Sur le commutant d'une représentation d'un groupe de Chevalley fini II

par Takeo YOKONUMA*)
(Présenté par N. Iwahori)

§ 0. Introduction

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et K un corps fini. On définit le groupe de Chevalley G associé à $\mathfrak{g}$ et K. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. La représentation Ψ d'un tore maximal $\mathfrak{H}$ de G de degré 1 sur k est considérée d'une manière naturelle comme celle d'un sous-groupe de Borel B $(=\mathfrak{U}\mathfrak{H})$. Alors, concernant la représentation Ψ^G de G induite par la représentation Ψ de B, nous avons les théorèmes suivants:
1) (F. Bruhat [1]) Le groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}$ opère sur Hom$(\mathfrak{H}, k^*)$. Pour que Ψ^G soit irréductible, il faut et il suffit que le stabilisateur W_Ψ de Ψ dans W soit trivial.
2) (N. Iwahori-J. Tits [3]) Si $\Psi=1$, Ψ^G se décompose en composantes irréductibles à la même manière que la représentation régulière de W.

En généralisant ces résultats, nous démontrerons ici que le commutant $C(G, B, \Psi)$ de Ψ^G est isomorphe à l'algèbre de groupe $k[W_\Psi]$ de W_Ψ sur k. Ce théorème a été prévu par M. F. Bruhat.

Pour la démonstration, comme dans [3], nous employons un théorème de Gerstenhaber-Tits. Le point essentiel est la construction de l'anneau générique. Pour cela, nous observerons une relation entre le commutant $C(G, B, \Psi)$ et l'anneau de Hecke $\mathscr{H}(G, \mathfrak{U})$ dans § 4 (Th. 4.4). Dans § 1 et § 2, nous citerons des propriétés du groupe de Weyl affine et du groupe de Chevalley fini. Dans § 3, nous étudierons l'opération du groupe de Weyl sur Hom$(\mathfrak{H}, k^*)$ et déterminerons la structure de W_Ψ. Dans § 5, nous obtiendrons le théorème principal. Dans la section finale, nous remarquerons que nous pourrons simplifier la démonstration d'un résultat de M. R. Ree ([5, prop. 1.4]) en employant la méthode de § 3.

Dans la suite, pour simplifier les notations nous supposons que $\mathfrak{g}$ soit simple. Nous pouvons en déduire le cas général.

Je remercie vivement M. F. Bruhat de m'avoir indiqué ce problème, et

*) L'auteur a bénéficié de l'aide financière de la "Sakkokai Foundation".

M. N. Iwahori de m'avoir donné beaucoup de conseils.

Notations. Soit A un ensemble. Nous désignons par $\# A$ le cardinal de A, et par $\langle A\rangle$ le sous-groupe engendré par A, si A est un sous-ensemble d'un groupe.

Soint A, B deux ensembles et f une application de A dans B. Si C est un sous-ensemble de A, nous désignons par f/C la restriction de f à C.

§ 1. Groupes de Weyl affines

1.1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Δ le système de racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$. Nous noterons E l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des racines et fixerons un ordre lexicographique de E. Soient $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ ($l=\text{rang}\ \mathfrak{g}$) l'ensemble des racines simples, Δ^+ (resp. Δ^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) et α_0 la plus grande racine. Soit $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l\}$ la base duale de Π par rapport à la forme de Killing $(\ ,\ )$ i.e. $(\varepsilon_i, \alpha_j)=\delta_{i,j}$. Si α est une racine, notons α^* l'élément $2(\alpha, \alpha)^{-1}\alpha$.

Soit P_r (resp. P) le groupe additif de racines (resp. poids) de $\mathfrak{g}$ relatif à $\mathfrak{h}$. Désignons par D (resp. D') l'ensemble des éléments λ de E tels que (λ, α) soient entiers pour tout $\alpha\in P_r$ (resp. P); alors D (resp. D') est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers des ε_i (resp. α_i^*). Soit W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ relatif à $\mathfrak{h}$. Désignons par $T(\lambda)$ la translation de E définie par λ i.e. $x\mapsto x+\lambda$ et par $T(E_1)$ le groupe $\langle T(\lambda);\ \lambda\in E_1\rangle$ où E_1 est un sous-ensemble de E.

