\cdots,n .
\end{aligned}
$$

Ici, par $\mathscr{L}^p_{(\zeta)}(E)$, nous désignons l'argument ζ. D'après (4.3), nous avons

$$
\begin{aligned}
&\{v_{z_1}\} \in s(p_0, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; \mathscr{L}^{p_0,w_1}(E_0), \mathscr{L}^{p_2,w_1}(E_2), \cdots) ,\\
&\{v_{z_1}\} = \sum_{z' \in Z^{n-1}} u_{z_1,z'} ,
\end{aligned}
$$

ou, d'après la proposition 3.4,

$$\{v_{z_1}\} \in \mathscr{L}^{q_0,w_1}(F_0) .$$

(4.4) donne:

$$\{v_{z_1}\} \in s(p_1, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; \mathscr{L}^{p_1,w_1-1}(E_1), \mathscr{L}^{p_2,w_1}(E_2), \cdots) ,$$

ou

$$\{v_{z_1}\} \in \mathscr{L}^{q_1,-w_0}(F_1) ,$$

car $(w_1-1)(w_0+w_1)+w_1(w_2+\cdots+w_n)=-w_0$. Il s'ensuit, donc, que

$$a=\sum_{z_1 \in Z} v_{z_1} \in s(q_0, q_1; w_1, -w_0; F_0, F_1)$$

et

$$
\begin{aligned}
\|a\|_{s(q_0,q_1;w_1,-w_0;F_0,F_1)} &\leqq \max\{\|\{v_{z_1}\}\|_{\mathscr{L}^{q_0,w_1}(F_0)}, \|\{v_{z_1}\}\|_{\mathscr{L}^{q_1,-w_0}(F_1)}\}\\
&\leqq \max_{0\leqq j\leqq n} \|u\|_{\mathscr{L}^{p_j,W_j}(E_j)} ,
\end{aligned}
$$

d'où

$$\|a\|_{s(q_0,q_1;w_1,-w_0;F_0,F_1)} \leqq \|a\|_{s(\vec{p};\vec{W};\vec{E})} .$$

PROPOSITION 4.2. *Posons*

$$F_0=s(p_0, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E_0, E_2, \cdots, E_n)$$

et

$$\underline{F}_1=\underline{s}(p_1, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E_1, E_2, \cdots, E_n) ,$$

où $E_0, \cdots, E_n, W_0, \cdots, W_n, W_0', \cdots, W_{n-1}', p_0, \cdots, p_n$ *sont les mêmes que dans la proposition* 4.1. *Alors nous avons*

$$\underline{s}(q_0, q_1; w_1, -w_0; \underline{F}_0, F_1) \subset s(p_0, p_1, \cdots, p_n; W_0, \cdots, W_n; E_0, E_1, \cdots, E_n) ,$$

où

$$1/q_i=(w_0+w_1)/p_i+\sum_{j=2}^{n} w_j/p_j\ , \qquad i=0,1\ .$$

L'injection est continue.

DÉMONSTRATION. Soit $a\in s(q_0, q_1; w_1, -w_0; \underline{F}_0, \underline{F}_1)$. Alors il existe deux suites $\{v_{0z_1}\}$ et $\{v_{1z_1}\}$ telles que

$$a=v_{0z_1}+v_{1z_1} \text{ pour tout } z_1\in Z\ ,$$

$$\{v_{0z_1}\}\in \mathcal{L}^{q_0,w_1}(\underline{F}_0)\ , \qquad \{v_{1z_1}\}\in \mathcal{L}^{q_1,-w_0}(\underline{F}_1)\ .$$

Comme nous voyons, grâce à la proposition 3.5, que

$$\{v_{0z_1}\}\in s(p_0, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; \mathcal{L}^{p_0,w_1}(E_0), \mathcal{L}^{p_2,w_1}(E_2), \cdots)$$

$$\{v_{1z_1}\}\in s(p_1, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; \mathcal{L}^{p_1,-w_0}(E_1), \mathcal{L}^{p_2,w_1}(E_2), \cdots)\ ,$$

nous pouvons trouver deux suites

$$\{U_{jz_1,z'}\}_{z'\in Z^{n-1}}\in \mathcal{L}^{p_j,W_j'}_{(z')}(\mathcal{L}^{p_j,w_1}_{(z_1)}(E_j))=\mathcal{L}^{p_j,W_j}_{(z)}(E_j)\ , \qquad j=0,2,\cdots,n,$$

($W_j'=W_0'$ si $j=0$ et $=W_{j-1}'$ si $j\geqq 2$), et

$$\{V_{kz_1,z'}\}_{z'\in Z^{n-1}}\in \mathcal{L}^{p_k,W_{k-1}'}_{(z')}(\mathcal{L}^{p_k,w_1^k}_{(z_1)}(E_k))=\mathcal{L}^{p_k,W_k}_{(z)}(E_k)\ , \qquad k=1,2,\cdots,n\ ,$$

($w_1^k=w_1-1$ si $k=1$ et $w_1^k=w_1$ si $k\neq 1$), telles que

$$v_{0z_1}=\sum_{j\neq 1} U_{jz_1,z'} \text{ pour tout } z'\in Z^{n-1}\ ,$$

et

$$v_{1z_1}=\sum_{k\neq 0} V_{kz_1,z'} \text{ pour tout } z'\in Z^{n-1}\ .$$

En outre, nous pouvons choisir $\{U_{jz'}\}$ et $\{V_{kz'}\}$ telles que

$$\|\{V_{jz}\}\|_{\mathcal{L}^{p_j,W_j(E_j)}}\leqq 2\,\|v_0\|_{\mathcal{L}^{q_0,w_1(\underline{E}_0)}}\ , \qquad j=0,2,\cdots,n\ ,$$

et

$$\|\{U_{kz}\}\|_{\mathcal{L}^{p_k,W_k(E_k)}}\leqq 2\,\|v_1\|_{\mathcal{L}^{q_1,-w_0(\underline{E}_1)}}\ , \qquad k=1,2,\cdots,n\ .$$

Posons

$$u_{0z}=V_{0z}\ ,$$
$$u_{1z}=U_{1z}\ ,$$
$$u_{jz}=V_{jz}+U_{jz}\ , \qquad j=2,\cdots,n\ .$$

Alors

$$a = v_{0z_1} + v_{1z_1} \text{ pour tout } z_1 \in Z ,$$
$$= \sum_{j=0}^{n} u_{jz} \text{ pour tout } z \in Z^n ,$$

et

$$u_j \in \mathcal{L}^{p_j, W_j}(E_j) , \qquad j = 0, 1, \cdots, n .$$

En plus,

$$\| a \|_{\underline{s}(\vec{p}; \vec{W}; \vec{E})} \leqq \max_{0 \leqq j \leqq n} \| u_j \|_{\mathcal{L}^{p_j, W_j}(E_j)}$$
$$\leqq 4 \max \{ \| v_0 \|_{\mathcal{L}^{q_0, w_1}(\underline{E}_0)}, \| v_1 \|_{\mathcal{L}^{q_1, -w_0}(\underline{E}_1)} \} ,$$

d'où

$$\| a \|_{\underline{s}(\vec{p}; \vec{W}; \vec{E})} \leqq 4 \| a \|_{\underline{s}(q_0, q_1; w_1, -w_0; \underline{E}_0, \underline{E}_1)} .$$

Grâce aux propositions 4.1 et 4.2, nous voyons, en particulier, que, si $s(\vec{p}; \vec{W}; \vec{E}) = \underline{s}(\vec{p}; \vec{W}; \vec{E})$, cet espace $s(\vec{p}; \vec{W}; \vec{E})$ se réduit à l'espace de moyenne de deux espaces. Par exemple, dans le cas $n=2$, nous avons

PROPOSITION 4.3. *Soit $n=2$. Supposons que*

$$E = s(p_0, p_1, p_2; W_0, W_1, W_2; E_0, E_1, E_2) = \underline{s}(p_0, p_1, p_2; W_0, W_1, W_2; E_0, E_1, E_2) ,$$

où p_j, W_j, E_j sont ceux des propositions 4.1 *et* 4.2. *Alors nous avons*

$$E = s(q_0, q_1; w_1, -w_0; s(p_0, p_2; w_2, w_2-1; E_0, E_2), s(p_1, p_2; w_2, w_2-1; E_1, E_2))$$

où

$$1/q_i = (w_0 + w_1)/p_i + w_2/p_2 , \qquad i = 0, 1 .$$

Sous les mêmes hypothèses, nous avons aussi d'après les propositions 1.5, 1.6, 1.7 et 1.8, que

$$E = s(q_0', q_1'; w_1, -w_2; s(p_2, p_0; w_0, w_0-1; E_2, E_0), s(p_1, p_0; w_0, w_0-1, E_1, E_0))$$
$$= s(q_0'', q_1''; w_0, -w_2; s(p_2, p_1; w_1, w_1-1; E_2, E_1), s(p_0, p_1; w_1, w_1-1; E_0, E_1)) ,$$

où

$$1/q_0' = w_0/p_0 + (w_1 + w_2)/p_2, \; 1/q_1' = w_0/p_0 + (w_1 + w_2)/p_1 ,$$
$$1/q_0'' = w_1/p_1 + (w_0 + w_2)/p_2, \; 1/q_1'' = w_1/p_1 + (w_0 + w_2)/p_0 .$$

De même que dans un autre cas où nous pouvons réduire les définitions d'espaces de moyenne de $n+1$ espaces à celles de n espaces, nous considérons le cas où deux des $n+1$ espaces sont identiques. Nous avons ainsi les propositions suivantes.

PROPOSITION 4.4. *Soient E_j, W_j, W_j', p_j definis de la même façon que dans*

les hypothèses de la proposition 4.1. *Si nous supposons en outre que* $E_0=E_1=E$ *et* $p_0=p_1=p$, *alors nous avons*

$$\begin{aligned}&S(p, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E, E_2, \cdots, E_n)\\&=S(p, p, p_2, \cdots, p_n; W_0, \cdots, W_n; E, E, E_2, \cdots, E_n)\,.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 4.1, nous voyons que

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=S(p, p, p_2, \cdots, p_n; W_0, \cdots, W_n; E, E, E_2, \cdots, E_n)\\&\subset S(q_0, q_1; w_1, -w_0; S_n, S_n)=S_n\,,\end{aligned}$$

où $S_n=S(p, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E, E_2, \cdots, E_n)$. Nous allons démontrer l'inclusion en sens inverse. Soit $a\in S_n$. Alors il existe $v(x')$ telle que

$$a=\int_{R^{n-1}} v(x')dx'\,,\quad x'=(x_2, \cdots, x_n)\,,$$

$$e^{W_{j-1}'(x')}v(x')\in L^{p_j}(E_j)\,,\quad j=1, \cdots, n\,,\quad p_2=p\,,\quad E_1=E\,.$$

Prenons $\psi(x_1)\in\mathscr{D}(R)$ telle que $\int_R \psi(x_1)dx_1=1$. Posons

$$u(x)=\psi(x_1)v(x')\,,\quad x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,.$$

Alors nous avons

$$e^{W_j(x)}u(x)\in L^{p_j}(E_j)\,,\quad j=0, \cdots, n\,,\quad E_0=E_1=E\,,\quad p_0=p_1=p\,,$$

et

$$a=\int_{R^n} u(x)dx\,.$$

De plus, nous voyons que

$$\|u(x)\|_{L^{p_j, W_j(E_j)}}\leqq C\|v(x')\|_{L^{p_{j^*}, W_{j^*}'(E_j)}}\,,\qquad j=0, \cdots, n\,,$$

avec une constante C, où $j^*=j-1$ si $j\geqq 1$ et $j^*=0$ si $j=0$. Par conséquent, nous avons $a\in S_{n+1}$ et

$$\|a\|_{S_{n+1}}\leqq C\|a\|_{S_n}\,.$$

PROPOSITION 4.5. *Sous les hypothèses de la proposition* 4.4, *nous avons*

$$\begin{aligned}&S(p, p, p_2, \cdots, p_n; W_0, \cdots, W_n; E, E, E_2, \cdots, E_n)\\&=S(p, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E, E_2, \cdots, E_n)\,.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 4.2, nous avons

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{S}_n &= \underset{\sim}{S}(p, p_2, \cdots, p_n; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E, E_2, \cdots, E_n)\\ &= \underset{\sim}{S}(q_0, q_1; w_1, -w_0; \underset{\sim}{S}_n, \underset{\sim}{S}_n)\\ &\subset \underset{\sim}{S}(p, p, p_2, \cdots, p_n; W_0, \cdots, W_n; E, E, E_2, \cdots, E_n) = \underset{\sim}{S}_{n+1}\,.\end{aligned}$$

Inversement, soit $a \in \underset{\sim}{S}_{n+1}$. Alors il existe $n+1$ fonctions $v_j(x)$, $j=0, \cdots, n$, telles que

$$a = \sum_{j=0}^{n} v_j(x) \text{ presque partout,}$$

$$e^{W_j(x)} v_j(x) \in L^{p_j}(E_j)\,, \quad j=0, \cdots, n\,, \quad p_0 = p_1 = p\,, \quad E_0 = E_1 = E\,.$$

Soit $\rho \in \mathscr{D}(R^n)$ telle que $\int_{R^n} \rho(x)dx = 1$. En formant la convolution $\rho * v_j$, de ρ et v_j, nous avons que

$$a = \sum_{j=0}^{n} \rho * v_j(x) \text{ pour tout } x \in R^n\,,$$

$$\rho * v_j \in W^{k, w_1^j}_{p_j(x_1)}(L^{p_j, W'_{j^*}}_{(x')}(E_j))\,, \quad j=0, \cdots, n; \quad k=1, 2, \cdots, \tag{4.5}$$

où $w_1^j = w_1$ si $j \neq 1$ et $w_1^j = w_1 - 1$ si $j=1$; $j^*=1$ si $j=1$, $j^* = j-1$ si $j \geqq 1$. $W_p^{k,w}(A)$ désigne l'espace de toutes les fonctions $u(t)$ définies sur R à valeurs dans un espace de Banach A, telles que

$$e^{wt}(d/dt)^s u(t) \in L^p(A), \quad s=0, \cdots, k\,,$$

$(w \in R, 1 \leqq p \leqq \infty, k=1, 2, \cdots)$, $(d/dt)^s$ étant prises au sens fort. Notons que l'espace $W_p^{k,w}(A)$ est un espace de Banach pour la norme:

$$\| u(t) \|_{W_p^{k,w}(A)} = \sum_{s=0}^{k} \| e^{wt}(d/dt)^s u(t) \|_{L^p(A)}\,.$$

Nous employons la proposition suivante dont la démonstration sera donnée plus loin.

PROPOSITION 4.6. *Soit A un espace de Banach. Si $w \in R$, $w \neq 0$, alors nous pouvons définir $u(0)$ pour toute $u \in W_p^{1,w}(A)$, et l'application*

$$W_p^{1,w}(A) \ni u(t) \to u(0) \in A$$

est continue.

SUITE DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.5. D'après proposition 4.6 et (4.5), nous avons, en posant

$$u_{j-1}(x') = \rho * v_j(0, x'),\ j \geqq 2,\ u_0(x') = \rho * v_0(0, x') + \rho * v_1(0, x')\,,$$

$$a=\sum_{j=0}^{n-1} u_j(x') , \quad e^{W'_0(x')}u_0 \in L^p(E) , \quad e^{W'_{j-1}(x')}u_{j-1} \in L^{p_j}(E_j) , \quad j=2, \cdots, n ,$$

et

$$\| u_{j-1} \|_{L^{p_j, W'_{j-1}(E_j)}} \leqq C \| v_j \|_{L^{p_j, W_j(E_j)}} , \qquad j=2, \cdots, n ,$$

$$\| u_0 \|_{L^{p, W'_0(E)}} \leqq C\{\| v_0 \|_{L^{p, W_0(E)}} + \| v_1 \|_{L^{p, W_1(E)}}\} ,$$

avec une constante C. Par conséquent,

$$a \in S_n \text{ et } \| a \|_{S_n} \leqq 2C \| a \|_{S_{n+1}} .$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.6.

(i) $p=1$; $u(t)$ étant absolument continue dans un voisinage de l'origine 0, nous avons

$$u(0)=-\int_0^t u'(t_1)dt_1+u(t) \quad \text{pour tout } t .$$

Prenons t tel que $wt>0$. Alors

$$\| u(0) \|_A \leqq \max_{t, wt>0} (e^{-wt}) \| e^{wt}u'(t) \|_{L^1(A)} + \| u(t) \|_A .$$

Comme $e^{wt}u(t) \in L^1(A)$, il s'ensuit que

$$\| u(t) \|_A \to 0 \quad \text{lorsque} \quad (\operatorname{sgn} w)t \to \infty .$$

Donc, pour $p=1$, nous avons

$$\| u(0) \|_A \leqq \| e^{wt}u'(t) \|_{L^p(A)} \leqq \| u \|_{W_p^{1,w}(A)} . \tag{4.6}$$

(ii) $p>1$; Comme

$$\| u(t')-u(t'') \|_A \leqq \left| \int_{t'}^{t''} \| u'(t) \|_A dt \right| \leqq \left(\left| \int_{t'}^{t''} e^{-wtp'} dt \right| \right)^{1/p'} \| u \|_{W_p^{1,w}(A)}$$

avec $p'=p/(p-1)$, nous pouvons définir $u(0)$, et comme $\| u(t) \|_A \to 0$ lorsque $t \to \infty$ ou $-\infty$, nous avons (4.6) pour $p>1$.

Pour terminer cette section, nous donnons une démonstration de quelques cas spéciaux du théorème de réitération de MM. Lions et Peetre [3].

PROPOSITION 4.7. *Soient E, F deux espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé munis des injections continues. Alors*

$$S(p, p; \theta, \theta-1; E, F)=S(p, p; \mu, \mu-1; S(p, p; \lambda, \lambda-1; E, F), E) , \tag{4.7}$$

où

$$1 \leqq p \leqq \infty, \quad 0<\lambda<1, \quad 0<\mu<1, \quad \theta=(1-\mu)\lambda .$$

DÉMONSTRATION. Posons $w_0=1-\lambda$, $w_1=\lambda-\theta$, $w_2=\theta$. Nous avons que $w_i>0$, $i=0, 1, 2$, $w_0+w_1+w_2=1$. Nous voyons, grâce à la remarque 1.5 et aux propositions 4.3, 4.4, 4.5, que chacun des deux membres de l'égalité (4.7) coïncide avec l'espace $S(p, p, p; W_0, W_1, W_2; E, E, F)$, W_j, $j=0, 1, 2$, étant définis par la formule (4.1).

PROPOSITION 4.8. *Soient E, F definis de même que dans la proposition précédente. Alors*

$$\begin{aligned}(4.8)\qquad & S(p, p; \lambda, \lambda-1; S(p, p; \mu, \mu-1; E, F), S(p, p; \nu, \nu-1; E, F)) \\ & =S(p, p; \theta, \theta-1; E, F)\,,\end{aligned}$$

où

$$1\leqq p\leqq\infty,\quad 0<\lambda<1,\quad 0<\mu<\nu<1,\quad \theta=(1-\lambda)\mu+\lambda\nu\,.$$

DÉMONSTRATION. Posons $w_0=(1-\lambda)(\nu-\mu)$, $w_1=\lambda(\nu-\mu)$, $w_2=1-\nu$, $w_3=\mu$. Nous avons $w_j>0$, $j=0, 1, 2, 3$, et $w_0+w_1+w_2+w_3=1$. Définissons W_j, $j=0, 1, 2, 3$, par la formule (4.1), et considérons l'espace

$$S=S(p, p, p, p; W_0, W_1, W_2, W_3; E, F, E, F)\,.$$

D'après les propositions 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 4.4, 4.5, et la remarque 1.5, notons tout d'abord que

$$\begin{aligned}(4.9)\qquad & S=S(p, p, p, p; W_0, W_1, W_2, W_3; E, F, E, F) \\ & =S(p, p; w_1+w_3, w_1+w_3-1; E, F)\,.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après les propositions 4.4, 4.5 et d'après (4.9),

$$S=S(p, p; w_1, -w_0; S(p, p, p; W_0', W_1', W_2'; E, E, F), S(p, p, p; W_0', W_1', W_2'; F, E, F))\,,$$

W_j', $j=0, 1, 2$, étant définis par la formule (4.2). Or, d'après la proposition 4.4,

$$S(p, p, p; W_0', W_1', W_2'; E, E, F)=S(p, p; w_3, w_3-1; E, F)\,,$$

et d'après les propositions 4.1, 4.7, 1.5,

$$S(p, p, p; W_0', W_1', W_2'; F, E, F)=S(p, p; w_0+w_1+w_3, w_0+w_1+w_3-1; E, F)\,.$$

Par conséquent, nous avons l'égalité:

$$\begin{aligned}& S(p, p; w_1+w_3, w_1+w_3-1; E, F) \\ & =S(p, p; w_1, -w_0; S(p, p; w_3, w_3-1; E, F), S(p, p; w_0+w_1+w_3, w_0+w_1+w_3-1; E, F))\,,\end{aligned}$$

qui n'est que l'égalité (4.8) d'après notre choix de w_j, $j=0, 1, 2, 3$.

5. Non-équivalence de nos deux définitions.

Nous avons introduit deux espaces de moyenne $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ et $\underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$. Nous savons que $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \subset \underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$ (Proposition 1.14). Mais l'inclusion en sens inverse est, en général, fausse. Ici nous donnons un contre-exemple tel que $S(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E}) \neq \underline{S}(\vec{p}; \vec{\xi}; \vec{E})$. Nous commençons par la proposition suivante.

PROPOSITION 5.1. *Soient E_0, E_1, E_2 trois espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé munis des injections continues. Supposons que E_0, E_1, E_2 satisfassent aux conditions suivantes:*

$$\begin{cases} E_1 \cap E_2 = 0,\ E_2 \cap E_0 = E_2,\ E_2 \neq 0\ , \\ S(p_1, p_0; w_0, w_0-1; E_1, E_0) \supset E_2\ , \end{cases} \tag{5.1}$$

où $0 < w_j < 1$, $j = 0, 1, 2$, $w_0 + w_1 + w_2 = 1$, $1 \leqq p_0, p_1 < \infty$. Alors

$$S(p_0, p_1, p_2; W_0, W_1, W_2; E_0, E_1, E_2) \neq \underline{S}(p_0, p_1, p_2; W_0, W_1, W_2; E_0, E_1, E_2)\ .$$

Ici $1 \leqq p_2 < \infty$, et $W_0 = (w_1, w_2)$, $W_1 = (w_1 - 1, w_2)$, $W_2 = (w_1, w_2 - 1)$.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 4.3, si

$$S(p_0, p_1, p_2; W_0, W_1, W_2; E_0, E_1, E_2) = \underline{S}(p_0, p_1, p_2; W_0, W_1, W_2; E_0, E_1, E_2)\ ,$$

était vrai, nous aurions l'égalité:

$$\begin{aligned} &S(q_0, q_1; w_1, -w_0; S(p_0, p_2; w_2, w_2-1; E_0, E_2), S(p_1, p_2; w_2, w_2-1; E_1, E_2)) \\ &\quad = S(q_0', q_1'; w_1, -w_2; S(p_2, p_0; w_0, w_0-1; E_2, E_0), S(p_1, p_0; w_0, w_0-1, E_1, E_0))\ , \end{aligned} \tag{5.2}$$

où

$$\begin{aligned} &1/q_i = (w_0 + w_1)/p_i + w_2/p_2\ , \qquad i = 0, 1; \\ &1/q_0' = (w_1 + w_2)/p_2 + w_0/p_0\ , \qquad 1/q_1' = (w_1 + w_2)/p_1 + w_0/p_0\ . \end{aligned}$$

D'après (5.1), nous voyons, à l'aide de la proposition 1.19, que

$$\begin{aligned} &S(p_0, p_2; w_2, w_2-1; E_0, E_2) \supset E_2\ , \qquad S(p_1, p_2; w_2, w_2-1; E_1, E_2) = 0\ , \\ &S(p_2, p_0; w_0, w_0-1; E_2, E_0) \supset E_2\ , \qquad S(p_1, p_0; w_0, w_0-1; E_1, E_0) \supset E_2\ , \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} &S(q_0, q_1; w_1, -w_0; S(p_0, p_2; w_2, w_2-1; E_0, E_2), S(p_1, p_2; w_2, w_2-1; E_1, E_2)) = 0\ , \\ &S(q_0', q_1'; w_1, -w_2; S(p_2, p_0; w_0, w_0-1; E_2, E_0), S(p_1, p_0; w_0, w_0-1; E_1, E_0)) \supset E_2\ , \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire à l'égalité (5.2).

Comme choix d'espaces de Banach E_0, E_1, E_2 qui satisfont les conditions (5.1), nous donnons le suivant.

EXEMPLE 5.1. *Soit E un espace de Banach où est donné un opérateur A*

linéaire non borné dont le domaine $D(A)$ est dense dans E mais ne coïncide pas avec l'espace E entier. En outre supposons que l'opérateur A soit tel que, pour chaque $\lambda \geqq 0$, $(\lambda+A)^{-1}$ existe et soit un opérateur borné défini sur E avec l'estimation suivante:

$$\|(\lambda+A)^{-1}\|_{E\to E} \leqq M/(\lambda+1)\,, \qquad \lambda \geqq 0\,,$$

M étant une constante indépendante de λ. Soient $w_0, w_1, w_2, p_0, p_1, p_2$ definis de même que dans la proposition 5.1. *Nous notons que si $E \neq D(A)$, alors*

$$S(p_1, p_0; w_0, w_0-1; D(A), E) \supsetneqq D(A)\,. \tag{5.3}$$

Donc il existe un élément $f \in S(p_1, p_0; w_0, w_0-1; D(A), E)$ tel que $f \in D(A)$, en particulier $f \neq 0$. Désignons par F l'espace à une dimension engendré par f. Posons $E_0=E$, $E_1=D(A)$, et $E_2=F$. Alors les espaces ainsi définis E_0, E_1, E_2 satisfont aux conditions (5.1).

DÉMONSTRATION. L'assertion est évidente si nous admettons (5.3). Mais si

$$D(A)=S(p_1, p_0; w_0, w_0-1; D(A), E)$$

il s'ensuirait que

$$D(A^\alpha)=D(A) \quad \text{pour} \quad w_0<\alpha<1\,,$$

d'où A serait un opérateur borné, ce qui est absurde.

6. Espaces de moyenne relatifs aux domaines de plusieurs opérateurs non bornés commutatifs (I).

Nous nous donnons plusieurs opérateur linéaires non-bornés A_j, $j=1, \cdots, n$, à domaine dense dans un même espace de Banach E. Supposons que, pour chaque j, $j=1, \cdots, n$, l'opérateur $\lambda+A_j$ soit inversible pour tout λ, $\lambda \geqq 0$, et que $(\lambda+A_j)^{-1}$, $\lambda \geqq 0$, soit défini sur E et borné avec l'estimation:

$$\|(\lambda+A_j)^{-1}\|_{E\to E} \leqq M_j/(\lambda+1)\,, \qquad \lambda \geqq 0,\ (j=1, \cdots, n)\,. \tag{6.1}$$

De plus, nous supposons la commutabilité des opérateurs $(\lambda+A_j)^{-1}$ et $(\mu+A_k)^{-1}$:

$$(\lambda+A_j)^{-1}(\mu+A_k)^{-1}=(\mu+A_k)^{-1}(\lambda+A_j)^{-1} \tag{6.2}$$

pour $\lambda, \mu \geqq 0$, $j, k=1, \cdots, n$.

Notons que, pour chaque j, $j=1, \cdots, n$, le domaine $D(A_j^{m_j})$ de la puissance $A_j^{m_j}$, $m_j=1, 2, \cdots$, de l'opérateur A_j est un espace de Banach pour la norme:

$$D(A_j^{m_j}) \ni x \to \sum_{k=0}^{m_j} \|A_j^k x\|_E = \|x\|_{D(A_j^{m_j})}\,. \tag{6.3}$$

Grâce à la condition (6.1), nous pouvons supposer que:

$$(6.3') \qquad \|x\|_{D(A_j^{m_j})} = \|A_j^{m_j} x\|_E .$$

Nous calculerons dans la suite les espaces de moyenne

$$S(\overbrace{p, \cdots, p}^{n+1}; \xi_0, \cdots, \xi_n; E, D(A_1^{m_1}), \cdots, D(A_n^{m_n}))$$

et

$$\underline{S}(\overbrace{p, \cdots, p}^{n+1}; \xi_0, \cdots, \xi_0; E, D(A_1^{m_1}), \cdots, D(A_n^{m_n}))$$

sous les hypothèses (6.1) et (6.2) avec $1 \leqq p \leqq \infty$ et $\xi_j \in R^n$ satisfaisant à l'hypothèse sur ξ. Nous verrons, entre autres choses, que ces deux espaces coïncident.

Tout d'abord, nous introduisons un espace auquel nous réduisons nos espaces de moyenne. Dans la définition suivante, $1 \leqq p \leqq \infty$ et m_j, $j=1, \cdots, n$, sont entiers positifs (i.e., $m_j=1, 2, \cdots$), w_j, $j=0, \cdots, n$, sont réels tels que $w_j>0$ pour tout j, et que $w_0+ \cdots +w_n=1$.

DÉFINITION 6.1. *$B_p^{w_0, \cdots, w_n; E}(A_1^{m_1}, \cdots, A_n^{m_n})$ (en bref $B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})$) désigne l'espace de tous les éléments a tels que $a \in E$ et*

$$(6.4) \qquad e^{\sum_{k=1}^n w_k x_k} \left[\prod_{k=1}^n \{A_k(e^{x_k/m_k}+A_k)^{-1}\}^{m_k} \right] a \in L^p(E) .$$

$B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})$ est un espace de Banach pour la norme:

$$(6.5) \qquad \begin{aligned} & B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}}) \ni a \to \|a\|_{B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})} \\ & = \left\| e^{\sum_{k=1}^n w_k x_k} \left[\prod_{k=1}^n \{A_k(e^{x_k/m_k}+A_k)^{-1}\}^{m_k} \right] a \right\|_{L^p(E)} . \end{aligned}$$

Nous pouvons démontrer la proposition suivante de la façon analogue au cas $n=1$ (Grisvard [1], Komatsu [2]).

PROPOSITION 6.1. *Soient W_j, $j=0, \cdots, n$, donnés par la formule (4.1), c'est-à-dire,*

$$\begin{aligned} & W_0=(w_1, w_2, \cdots, w_n) , \\ & W_1=(w_1-1, w_2, \cdots, w_n) , \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & W_n=(w_1, \cdots, w_{n-1}, w_n-1) . \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$(6.6) \qquad \begin{aligned} & S(\overbrace{p, \cdots, p}^{n+1}; W_0, \cdots, W_n; E, D(A_1^{m_1}), \cdots, D(A_n^{m_n})) \\ & = \underline{S}(\overbrace{p, \cdots, p}^{n+1}; W_0, \cdots, W_n; E, D(A_1^{m_1}), \cdots, D(A_n^{m_n})) \\ & = B_p^{w_0, \cdots, w_n; E}(A_1^{m_1}, \cdots, A_n^{m_n}) . \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Nous aurons l'égalité (6.6) d'après la proposition 1.14 si nous montrons les inclusions:

$$\underline{S}=\underline{S}(p, \cdots, p; W_0, \cdots, W_n; E, D(A_1^{m_1}), \cdots, D(A_n^{m_n}))\subset B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}}), \tag{6.7}$$

et

$$B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}})\subset S(p, \cdots, p; W_0, \cdots, W_n; E, D(A_1^{m_1}), \cdots, D(A_n^{m_n}))=S. \tag{6.8}$$

(i) DÉMONSTRATION DE L'INCLUSION (6.7). Soit $a\in S$. Alors, de la définition de l'espace, nous tirons:

$$a=\sum_{j=0}^{n} v_j(x) \quad \text{presque partout dans } R^n,$$

où

$$e^{W_0(x)}v_0\in L^p(E), \quad \text{et} \quad e^{W_j(x)}v_j(x)\in L^p(D(A_j^{m_j})), \qquad j=1, \cdots, n.$$

Ceci dit, nous avons $a\in B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}})$ avec

$$||a||_{B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}})}\leqq\left[\prod_{k=1}^{n}(1+M_k)^{m_k}\right]||a||_{\underline{S}}. \tag{6.9}$$

En effet, nous avons les inégalités:

$$\left\|e^{W_0(x)}\left[\prod_{k=1}^{n}\{A_k(e^{x_k/m_k}+A_k)^{-1}\}^{m_k}\right]v_0(x)\right\|_E\leqq\left[\prod_{k=1}^{n}(1+M_k)^{m_k}\right]||e^{W_0(x)}v_0(x)||_E,$$

$$\left\|e^{W_0(x)}\left[\prod_{k=1}^{n}\{A_k(e^{x_k/m_k}+A_k)^{-1}\}^{m_k}\right]v_j(x)\right\|_E\leqq M_j^{m_j}\left[\prod_{k\neq j}(1+M_k)^{m_k}\right]||e^{W_j(x)}v_j(x)||_{D(A_j^{m_j})}, \qquad j=1, \cdots, n,$$

d'où suivent (6.4) et (6.9).

(ii) DÉMONSTRATION DE L'INCLUSION (6.8). Soit $a\in B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}})$. Posons

$$v(x)=\left[\prod_{k=1}^{n}\{A_k(e^{x_k/m_k}+A_k)^{-1}\}^{m_k}\right]a$$

et

$$u(x)=ce^{\sum_{k=1}^{n}x_k}\left[\prod_{k=1}^{n}\{A_k(e^{x_k/m_k}+A_k)^{-2}\}^{m_k}\right]a, \; c=\prod_{j=1}^{n}\frac{(2m_j-1)!}{[(m_j-1)!]^2}.$$

Notons $e^{W_0(x)}v(x)\in L^p(E)$ car $a\in B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}})$.

Or,

$$\begin{aligned} &||u(x)||_B\leqq c\left[\prod_{k=1}^{n}M_k^{m_k}\right]||v(x)||_B, \\ &||A_j^{m_j}u(x)||_B\leq c(1+M_j)^{m_j}\left[\prod_{k\neq j}M_k^{m_k}\right]||e^{x_j}v(x), \qquad j=1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Par conséquent,

$$u(x) \in L^{p,W_0}(E) \cap \bigcap_{j=1}^{n} L^{p,W_j}(D(A_j^{m_j})) .$$

Donc, si nous montrons

$$a = \int_{R^n} u(x)dx \tag{6.11}$$

et

$$||a||_S \leqq c_1 ||a||_{B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})} , \tag{6.12}$$

avec une constante c_1, alors la proposition sera démontrée. Comme (6.12) est une conséquence directe de (6.11), nous vérifions (6.11). En effet, par le changement des arguments: $t_j = e^{x_j/m_j}$, $j=1, \cdots, n$, de (6.11), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_{R^n} u(x)dx &= c\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \left[\prod_{k=1}^{n} t_k^{m_k-1} \{A_k(t_k+A_k)^{-2}\}^{m_k} \right] a dt_1 \cdots dt_n \\
&= \lim c \int_{r_1'}^{r_1} \cdots \int_{r_n'}^{r_n} \left[\prod_{k=1}^{n} t_k^{m_k-1} \{A_k(t_k+A_k)^{-2}\}^{m_k} \right] a dt_1 \cdots dt_n \\
&= \lim c(-1)^n \prod_{j=1}^{n} \Bigg[m_j^{-1} \sum_{k_j=0}^{m_j} \{m_j!(2m_j-k_j-2)!/((m_j-k_j-1)!(2m_j-1)!)\} \\
&\qquad \times t_j^{m_j-k_j-1} A_j^{m_j}(t_j+A_j)^{-2m_j+k_j+1} \Bigg] a \Bigg|_{\substack{t_1=r_1, \cdots, t_n=r_n \\ t_1=r_1', \cdots, t_n=r_n'}} \\
&= c\left\{ \prod_{j=1}^{n} [(m_j-1)!]^2/(2m_j-1)! \right\} a = a .
\end{aligned}$$

Ici, nous avons employé le théorème de Fubini et l'intégration par partie. Nous avons utilisé aussi que $\lim_{r\to\infty} r(r+A_j)^{-1}a = a$ et $\lim_{r\to\infty} A_j(r+A_j)^{-1}a = 0$, pour $a \in E$, $j=1, \cdots, n$, ce qui découle de (6.1) et du fait que $D(A_j)$ sont denses dans E.

De cette proposition, nous pouvons conclure que l'espace $B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})$ peut être obtenu par une récurrence d'espaces de moyenne de deux espaces tels que $S(p, p; \theta_k, \theta_k-1; E, D(A_j^{m_j}))$, d'après les propositions 4.1 et 4.2. Par exemple, pour le cas $n=2$, nous avons la proposition suivante grâce à la proposition 4.3.

PROPOSITION 6.2. *Soit* $n=2$. *Sous les hypothèses de la proposition* 6.1, *nous avons*

$$\begin{aligned}
B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}}) &= B^{w_0,w_1,w_2;E}(A_1^{m_1}, A_2^{m_2}) \\
&= S(p, p; w_1, -w_2; S(p, p; w_0, w_0-1; D(A_2^{m_2}), E), S(p, p; w_0, w_0-1; D(A_1^{m_1}), E)) .
\end{aligned}$$

Nous donnons une autre caractérisation de l'espace $B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})$.

PROPOSITION 6.3. *Sous les hypothèses de la proposition* 6.1, *nous avons, pour* $1 \leqq p \leqq \infty$,

$$B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}}) = S(p, p; w_1, w_1-1; \underline{E}, D(\underline{A}_1^{m_1})) , \tag{6.13}$$

où E *désigne l'espace de moyenne* $S(p, \cdots, p; W_0', \cdots, W_{n-1}'. E, D(A_2^{m_2}), \cdots, D(A_n^{m_n}))$ $W_j', j=0, \cdots, n-1$, *étant définis par la formule* (4.2), *et* $\underline{A}_1$ *désigne la restriction de l'opérateur* A_1 *dans l'espace* $\underline{E}$, *c'est-à-dire que* $\underline{A}_1$ *est opérateur linéaire fermé*: $\underline{A}_1 \underline{e} = A_1 \underline{e}$ *pour* $\underline{e} \in D(\underline{A}_1) = \{\underline{e} \in D(A_1) \cap \underline{E};\ A_1 \underline{e} \in \underline{E}\}$.

DÉMONSTRATION. Nous notons tout d'abord que

$$(\lambda + A_1)^{-1} \underline{E} \subset \underline{E}, \lambda \geqq 0 , \tag{6.14}$$

$$(\lambda + A_1)^{-1} \underline{e} = (\lambda + \underline{A}_1)^{-1} \underline{e} \quad \text{pour} \quad \underline{e} \in \underline{E}, \lambda \geqq 0 , \tag{6.15}$$

$$(\lambda + A_1)^{-1} E \subset D(A_1), \lambda \geqq 0 , \tag{6.15'}$$

$$A_1(\lambda + A_1)^{-1} \underline{e} = \underline{A}_1(\lambda + \underline{A}_1)^{-1} \underline{e} \quad \text{pour} \quad \underline{e} \in \underline{E}, \lambda \geqq 0 , \tag{6.15''}$$

et

$$\| (\lambda + A_1)^{-1} \|_{\underline{E} \to \underline{E}} \leqq M_1/(\lambda+1), \qquad \lambda \geqq 0 . \tag{6.16}$$

Démontrons que $B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}}) \subset S(p, p; w_0, w_0-1; \underline{E}, D(\underline{A}_1^{m_1}))$. Soit $a \in B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}})$. Alors nous avons

$$c e^{\sum_{k=1}^{n} w_k x_k} \left[\prod_{k=1}^{n} \{A_k(e^{x_k/m_k} + A_k)^{-1}\}^{m_k} \right] a \in L^p(E) . \tag{6.4}$$

D'après le théorème de Fubini, nous en déduisons

$$c e^{\sum_{k=2}^{n} w_k x_k} \left[\prod_{k=2}^{n} \{A_k(e^{x_k/m_k} + A_k)^{-1}\}^{m_k} \right] \times e^{w_1 x_1} \{A_1(e^{x_1/m_1} + A_1)^{-1}\}^{m_1} a \in L^p_{(x')}(E)$$

presque partout en x_1, où $x' = (x_2, \cdots, x_n)$ indique les arguments d'intégration. Par conséquent, nous voyons que, d'après la proposition 6.1,

$$c' e^{w_1 x_1} \{A_1(e^{x_1/m_1} + A_1)^{-1}\}^{m_1} a \in E , \qquad c' = (2m_1-1)!/[(m_1-1)!]^2 , \tag{6.17}$$

pour presque tout x_1, et que, d'après la définition de l'espace E,

$$c' e^{w_1 x_1} \{A_1(e^{x_1/m_1} + A_1)^{-1}\}^{m_1} a \in L^p_{(x_1)}(E) . \tag{6.18}$$

Or, de (6.15'') et de (6.18) il vient que

$$c' e^{w_1 x_1} \{\underline{A}_1(e^{x_1/m_1} + \underline{A}_1)^{-1}\}^{m_1} a \in L^p_{(x_1)}(E) , \tag{6.18'}$$

et, d'après (6.17), (6.14), et (6.15'), nous avons

$$a \in E\,. \tag{6.19}$$

Donc, d'après (6.16), (6.18′), (6.19) et du résultat de M. Grisvard (cf. Remarque 6.1 ci-dessous), nous avons $a \in S(p, p: w_1, w_1-1; \underline{E}, D(\underline{A}_1^{m_1}))$, et d'après la définition des normes,

$$\|a\|_{B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}})} = \|a\|_S\,, \qquad S = S(p, p; w_1, w_1-1; \underline{E}, D(\underline{A}_1^{m_1}))\,.$$

L'inclusion dans l'autre sens est montrée par le raisonnement inverse. La proposition a été ainsi démontrée.

REMARQUE 6.1. M. P. Grisvard a montré dans sa thèse [1] que, pour un opérateur linéaire A dans un espace de Banach E ayant pour résolvente $(\lambda+A)^{-1}$ à norme $M/(\lambda+1)$ pour tout $\lambda \geqq 0$, nous avons $\lim_{r\to\infty} r^j A^m (r+A)^{-m-j} a = 0$ pour tout a tel que $e^{wx}\{A(e^{x/m}+A)^{-1}\}^m a \in L^p(E)$, $w>0$, sans supposer que $D(A)$ soit dense dans E. L'opérateur A_1 ci-dessus est un tel opérateur, et nous pouvons caractériser l'espace de moyenne $S(p, p; w_1, w_1-1; \underline{E}, D(\underline{A}_1^{m_1}))$ par la formule (6.18′), la démonstration étant analogue à celle de la proposition 6.1.

Par la proposition 6.3, nous pouvons utiliser les résultats obtenus dans le cas $n=1$ pour étudier l'espace $B_p^{W:E}(A^m)$ (cf. P. Grisvard [1], H. Komatsu [2]).

PROPOSITION 6.4. *Sous les hypothèses de la proposition* 6.3, *nous avons, pour* m, l *entiers* $\geqq 0$ *tels que* $m_1 w_1 = m(1-\theta)+l\theta$, $0<\theta<1$,

$$B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}}) = S(p, p; \theta, \theta-1; D(\underline{A}_1^m), D(\underline{A}_1^l))\,, \qquad 1 \leqq p < \infty\,.$$

PROPOSITION 6.5. *Sous les hypothèses de la proposition* 6.3, *nous avons*

$$D(\underline{A}_1^{m+1}) \subset B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}}) \subset D(\underline{A}_1^m)\,, \qquad 1 \leqq p < \infty\,, \tag{6.20}$$

pour $m_1 w_1$ *non entier avec* $m = [m_1 w_1]$ *partie entière de* $m_1 w_1$;

$$D(\underline{A}_1^{m+2}) \subset B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}}) \subset D(\underline{A}_1^m)\,, \qquad 1 \leqq p < \infty\,, \tag{6.21}$$

pour $m_1 w_1$ *entier avec* $m = m_1 w_1 - 1$.

D'après la propriété d'interpolation, nous déduisons de ces deux propositions la

PROPOSITION 6.6. *Les trois conditions suivantes* (6.22), (6.23), *et* (6.24) *sur* a *sont équivalentes*:

$$a \in B_p^{W:E}(\vec{A}^{\vec{m}})\,; \tag{6.22}$$

$$a \in D(\underline{A}_1^m) \quad et \quad \underline{A}_1^m a \in S(p, p; \lambda, \lambda-1; \underline{E}, D(\underline{A}_1^l)) \tag{6.23}$$

avec m, l *entiers* $\geqq 0$ *tels que* $0 \leqq m < m_1 w_1$, $\lambda l + m = m_1 w_1$, $0<\lambda<1$;

$$a \in D(A_1^m) \quad et \quad A_1^m a \in S(p, p; \lambda, \lambda-1; E, D(A_1^l)) , \tag{6.24}$$

où m, l, λ sont ceux de (6.23).

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (6.22) et (6.23) est une conséquence de la propriété d'interpolation, des propositions 6.4, 6.5, et du fait que l'application $\underline{A}_1^m$ envoie $D(\underline{A}_1^k)$ continûment sur $D(A_1^{k-m})$ à inverse continue pour tout entier $k>m$ (cf. (6.16)). Il est évident que (6.24) se déduit de (6.23). Pour montrer que (6.23) s'ensuit de (6.24), il suffit de noter que $S(p, p; \lambda, \lambda-1; E, D(A_1^l)) \subset E$. En effet, de ce fait et de (6.14) il s'ensuit que $a \in \underline{E}$ et donc d'après la définition de $\underline{A}_1$ nous avons $a \in D(\underline{A}_1^m)$ et $A_1^m a = \underline{A}_1^m a$.

Pour avancer un peu plus loin, introduisons la définition suivante.

DÉFINITION 6.2. *Soit $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in R_+^n$*, i.e., $\sigma_j>0$, $j=1, \cdots, n$. *$C_p^{\sigma;E}(\vec{A}; \vec{m})$, $\vec{m}=(m_1, \cdots, m_n) \in N^n$, $m_j>\sigma_j$, $j=1, \cdots, n$, $1 \leqq p \leqq \infty$, désigne l'espace de tous les éléments $a \in E$ tels que*

$$e^{\sum_{j=1}^n \sigma_j x_j}\left[\prod_{j=1}^n \{A_j(e^{x_j}+A_j)^{-1}\}^{m_j}\right] a \in L^p(E) . \tag{6.25}$$

L'espace $C_p^{\sigma;E}(\vec{A}; \vec{m})$ est un espace de Banach pour la norme:

$$a \to \left\| e^{\sum_{j=1}^n \sigma_j x_j}\left[\prod_{j=1}^n \{A_j(e^{x_j}+A_j)^{-1}\}^{m_j}\right] a \right\|_{L^p(E)} . \tag{6.26}$$

De cette définition et de (6.4), nous avons la

PROPOSITION 6.7. *Soit $\vec{m}=(m_1, \cdots, m_n) \in N^n$ tel que $\sum_{j=1}^n \sigma_j/m_j<1$. Alors en posant $w_j=\sigma_j/m_j$, $j=1, \cdots, n$, et $w_0=1-\sum_{j=1}^n w_j$, nous avons*

$$C_p^{\sigma;E}(\vec{A}; \vec{m})=B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}}) .$$

Si $\vec{m}'=(m_1', \cdots, m_n') \in N^n$ est tel que $m_j \leqq m_j'$, $j=1, \cdots, n$, alors nous avons évidemment $C_p^{\sigma;E}(\vec{A}; \vec{m}) \subset C_p^{\sigma;E}(\vec{A}; \vec{m}')$. Nous allons montrer que, pour $1 \leqq p<\infty$, ces deux espaces coïncident.

PROPOSITION 6.8. *Soient $\vec{m}$, $\vec{m}' \in N^n$, $\vec{m}=(m_1, \cdots, m_n)$, $\vec{m}'=(m_1', \cdots, m_n')$ tels que $m_j \leqq m_j'$, $j=1, \cdots, n$. Alors, pour $1 \leqq p<\infty$, nous avons*

$$C_p^{\sigma;E}(\vec{A}; \vec{m})=C_p^{\sigma;E}(\vec{A}; \vec{m}') .$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que $C_p^{\sigma;E}(\vec{A}; \vec{m}) \supset C_p^{\sigma;E}(\vec{A}; \vec{m}')$ pour $\vec{m}'=(m_1+1, m_2, \cdots, m_n)$. Nous montrons ceci en employant l'inégalité suivante:

$$(6.27)\qquad \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x p}\left[\int_{-\infty}^{x} |F(y)|\,dy\right]^p dx\right\}^{1/p} \leqq \alpha^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha p y}\,|F(y)|^p dy\right]^{1/p}, \qquad \alpha>0\,.$$

D'abord notons que

$$(6.28)\qquad \frac{d}{dx_1}\{e^{x_1 m_1}[A_1(e^{x_1}+A_1)^{-1}]^{m_1}\} = m_1 e^{x_1 m_1}\{A_1(e^{x_1}+A_1)^{-1}\}^{m_1+1}\,,$$

d'où:

$$e^{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j}\left[\prod_{j=1}^{n}\{A_j(e^{x_j}+A_j)^{-1}\}^{m_j}\right]a = m_1 e^{x_1\sigma_1 - x_1 m_1}\int_{-\infty}^{x_1} e^{y m_1}\{A_1(e^{y}+A_1)^{-1}\}^{m_1+1}$$
$$\times\left[\prod_{j=2}^{n} e^{x_j\sigma_j}\{A_j(e^{x_j}+A_j)^{-1}\}^{m_j}\right]a\,dy\,.$$

Donc, si $a\in C_p^{\sigma;E}(\vec{A};\vec{m}')$, alors nous avons, d'après le théorème de Fubini et l'inégalité (6.27),

$$\left\| e^{\sum_{j=1}^{n} x_j\sigma_j}\left[\prod_{j=1}^{n}\{A_j(e^{x_j}+A_j)^{-1}\}^{m_j}\right]a\right\|_{L^p(E)}$$
$$\leqq m_1/(m_1-\sigma_1)\left\| e^{\sum_{j=1}^{n} x_j\sigma_j}\left[\prod_{j=1}^{n}\{A_j(e^{x_j}+A_j)^{-1}\}^{m_j'}\right]a\right\|_{L^p(E)}\,,$$

autrement dit, nous avons $a\in C_p^{\sigma;E}(\vec{A};\vec{m})$ et

$$\|a\|_{C_p^{\sigma;E}(\vec{A};\vec{m})} \leqq m_1/(m_1-\sigma_1)\,\|a\|_{C_p^{\sigma;E}(\vec{A};\vec{m}')}\,.$$

Cette proposition justifie la définition suivante.

DÉFINITION 6.2′. *Nous désignons $C_p^{\sigma;E}(\vec{A})$ au lieu de $C_p^{\sigma;E}(\vec{A};\vec{m})$, $1\leqq p<\infty$.*

PROPOSITION 6.9. *Soit $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in R_+^n$. Nous avons*

$$(6.29)\qquad C_p^{\sigma;E}(\vec{A})\subset\bigcap_{j=1}^{n} D(A_j^{m_j})\,,\qquad 1\leqq p<\infty\,,$$

où m_j est le plus grand entier $<\sigma_j$ pour tout $j=1,\cdots,n$;

(6.30) *A_j^m, $0\leqq m$: entier $<\sigma_j$, est un isomorphisme de l'espace $C_p^{\sigma;E}(\vec{A})$ sur l'espace $C_p^{\sigma';E}(\vec{A})$, $1\leqq p<\infty$, où $\sigma'=(\sigma_1',\cdots,\sigma_n')$ avec $\sigma_k'=\sigma_k$, $k\neq j$, et $\sigma_j'=\sigma_j-m$.*

DÉMONSTRATION. (6.29) est une conséquence de la proposition 6.5. Pour démontrer (6.30), nous pouvons supposer $j=1$. D'après (6.24) et d'après la proposition 6.7, $A_1^{m_1}$ est un isomorphisme de l'espace $C_p^{\sigma;E}(\vec{A})$ sur l'espace $S(p,p;\lambda,\lambda-1;E,D(A_1^k))$ avec $k\lambda=\sigma_1-m$. Si nous prenons λ assez petit (donc k assez grand) tel que $w_0=1-\lambda-\sum_{j=2}^{n}\sigma_j/m_j>0$ (m_j entiers), nous avons, d'après la proposition 6.3, $S(p,p;\lambda,\lambda-1;E,D(A_1^k))=B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})$ avec $w_1=\lambda$, $w_j=\sigma_j/m_j$, $j\geqq 2$,

$\vec{m}=(k, m_2, \cdots, m_n)$. Cet espace-ci coïncide avec l'espace $C_p^{\sigma';E}(A)$ d'après la proposition 6.7.

A propos de la relation (6.29), nous avons la proposition suivante un peu plus précise et qui découle de la proposition 6.3 et de ce que

$$S(p, p; w_1, w_1-1; E, D(A_1^{m_1}))\subset S(p, p; w_1, w_1-1; E, D(A_1^{m_1}))\ .$$

PROPOSITION 6.10. *Soit* $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)\in R_+^n$. *Nous avons, pour* $1\leqq p<\infty$,

$$C_p^{\sigma;E}(\vec{A})\subset \bigcap_{j=1}^{n} S(p, p; \sigma_j/m_j, \sigma_j/m_j-1; E, D(A_j^{m_j}))\ , \tag{6.29'}$$

chaque m_j, $j=1, \cdots, n$, *étant entier* $>\sigma_j$.

Notons également le résultat suivant.

PROPOSITION 6.11. *Soient* $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, $\sigma'=(\sigma_1', \cdots, \sigma_n')\in R_+^n$. *Si* $\sigma_j\leqq\sigma_j'$, $j=1, \cdots, n$, *nous avons*

$$C_p^{\sigma';E}(A)\subset C_p^{\sigma;E}(A)\ , \qquad 1\leqq p<\infty\ , \tag{6.31}$$

avec l'injection continue.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer (6.31) pour σ' tel que $\sigma_1'>\sigma_1$, $\sigma_j'=\sigma_j$, $j=2, \cdots, n$. D'après les propositions 6.3 et 6.7, nous avons, en choisissant convenablement les entiers m_j,

$$C_p^{\sigma';E}(\vec{A})=B_p^{W';E}(\vec{A}^{\vec{m}})=S(p, p; w_1', w_1'-1; E, D(A_1^{m_1}))\ ,$$

où $W'=(w_0', \cdots, w_n')$, $w_j'=\sigma_j'/m_j$, $j=1, \cdots, n$, $w_0'=1-\sum_{j=1}^{n} w_j'$, $(w_k'>0)$, mais

$$S(p, p; w_1', w_1'-1; E, D(A_1^{m_1}))\subset S(p, p; w_1, w_1-1; E, D(A_1^{m_1}))$$

avec l'injection continue. Ici, $w_1=\sigma_1/m_1<w_1'$. Ce dernier espace coïncide avec l'espace $B_p^{W;E}(A^m)$, $W=(w_0, \cdots, w_n)$, $w_1=\sigma_1/m_1$, $w_j=w_j'=\sigma_j/m_j$, $j=2, \cdots, n$, $w_0=1-\sum_{j=1}^{n} w_j$, d'après la proposition 6.3. Par conséquent, en appliquant encore une fois la proposition 6.7, nous avons (6.31).

REMARQUE 6.2. Si nous supposons, pour les opérateurs A_j, $j=1, \cdots, n$, à domaine dense dans l'espace E,

$$\|(\lambda+A_j)^{-1}\|_{E\to E}\leqq M_j/\lambda, \quad \lambda>0, \qquad j=1, \cdots, n\ , \tag{6.1'}$$

et

$$(\lambda+A_j)^{-1}(\mu+A_k)^{-1}=(\mu+A_k)^{-1}(\lambda+A_j)^{-1}, \quad \lambda, \mu>0, \quad j, k=1, \cdots, n\ , \tag{6.2'}$$

au lieu de (6.1) et (6.2), nous avons, en désignant par I l'application identique de l'espace E,

$$
\begin{aligned}
&S(\overbrace{p, \cdots, p}^{n+1}; W_0, \cdots, W_n; E, D(A_1^{m_1}), \cdots, D(A_n^{m_n})) \\
(6.6') \qquad &= S(\overbrace{p, \cdots, p}^{n+1}; W_0, \cdots, W_n; E, D(A_1^{m_1}), \cdots, D(A_n^{m_n})) \\
&= B_p^{w_0, \cdots, w_n; E}((A_1+I)^{m_1}, \cdots, (A_n+I)^{m_n}) ,
\end{aligned}
$$

car les opérateurs A_j+I, $j=1, \cdots, n$, satisfont (6.1) et (6.2) et $D(A_j^{m_j})=D((A_j+I)^{m_j})$. De ce fait, nous écrirons $B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})$ et $C_p^{a;E}(\vec{A})$ au lieu de $B_p^{W;E}((\overrightarrow{A+I})^{\vec{m}})$ et $C_p^{a;E}((\overrightarrow{A+I}))$ respectivement.

Nous passons maintenant au cas où l'un des opérateurs $-A_j$, $j=1, \cdots, n$, est le générateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu d'opérateurs bornés $\{G(t)\}_{t\geqq 0}$ dans l'espace E. D'abord précisons les hypothèses. Soient $A_1, \cdots, A_n$ opérateurs non-bornés à domaine dense dans l'espace de Banach E. Supposons que $A_2, \cdots, A_n$ satisfont les majorations (6.1) et que $-A_1$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés $\{G_1(t)\}_{t\geqq 0}$ dans l'espace E, donc a fortiori A_1 satisfait (6.1'); nous supposons aussi que les résolvantes sont commutatives (cf. (6.2)):

$$
(6.32) \qquad (\lambda+A_i)^{-1}(\mu+A_k)^{-1}=(\mu+A_k)^{-1}(\lambda+A_i)^{-1} , \qquad i, k=1, \cdots, n ,
$$

pour $\lambda, \mu \geqq 0$ (λ (ou μ)>0 si i (ou k)$=1$).

Nous entendons par un semigroupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés $\{G_1(t)\}_{t\geqq 0}$ une famille d'opérateur linéaires bornés dans E satisfaisant les conditions suivantes:

$$
(6.33) \qquad G_1(0)=I, G_1(t)G_1(s)=G_1(t+s) , \qquad t, s \geqq 0 ,
$$

$$
(6.34) \qquad G_1(t)x \to x \text{ fortement lorsque } t \to 0 \text{ pour tout } x \in E ,
$$

$$
(6.35) \qquad \| G_1(t) \|_{E\to E} \leqq N_1 , \qquad t \geqq 0 .
$$

Notons également (cf. K. Yosida [7])

$$
(6.36) \qquad (\lambda+A_1)^{-1}x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}G_1(t)x dt , \qquad \lambda>0 , \qquad x \in E ;
$$

$$
(6.37) \qquad G_1(t)x=\lim_{r\to\infty} \exp\{rtA_1(r+A_1)^{-1}\}x , \qquad t>0 , \qquad x \in E .
$$

Nous commençons par la proposition suivante qui nous permettra de réduire le problème au cas $n=1$.

PROPOSITION 6.12. *Pour* W_j', $j=0, \cdots, n-1$, *définis par* (4.2), *posons*

$$
E=S(\overbrace{p, \cdots, p}^{n}; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E, D(A_2^{m_2}), \cdots; D(A_n^{m_n})) , \qquad 1 \leqq p < \infty .
$$

Alors, pour chaque $t \geqq 0$ fixé, l'opérateur $G_1(t)$ envoie $\underline{E}$ dans $\underline{E}$. Si nous désignons par $G_1(t)$ la restriction de $G_1(t)$ dans l'espace $\underline{E}$, et par A_1 la restriction de A_1 dans $\underline{E}$ (cf. Proposition 6.3), *nous avons un semigroupe fortement continu $\{G_1(t)\}_{t \geqq 0}$ dans l'espace $\underline{E}$ et $-A_1$ son générateur infinitésimal.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer

$$G_1(t)x \in \underline{E} \quad \text{si} \quad x \in \underline{E}, \qquad t \geqq 0\,, \tag{6.38}$$

et

$$\| G_1(t)x - x \|_{\underline{E}} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad t \to 0, \qquad x \in \underline{E}\,. \tag{6.39}$$

En effet, d'après (6.38) et (6.39), $\{G_1(t)\}$, $t \geqq 0$, forment un semigroupe fortement continu dans $\underline{E}$, et nous voyons, d'après la formule (6.36) et sa version pour le semigroupe $G_1(t)$ et son générateur infinitésimal, que ce dernier coïncide avec l'opérateur $-\underline{A}_1$.

Or, (6.38) est une conséquence de la proposition 6.1 et de nos hypothèses (6.32) et (6.37). Pour démontrer (6.39), notons qu'il suffit de le montrer pour $x \in \bigcap_{j=2}^{n} D(A_j^{m_j})$, cette dernière intersection étant dense dans l'espace E $(1 \leqq p < \infty)$ grâce à la proposition 1.19. Alors d'après la proposition 2.7, nous avons

$$\| G_1(t)x - x \|_{\underline{E}} \leqq c \, \| G_1(t)x - x \|_E^{w_0 + w_1} \prod_{j=2}^{n} \| G_1(t) A_j^{m_j} x - A_j^{m_j} x \|_E^{w_j}\,,$$

d'où (6.39).

PROPOSITION 6.13. *Les trois conditions suivantes* (6.40), (6.41) *et* (6.43) *sont équivalentes l'une à l'autre*: *(m_j entiers suffisamment grands)*

$$a \in C_p^{\sigma;E}(\vec{A})\,, \quad 1 \leqq p < \infty\,, \quad \sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)\,, \quad \sigma_j = w_j m_j\,, \quad j = 1, \cdots, n\,; \tag{6.40}$$

$$a \in \underline{E} \quad \textit{et} \quad t^{-\sigma_1}(\underline{G}_1(t) - I)^{m_1} a \in L_{t*}^p(\underline{E})\,, \qquad 1 \leqq p < \infty\,, \tag{6.41}$$

où $L_{t*}^p(\underline{E})$ désigne l'espace de toutes les fonctions $u(t)$ définies sur R_+ à valeurs dans $\underline{E}$, fortement mesurables telles que

$$\int_0^\infty \| u(t) \|_{\underline{E}}^p dt/t < \infty\,; \tag{6.42}$$

$$a \in E \quad \textit{et} \quad t^{-\sigma_1}(G_1(t) - I)^{m_1} x \in L_{t*}^p(\underline{E})\,. \tag{6.43}$$

DÉMONSTRATION. D'après (6.38), l'équivalence de (6.41) et (6.43) est évidente. L'équivalence de (6.40) et (6.41) est une conséquence directe de la proposition 6.12 et du résultat de MM. Lions et Peetre ([3] Chapitre 8, § 2, th. 2.1; cf. Komatsu [2] § 4).

Ainsi pouvons-nous munir l'espace $C_p^{\sigma;E}(\vec{A})$, $1 \leqq p < \infty$, de la norme suivante qui est équivalente à la norme originelle (6.26):

$$a \to \| a \|_E + \left[\int_0^\infty \| t^{-\sigma_1}(G_1(t) - I)^{m_1} a \|_E^p dt/t \right]^{1/p}. \tag{6.44}$$

Nous voyons également le résultat suivant qui est une conséquence directe de la proposition précédente et de la récurrence sur k.

PROPOSITION 6.14. *Supposons que, pour tout j, $j=1, \cdots, k$, $k \leqq n$, $-A_j$ soit le générateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu $\{G_j(t)\}_{t \geqq 0}$, que A_j, $j=k+1, \cdots, n$, satisfont les conditions* (6.1), *et que tous les A_j satisfont les relations* (6.32) *(avec une modification nécessaire, i.e. λ, $\mu \geqq 0$ ou λ, $\mu > 0$ d'après les indices). Alors l'espace $C_p^{\sigma;E}(\vec{A})$, $1 \leqq p < \infty$, coïncide avec l'espace de tous les éléments $a \in E$ tels que*

$$a \in E(k)$$

et

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left\| \left[\prod_{j=0}^{i} t_{k-j}^{\sigma_{k-j}} (G_{k-j}(t_{k-j}) - I)^{m_{k-j}} \right] a \right\|_{E(k)}^p \frac{dt_{k-i}}{t_{k-i}} \cdots \frac{dt_k}{t_k} < \infty , \tag{6.45}$$

pour $i=0, \cdots, k-1$. Ici $E(k) = C_p^{(\sigma_{k+1}, \cdots, \sigma_n);E}(A_{k+1}, \cdots, A_n)$, $k<n$, et $E(n)=E$.

En particulier, si pour tout j, $j=1, \cdots, n$, $-A_j$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe $\{G_j(t)\}_{t \geqq 0}$ fortement continu, nous pouvons munir l'espace $C_p^{\sigma;E}(\vec{A})$ de la norme suivante qui est équivalente à la norme originelle (6.26):

$$a \to \| a \|_E + \sum_{i=0}^{n} \left[\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left\| \prod_{j=0}^{n} t_{k-j}^{\sigma_{k-j}} (G_{k-j}(t_{k-j}) - I)^{m_{k-j}} a \right\|_{E(k)}^p \frac{dt_{k-i}}{t_{k-i}} \cdots \frac{dt_k}{t_k} \right]^{1/p}. \tag{6.46}$$

7. Espaces de moyenne relatifs aux domaines de plusieurs opérateurs (II).

Soient E_0 et E_1 deux espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathscr{E}$ munis des injections continues. Nous nous donnons n opérateurs linéaires, continus et permutables A_j, $j=1, \cdots, n$, tels que, pour tout λ, $\lambda \geq 0$, $\lambda + A_j$ soient des automorphismes de l'espace $\mathscr{E}$. Désignons par $A_{j;i}$, $(j=1, \cdots, n;\ i=0, 1)$, la restriction à l'espace E_i de l'opérateur A_j, c'est à dire que l'opérateur $A_{j;i}$ est défini comme suit:

(7.1) le domaine de définition $D(A_{j;i})$ coïncide avec l'espace de tous les éléments $a \in E_i$ tels que $A_j a$ retombent dans l'espace E_i;

$$A_{j;i} a = A_j a \quad \text{pour} \quad a \in D(A_{j;i}) . \tag{7.2}$$

Il est clair que l'opérateur $A_{j;i}$ ainsi défini est fermé.

Supposons en plus que tout $A_{j;i}$, $(j=1, \cdots, n;\ i=0, 1)$, satisfait les conditions (6.1) et (6.2). Rappelons celles-ci: pour tout λ, $\lambda \geqq 0$, $(\lambda+A_{j;i})^{-1}$ est défini sur E_i et borné avec l'estimation:

$$\|(\lambda+A_{j;i})^{-1}\|_{E_i \to E_i} \leqq M_{j;i}/(\lambda+1),\ \lambda \geqq 0\,, \tag{7.3}$$

avec une constante $M_{j;i}>0$; nous avons, pour λ, $\mu \geqq 0$,

$$(\lambda+A_{j;i})^{-1}(\mu+A_{k;i})^{-1}=(\mu+A_{k;i})^{-1}(\lambda+A_{j;i})^{-1}\,, \tag{7.4}$$

$(j, k=1, \cdots, n;\ i=0, 1)$.

D'après les résultats de la section 6, nous pouvons définir deux espaces $C_p^{\sigma;E_0}(\vec{A}_0)$ pour les $A_{j;0}$ et $C_p^{\sigma;E_1}(\vec{A}_1)$ pour les $A_{j;1}$, $1 \leqq p < \infty$. Nous allons examiner la propriété d'immersion:

$$C_p^{\sigma;E_0}(\vec{A}_0) \subset C_p^{\sigma';E_1}(\vec{A}_1)\,. \tag{7.5}$$

Pour cela, nous posons une hypothèse:

(7.6) Pour tout $\lambda_j \geqq 0$, $j=1, \cdots, n$, l'opérateur $(\lambda_1+A_1)^{-1} \cdots (\lambda_n+A_n)^{-1}$ considéré comme un opérateur de l'espace E_0 dans l'espace E_1 est défini sur E_0 et borné avec l'estimation suivante:

$$\|(\lambda_1+A_1)^{-1} \cdots (\lambda_n+A_n)^{-1}\|_{E_0 \to E_1} \leqq M(\lambda_1+1)^{\tau_1-1} \cdots (\lambda_n+1)^{\tau_n-1}\,, \tag{7.7}$$

où τ_j, $j=1, \cdots, n$, et M sont des constantes positives indépendantes du choix de λ_j.

Alors comme dans le cas $n=1$ (Yoshikawa [6]), nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION 7.1. *Supposons les hypothèses* (7.1)-(7.4) *et* (7.6) *verifiées. Si* $\sigma_j > \tau_j$, $j=1, \cdots, n$, *alors nous avons, avec l'injection continue,*

$$C_p^{\sigma;E_0}(\vec{A}_0) \subset C_p^{\sigma';E}(\vec{A}_1)\,, \qquad 1 \leq p < \infty\,, \tag{7.5}$$

où $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, $\sigma'=(\sigma'_1, \cdots, \sigma'_n)$ *et* $\sigma'_j=\sigma_j-\tau_j$, $j=1, \cdots, n$.

DÉMONSTRATION. D'abord nous nous ramenons au cas où

$$0<\tau_j<1\,, \qquad j=1, \cdots, n\,, \tag{7.8}$$

en particulier, nous avons

$$(\lambda_1+1)^{\tau_1-1} \cdots (\lambda_n+1)^{\tau_n-1} \leq \lambda_1^{\tau_1-1} \cdots \lambda_n^{\tau_n-1} \tag{7.9}$$

pour $\lambda_j>0$, $j=1, \cdots, n$.

En effet, posons

$$E_\theta = E_{\theta,q} = S(q, q; \theta, \theta-1; E_0, E_1)\,, \qquad 0<\theta<1,\ 1\leq q<\infty\,. \tag{7.10}$$

Alors d'après les hypothèses (7.3) et (7.4), les restrictions $A_{j;\theta}$ à E_θ des opérateurs A_j, $j=1, \cdots, n$, satisfont les conditions (6.1) et (6.2), et $D(A_{j;\theta})=S(q, q; \theta, \theta-1; D(A_{j;0}), D(A_{j;1}))$ sont denses dans E_θ. Ainsi pouvons-nous définir l'espace $C_p^{\sigma;E}(\vec{A}_\theta)$, $1\leq p<\infty$.

Or, d'après la propriété d'interpolation (cf. Proposition 2.2) et les propositions 4.7 et 4.8, nous avons que, pour tout $\lambda_j\geq 0$, $j=1, \cdots, n$, l'opérateur $(\lambda_1+A_1)^{-1}\cdots(\lambda_n+A_n)^{-1}$ considéré comme opérateur de l'espace E_θ dans l'espace $E_{\theta'}$, $0\leq\theta<\theta'\leq 1$, est défini sur E_θ et borné avec l'estimation:

$$\begin{aligned} &\|(\lambda_1+A_1)^{-1}\cdots(\lambda_n+A_n)^{-1}\|_{E_\theta\to E_{\theta'}} \\ &\qquad \leq M_{\theta,\theta'}(1+\lambda_1)^{\tau_1(\theta'-\theta)-1}\cdots(1+\lambda_n)^{\tau_n(\theta'-\theta)-1} \end{aligned} \tag{7.11}$$

où $M_{\theta,\theta'}$ est une constante positive indépendante du choix de λ_j. Soient θ_k, $k=0, \cdots, N$, tels que $0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{N-1}<\theta_N=1$, et que $\tau_j^{(k)}=\tau_j(\theta_{k+1}-\theta_k)<1$, $k=0, \cdots, N-1$; $j=1, \cdots, n$. Alors

$$\sum_{k=0}^{N-1}\tau_j^{(k)}=\tau_j\,, \qquad j=1, \cdots, n\,, \tag{7.12}$$

et l'opérateur $(\lambda_1+A_1)^{-1}\cdots(\lambda_n+A_n)^{-1}$, $(\lambda_j\geq 0)$, est continu de l'espace E_{θ_k} dans l'espace $E_{\theta_{k+1}}$ avec l'estimation:

$$\begin{aligned} &\|(\lambda_1+A_1)^{-1}\cdots(\lambda_n+A_n)^{-1}\|_{E_{\theta_k}\to E_{\theta_{k+1}}} \\ &\qquad \leq M_{\theta_k,\theta_{k+1}}(\lambda_1+1)^{\tau_1^{(k)}-1}\cdots(\lambda_n+1)^{\tau_n^{(k)}-1} \end{aligned} \tag{7.13}$$

pour $k=0, \cdots, N$.

Ainsi voyons-nous, d'après (7.12) et (7.13), que pour démontrer l'immersion (7.5) générale il suffit de répéter l'immersion (7.5) avec l'hypothèse supplémentaire (7.8).

Nous allons démontrer la proposition en supposant (7.8) verifié. Soit $a\in C_p^{\sigma;E}(\vec{A}_0)$. D'après les propositions 6.7 et 6.8, si nous prenons les entiers m_j, $j=1, \cdots, n$, suffisamment grands, nous avons

$$C_p^{\sigma;E_0}(\vec{A}_0)=B^{W;E_0}(\vec{A}_0^{\vec{m}})=B_p^{\underline{W};E_0}(\vec{A}_0^{\vec{\underline{m}}})\,, \tag{7.14}$$

où $\vec{m}=(m_1, \cdots, m_n)$, $\underline{m}_j=m_j+1$; $W=(w_0, \cdots, w_n)$, $0<w_j=\sigma_j/m_j<1$, $j=1, \cdots, n$, $w_0=1-w_1-\cdots-w_n>0$; $\underline{W}=(\underline{w}_0, \cdots, \underline{w}_n)$, $0<\underline{w}_j=\sigma_j/\underline{m}_j<1$, $j=1, \cdots, n$, $\underline{w}_0=1-\underline{w}_1-\cdots-\underline{w}_n>0$.

Posons

$$u(x)=\left[\prod_{j=1}^{n} e^{m_j x_j}\{A_{j;0}(e^{x_j}+A_{j;0})^{-2}\}^{m_j}\right]a\ , \tag{7.15}$$

$$\underline{u}(x)=\left[\prod_{j=1}^{n} e^{(m_j+1)x_j}\{A_{j;0}(e^{x_j}+A_{j;0})^{-2}\}^{m_j+1}\right]a\ , \tag{7.16}$$

et

$$v(x)=\left[\prod_{j=1}^{n}\{A_{j;0}(e^{x_j}+A_{j;0})^{-1}\}^{m_j}\right]a\ . \tag{7.17}$$

Alors nous avons, d'après la démonstration de la proposition 6.1,

$$u_m(y)\in L^{p,W_0}(E_0)\cap\bigcap_{j=1}^{n} L^{p,W_j}(D(A_{j;0}^{m_j}))\ , \tag{7.18}$$

$$u_m(z)\in L^{p;\underline{W}_0}(E_0)\cap\bigcap_{j=1}^{n} L^{p;\underline{W}_j}(D(A_{j;0}^{m_j+1}))\ , \tag{7.19}$$

où $u_m(y)=u(m_1y_1,\cdots,m_ny_n)$, $\underline{u}_m(z)=u(\underline{m}_1z_1,\cdots,\underline{m}_nz_n)$, et W_j, $\underline{W}_k$ sont définis de w_r, $\underline{w}_s$ par la formule (4.1). En particulier, nous avons

$$a=\text{const.}\int_{R^n}\underline{u}_{\underline{m}}(z)dz=\text{const.}\int_{R^n}\underline{u}(x)dx \tag{7.20}$$

dans l'espace E_0. Aussi notons-nous que $v\in L^{p;\sigma}(E_0)$ et

$$||a||_{C_p^{\sigma;E_0}(\vec{A}_0)}=||e^{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j}v(x)||_{L^p(E_0)}\ . \tag{7.21}$$

Or, d'après les hypothèses (7.7) et (7.8), nous avons

$$||\underline{u}(x)||_{E_1}\leqq Le^{\sum_{j=1}^{n}\tau_j x_j}||u(x)||_{E_0}\leqq L'e^{\sum_{j=1}^{n}\tau_j x_j}||v(x)||_{E_0}\ , \tag{7.22}$$

et

$$\begin{aligned}||A_{j;1}^{m_j}\underline{u}(x)||_{E_1}&\leqq Le^{\sum_{j=1}^{n}\tau_j x_j}||A_{j;0}^{m_j}u(x)||_{E_0}\\ &\leqq L'e^{\sum_{j=1}^{n}\tau_j x_j+m_j x_j}||v(x)||_{E_0}\end{aligned} \tag{7.23}$$

pour $j=1,\cdots,n$, où L, L' sont des constantes positives.

Il s'ensuit donc que:

$$u(x)\in L^{p,\zeta_0}(E_1)\cap\bigcap_{j=1}^{n} L^{p,\zeta_j}(D(A_{j;1}^{m_j}))\ , \tag{7.24}$$

où

$$\begin{aligned}&\zeta_0=(\sigma_1-\tau_1,\cdots,\sigma_n-\tau_n)\ ,\\ &\zeta_1=(\sigma_1-\tau_1-m_1,\sigma_2-\tau_2,\cdots,\sigma_n-\tau_n)\ ,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\zeta_n=(\sigma_1-\tau_1,\cdots,\sigma_{n-1}-\tau_{n-1},\sigma_n-\tau_n-m_n)\ .\end{aligned}$$

Or, pour $j=1, \cdots, n$,

$$\Delta_j(\vec{\zeta})/\Delta(\vec{\zeta})=(\sigma_j-\tau_j)/m_j=\bar{w}_j\ .$$

D'après le choix de m_j, et les hypothèses, nous avons

$$0<\bar{w}_j<1,\ j=1, \cdots, n, \quad \text{et} \quad \bar{w}_0=1-\bar{w}_1- \cdots -\bar{w}_n>0\ .$$

Ainsi avons-nous

$$b=\int u(x)dx \in S(\overbrace{p, \cdots, p}^{n+1}; \bar{W}_0, \cdots, \bar{W}_n; E_1, D(A_{1;1}^{m_1}), \cdots, D(A_{n;1}^{m_n}))$$

où $\bar{W}_j$ sont définis d'après $\bar{w}_k$ par la formule (4.1).

D'après (7.20),

$$b=\text{const.}\, a \quad \text{dans l'espace} \quad E_0+E_1\ ,$$

et grâce aux propositions 6.1 et 6.7,

$$S(\overbrace{p, \cdots, p}^{n+1}; \bar{W}_0, \cdots, \bar{W}_n; E, D(A_{1;1}^{m_1}), \cdots, D(A_{n;1}^{m_n}))=C_p^{\sigma';E_1}(\vec{A}_1)\ ,$$

où $\sigma'=(\sigma'_1, \cdots, \sigma'_n)$ avec $\sigma'_j=\sigma_j-\tau_j$, $j=1, \cdots, n$.

Par conséquent,

$$a \in C_p^{\sigma';E_1}(\vec{A}_1)\ ,$$

et

$$||a||_{C_p^{\sigma';E_1}(\vec{A}_0)} \leq \text{const.}\ ||a||_{C_p^{\sigma;E_0}(\vec{A}_0)}\ ,$$

d'après (7.21), (7.22), (7.23) et (7.24).

8. Espaces de moyenne relatifs aux domaines de plusieurs opérateurs (III).

Nous examinons une espèce de théorèmes de trace pour l'espace $C_p^{\sigma;E}(\vec{A})$ pour un choix particulier des opérateurs $A_1, \cdots, A_n$.

Soit F un espace de Banach dans lequel sont donnés $n-1$ opérateurs $b_2, \cdots, b_n$ linéaires non-bornés dont les domaines $D(b_j)$ sont denses dans l'espace F. Supposons que, pour tout $\lambda \geqq 0$, $b_j+\lambda$, $j=2, \cdots, n$, sont invertibles, d'inverses définis sur F et bornés avec les estimations:

$$||(\lambda+b_j)^{-1}||_{F\to F} \leqq M_j/(\lambda+1)\ , \qquad j=2, \cdots, n, (\lambda \geq 0)\ . \tag{8.1}$$

De plus supposons que les $(\lambda+b_j)^{-1}$ sont permutables:

$$(\lambda+b_j)^{-1}(\mu+b_k)^{-1}=(\mu+b_k)^{-1}(\lambda+b_j)^{-1}\ , \tag{8.2}$$

pour $\lambda, \mu \geqq 0$; $j, k=2, \cdots, n$.

Soit $E=L^p(R_+; F)$, c'est-à-dire, l'espace de toutes les fonctions $u(t)$ définies sur la demi-droite positive R_+ à valeurs dans l'espace F, fortement measurables, et satisfaisant

$$(8.3) \qquad ||u||_E=\left[\int_0^\infty ||u(t)||_F^p dt\right]^{1/p}<\infty .$$

L'espace E est un espace de Banach pour la norme donnée par (8.3). Définissons les opérateur A_j, $j=1, \cdots, n$, dans l'espace E.

L'opérateur A_1 est défini comme suit:

$$(8.4) \qquad (A_1u)(t)=u(t)-u'(t) \quad \text{pour} \quad u \in D(A_1) ,$$

où le domaine $D(A_1)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $u(t)$ telles que $u'(t)$ au sens fort existent et appartiennent à l'espace E.

Pour tout $j=2, \cdots, n$, l'opérateur A_j est défini comme suit:

$$(8.5) \qquad (A_ju)(t)=b_j(u(t)) \quad \text{pour} \quad u \in D(A_j), (j=2, \cdots, n) ,$$

où le domaine $D(A_j)$ est l'ensemble de tous les éléments $u(t) \in E$ tels que $u(t) \in D(b_j)$ pour presque tout $t>0$ et que les fonctions $t \to b_ju(t) \in E$. Il est clair que, pour $j=2, \cdots, n$,

$$(8.6) \qquad D(A_j^k)=L^p(R_+; D(b_j^k)) , \qquad k=1, 2, 3, \cdots .$$

D'après les définitions des opérateurs A_j, $j=1, \cdots, n$, nous voyons que ces opérateurs ont des domaines denses dans l'espace E et satisfont les conditions (6.1) et (6.2). Par conséquent, nous pouvons définir l'espace $C_p^{\sigma;E}(\vec{A})$, $1 \leqq p<\infty$, $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in R_+^n$.

PROPOSITION 8.1.

$$C_p^{\sigma;E}(\vec{A})=S(p, p; w_1, w_1-1; L^p(R_+; C_p^{\sigma';F}(\vec{b})), D(\underline{A}_1^{m_1})) ,$$

où $1 \leqq p<\infty$, $\sigma'=(\sigma_2, \cdots, \sigma_n)$, m_1 *entier* >0 *tel que* $w_1m_1=\sigma_1$, $0<w_1<1$; $\underline{A}_1$ *est la restriction de l'opérateur* A_1 *dans l'espace* $L^p(R_+; C_p^{\sigma';F}(\vec{b}))$.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 6.7, si l'on prend suffisamment grands des entiers $m_j>0$, $j=1, \cdots, n$, on a

$$C_p^{\sigma;E}(\vec{A})=B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})$$

avec $W=(w_0, \cdots, w_n)$, $w_j=\sigma_j/m_j$, $j=1, \cdots, n$, $w_0=1-\sum_{j=1}^n w_j>0$. Or, d'après la proposition 6.3,

$$B_p^{W;E}(\vec{A}^{\vec{m}})=S(p, p; w_1, w_1-1; \underline{E}, D(\underline{A}_1^{m_1})) ,$$

où

$$E=S(\overbrace{p, \cdots, p}^{n}; W_0', \cdots, W_{n-1}'; E, D(A_2^{m_2}), \cdots, D(A_n^{m_n}))$$

avec W_j' définis par la formule (4.2), et A_1 est la restriction de l'opérateur A_1 à l'espace E.

Mais comme $E=L^p(R_+; F)$ et $D(A_j^{m_j})=L^p(R_+; D(b_j^{m_j}))$, $j=2, \cdots, n$, nous avons grâce à la proposition 3.1,

$$E=L^p(R_+; S(\overbrace{p, \cdots, p}^{n}; W_0', \cdots, W_{n-1}'; F, D(b_2^{m_2}), \cdots, D(b_n^{m_n}))\ .$$

Enfin, en appliquant de nouveau les propositions 6.7 et 6.3,

$$E=L^p(R_+; C_p^{\sigma';F}(\vec{b}))\ ,$$

d'où la proposition.

Grâce à cette proposition, nous pouvons appliquer les théorèmes de trace de M. P. Grisvard ([1], Chapitre 2, théorèmes 2.1 et 3.1), et nous obtenons la

PROPOSITION 8.2. *L'application*

$$C_p^{\sigma;E}(\vec{A}) \ni u \to \{u(0), u'(0), \cdots, u^{(k)}(0)\} \in C_p^{\sigma';F}(b)^{k+1}$$

(où k désigne le plus grand entier $<\sigma_1-1/p$) est linéaire continue et admet un inverse à gauche linéaire continu.

9. Quelques exemples.

Nous assemblons ici divers résultats.

9.1. Pour commencer nous considérons un cas particulier dans lequel E est un espace de Hilbert et A, B sont deux opérateurs linéaires auto-adjoints définis positifs (c'est à dire $A, B \geqq 1$) dans l'espace E. Supposons en outre que

$$A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}\ . \tag{9.1}$$

Soient $\{E(\lambda)\}$ et $\{F(\mu)\}$ les résolutions d'identité associées respectivement à l'opérateur A et à l'opérateur B:

$$A=\int_1^\infty \lambda E(d\lambda)\ , \tag{9.2}$$

$$B=\int_1^\infty \mu F(d\mu)\ . \tag{9.3}$$

De (9.1), nous avons

$$E(\lambda)F(\mu)=F(\mu)E(\lambda)\ , \qquad 1 \leqq \lambda, \mu \leqq \infty\ . \tag{9.4}$$

PROPOSITION 9.1. *Soient A et B deux opérateurs linéaires auto-adjoints*

définis positifs ($\geqq 1$) *dans un espace de Hilbert* E. *Supposons* (9.1)-(9.4) *verifiés. Alors nous avons, pour* $\sigma, \tau > 0$,

$$C_2^{(\sigma,\tau);E}(A, B) = S(2, 2; \tau/(\sigma+\tau), -\sigma/(\sigma+\tau); D(A^{\sigma+\tau}), D(B^{\sigma+\tau})) \tag{9.5}$$
$$= \left\{ x \in E; \int_1^\infty \int_1^\infty \lambda^{2\sigma} \mu^{2\tau} ||E(d\lambda)F(d\mu)x||_E^2 < \infty \right\} .$$

DÉMONSTRATION. La première égalité résulte de la proposition 6.2, en choisissant $A_1 = A$, $A_2 = B$, $m_1 = m_2 = m$ suffisamment grand, de ce que

$$S(2, 2; w, w-1; D(A^m), E) = D(A^{m(1-w)}) , \qquad 0 < w < 1 , \tag{9.6}$$

et du résultat correspondant à l'opérateur B. Montrons (9.6). Nous savons que pour que $x \in S(2, 2; w, w-1; D(A^m), E)$ il faut et il suffit que

$$\int_0^\infty t^{2(1-w)m-1} ||A^m(t+A)^{-m}x||_E^2 dt < \infty .$$

Or, d'après la résolution d'identité,

$$||A^m(t+A)^{-m}x||_E^2 = \int_1^\infty \lambda^{2m}(t+\lambda)^{-2m} ||E(d\lambda)x||_E^2 .$$

Par conséquent, grâce au théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} +\infty &> \int_0^\infty t^{2m(1-w)-1} ||A^m(t+A)^{-m}x||_E^2 dt \\ &= \int_1^\infty \left\{ \int_0^\infty t^{2m(1-w)-1} \lambda^{2m}(t+\lambda)^{-2m} dt \right\} ||E(d\lambda)x||_E^2 \\ &= c_{m,w} \int_1^\infty \lambda^{2m(1-w)} ||E(d\lambda)x||_E^2, \quad c_{m,w} = \int_0^\infty s^{2m(1-w)-1}(s+1)^{-2m} ds , \end{aligned}$$

ce qui veut dire que $x \in D(A^{m(1-w)})$.

Pour montrer la deuxième égalité de (9.5), notons d'abord que pour que $x \in C_2^{(\sigma,\tau);E}(A, B)$ il faut et il suffit que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty s^{2\sigma-1} t^{2\tau-1} ||A^m(s+A)^{-m} B^n(t+B)^{-n}x||_E^2 ds dt < \infty , \tag{9.7}$$

d'après la définition de l'espace et par un changement des variables (m, n: entiers, $m > \sigma$, $n > \tau$). Or, d'après (9.4), nous avons de la façon analogue à un simple opérateur,

$$\begin{aligned} &||A^m(s+A)^{-m} B^n(t+B)^{-n}x||_E^2 \\ &= \int_1^\infty \int_1^\infty \lambda^{2m}(s+\lambda)^{-2m} \mu^{2n}(t+\mu)^{-2n} ||E(d\lambda)F(d\mu)x||_E^2 . \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (9.7) et le théorème de Fubini, nous avons

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \lambda^{2\sigma}\mu^{2\tau}\|E(d\lambda)F(d\mu)x\|_E^2<\infty\ .$$

9.2. Soient R_x^n l'espace euclidien à dimension n et R_ξ^n son espace dual $(x=(x_1,\cdots,x_n),\ \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n),\ \xi(x)=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)$. Considérons l'espace $L^2(R_x^n)$. Posons

$$A_i=\mathscr{F}^{-1}(1+|\xi_i|)\mathscr{F}\ ,\qquad i=1,\cdots,n\ , \tag{9.8}$$

où $\mathscr{F}: L^2(R_x^n)\to L^2(R_\xi^n)$ est la transformation de Fourier

$$(\mathscr{F}f)(\xi)=\int_{R^n} e^{i\xi(x)}f(x)dx \quad \text{pour} \quad f\in L^2(R_x^n)\ .$$

Nous voyons que les opérateurs A_i, $i=1,\cdots,n$, définis par (9.8) sont à domaine dense et satisfont les conditions (6.1) et (6.2).

PROPOSITION 9.2. *Soient $\sigma_j>0$, $j=1,\cdots,n$. Alors les deux conditions suivantes* (9.9) *et* (9.10) *sont équivalentes.*

$$f\in C_2^{(\sigma_1,\cdots,\sigma_n);E}(A_1,\cdots,A_n)\ . \tag{9.9}$$

$$(1+|\xi_1|)^{\sigma_1}\cdots(1+|\xi_n|)^{\sigma_n}\mathscr{F}f(\xi)\in L^2(R_\xi^n)\ . \tag{9.10}$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition de l'espace, pour que (9.9) ait lieu il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\int_{R_\xi^n}\prod_{j=1}^n t_j^{2\sigma_j-1}(1+|\xi_j|)^{2m_j}(t_j+1+|\xi_j|)^{-2m_j}|\mathscr{F}f(\xi)|^2d\xi dt_1\cdots dt_n$$

soit finie. Ici les m_j sont des entiers respectivement plus grands que σ_j. En appliquant le théorème de Fubini, nous avons (9.10).

9.3. Nous signalons quelques problèmes que nous pouvons traiter dans le cadre des espaces introduits dans la section 6. L'intérêt de developpement est cependant d'obtenir plutôt une espèce de théorèmes de régularité.

Soit $E=L^p((\bar{R}_+)^2)$, $1\leq p<\infty$. Nous désignons par (x,y) le point générique du quadrant $(\bar{R}_+)^2=\{(x,y);\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$. Dans l'espace E sont donnés quatre opérateurs:

$$(A_0f)(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \text{pour} \quad f\in D(A_0)\ , \tag{9.11}$$

$$(A_1f)(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \text{pour} \quad f\in D(A_1)\ , \tag{9.12}$$

$$(B_0f)(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \quad \text{pour} \quad f\in D(B_0)\ , \tag{9.13}$$

et

$$(B_1 f)(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad \text{pour} \quad f \in D(B_1)\,, \tag{9.14}$$

où

$$D(A_0) = \left\{ f \in E;\ \frac{\partial}{\partial x} f \in E \text{ et } f(0, y) = 0 \text{ presque partout en } y \right\}, \tag{9.15}$$

$$D(A_1) = \left\{ f \in E;\ \frac{\partial}{\partial x} f \in E \right\}, \tag{9.16}$$

$$D(B_0) = \left\{ f \in E;\ \frac{\partial}{\partial y} f \in E\,, \quad f(x, 0) = 0 \text{ presque partout en } x \right\}, \tag{9.17}$$

et

$$D(B_1) = \left\{ f \in E;\ \frac{\partial}{\partial y} f \in E \right\}. \tag{9.18}$$

Notons que, en considérant l'espace E comme $L^p(\bar{R}_+; L^p(\bar{R}_+))$, les conditions $f(0, y) = 0$ ou $f(x, 0) = 0$ sont bien définies d'après le fait que $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ ou $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \in E$ respectivement.

Considérons les semigroupes suivants fortement continus dans l'espace E:

$$G_0(s) f(x, y) = \begin{cases} f(x-s, y) & \text{si} \quad x \geqq s \geqq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad s \geqq x \geqq 0\,; \end{cases} \tag{9.19}$$

$$G_1(s) f(x, y) = f(x+s, y)\,, \qquad s \geqq 0\,; \tag{9.20}$$

$$H_0(t) f(x, y) = \begin{cases} f(x, y-t) & \text{si} \quad y \geqq t \geqq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad t \geqq y \geqq 0\,; \end{cases} \tag{9.21}$$

et

$$H_1(t) f(x, y) = f(x, y+t)\,, \qquad t \geqq 0\,. \tag{9.22}$$

Alors nous voyons que $-A_i$ et $-B_i$ sont respectivement les générateurs infinitésimaux des semigroupes $G_i(s)$ et $H_i(t)$, $(i = 0, 1)$. Aussi avons-nous grâce à la commutativité des semigroupes $G_i(s)$ et $H_j(t)$,

$$(\lambda + A_i)^{-1}(\mu + B_j)^{-1} = (\mu + B_j)^{-1}(\lambda + A_i)^{-1} \tag{9.23}$$

pour $\lambda, \mu > 0$, $i, j = 0, 1$.

Ainsi pouvons-nous définir les espaces $C_q^{(\sigma,\tau);E}(A_i, B_j)$, $i, j = 0, 1$, $\sigma, \tau > 0$, $1 \leqq q < \infty$.

De la proposition 6.9, nous avons le résultat suivant.

PROPOSITION 9.3. *Considérons l'opérateur*

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial}{\partial x}+a\frac{\partial}{\partial y}+ab\ , \qquad a, b\text{: complexes.}$$

(i) *Si* $\mathrm{Re}\, a>0, \mathrm{Re}\, b>0$, *quelle que soit* $f\in C_q^{(\sigma,\tau);E}(A_0, B_0)$ *il existe une solution unique* $u\in C_q^{(\sigma+1,\tau+1);E}(A_0, B_0)$ *à l'équation* $Lu=f$;

(ii) *Si* $\mathrm{Re}\, a<0, \mathrm{Re}\, b<0$, *quelle que soit* $f\in C_q^{(\sigma,\tau);E}(A_1, B_1)$ *il existe une solution unique* $u\in C_q^{(\sigma+1,\tau+1);E}(A_1, B_1)$ *à l'équation* $Lu=f$;

(iii) *Si* $\mathrm{Re}\, a>0, \mathrm{Re}\, b<0$, *quelle que soit* $f\in C_q^{(\sigma,\tau);E}(A_0 B_1)$ *il existe une solution unique* $u\in C_q^{(\sigma+1,\tau+1);E}(A_0, B_1)$ *à l'equation* $Lu=f$;

(iv) *Si* $\mathrm{Re}\, a<0, \mathrm{Re}\, b>0$, *quelle que soit* $f\in C_q^{(\sigma,\tau);E}(A_1, B_0)$ *il existe une solution unique* $u\in C_q^{(\sigma+1,\tau+1);E}(A_1, B_0)$ *à l'équation* $Lu=f$.

DÉMONSTRATION. $L=\left(\frac{\partial}{\partial x}+a\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+b\right)$. Par conséquent, d'après le cas, $L=(\pm A_i+a)(\pm B_j+b)$ qui est inversible.

Remarque 9.1. La solution du cas (i), par exemple, est donné par la formule

$$u(x, y)=\int_0^x\int_0^y e^{-as-bt}f(x-s, y-t)dsdt\ .$$

De façon analogue, dans les autres cas, les solutions sont données à l'aide de la formule des résolvantes des semigroupes $H_i(s)$ et $G_j(t)$.

Université de Tokyo

Bibliographie

[1] Grisvard, P., Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, J. Math. Pures Appl. **45** (1966), 143-290.

[2] Komatsu, H., Fractional powers of operators II, Interpolation spaces, Pacific J. Math. **21** (1967), 89-111.

[3] Lions, J.-L. et Peetre, J., Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publ. Math. I. H. E. S. 19 (1964), 5-68.

[4] Peetre, J., Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation, Ricerche di Mat. **12** (1963), 248-261.

[5] ———, Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sci. Paris **256** (1963), 1424-1426.

[6] Yoshikawa, A., Remarks on the theory of interpolation spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I **15** (1968), 209-251.

[7] Yosida, K., Functional Analysis, Springer, Berlin, 1965.

(Reçu le 2 décembre, 1969)