DÉFINITION. Soit n un entier positif. Nous définissons les groupes de Weyl affines $\mathscr{F}^{(n)}$ et $\mathfrak{S}^{(n)}$. $\mathscr{F}^{(n)}$ (resp. $\mathfrak{S}^{(n)}$) est le groupe engendré par W et $T(nD)$ (resp. W et $T(nD')$). Alors $\mathscr{F}^{(n)}$ (resp. $\mathfrak{S}^{(n)}$) est le produit semi-direct de W et de $T(nD)$ (resp. de $T(nD')$). Nous désignons par ι la projection de $\mathscr{F}^{(n)}$ sur W.

DÉFINITION. Soient L un groupe et $\{a_1, \cdots, a_n\}$ un sous-ensemble de L. On dit que L est un groupe de Coxeter relatif à $\{a_1, \cdots, a_n\}$, si les conditions suivantes sont vérifiées:

1) $a_i^2=1$ $(i=1, \cdots, n)$, $a_i\neq 1$, $L=\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$.

2) Soit $\tilde{L}$ le groupe engendré par l'ensemble $\{x_1, \cdots, x_n\}$ avec les relations $(x_ix_j)^{m(i,j)}=1$ $(1\leqslant i, j\leqslant n)$ où $m(i, j)$ est l'ordre de a_ia_j. L'homomorphisme défini par $x_i\mapsto a_i$ de $\tilde{L}$ dans L est l'isomorphisme entre $\tilde{L}$ et L.

1.2. Concernant la structure des groupes $\mathfrak{S}^{(n)}$ et $\mathscr{F}^{(n)}$, nous avons le théorème suivant. Soient P_i l'hyperplan $\{x\in E;\ (\alpha_i, x)=0\}$ et $P_0^{(n)}$ l'hyperplan

$\{x\in E;\ (\alpha_0, x)=n\}$. Désignons par w_i (resp. $r_0^{(n)}$) la réflexion par rapport à P_i (resp. $P_0^{(n)}$).

THÉORÈME 1.1. 1) *$\mathscr{F}^{(n)}$ est le produit semi-direct de $\Omega^{(n)}$ et de $\mathfrak{S}^{(n)}$, où $\Omega^{(n)}=\{1,\ T(n\varepsilon_i)w^{(i)}w_\Pi;\ (\alpha_0, \varepsilon_i)=1\}$, $w^{(i)}$ (resp. w_Π) étant l'élément de $\langle w_1, \cdots, \hat{w}_i, \cdots, w_l\rangle$ (resp. W) qui transforme $\Pi-\{\alpha_i\}$ (resp. Π) en $-(\Pi-\{\alpha_i\})$ (resp. $-\Pi$).*
2) *$\mathfrak{S}^{(n)}$ est le groupe de Coxeter relatif à $\{w_1, \cdots, w_l, r_0^{(n)}\}$.*
3) *Le domaine fondamental de $\mathfrak{S}^{(n)}$ est $\mathscr{D}^{(n)}=\{x\in E;\ (\alpha_i, x)\geq 0,\ (\alpha_0, x)\leq n\}$, i.e. pour tout $\lambda\in E$, il existe un seul $\mu\in\mathscr{D}^{(n)}$ et un seul $w\in\mathfrak{S}^{(n)}$ tels que $w(\lambda)=\mu$. Donc, celui de $\mathscr{F}^{(n)}$ est $\mathscr{D}^{(n)}/\Omega^{(n)}$, i.e. si $\mu_1, \mu_2\in\mathscr{D}^{(n)}$ et $\mu_2\in\mathscr{F}^{(n)}(\mu_1)$, alors il existe $\rho\in\Omega^{(n)}$ tel que $\mu_1=\rho(\mu_2)$.*
4) *Soit $\lambda\in\mathscr{D}^{(n)}$. Nous indiquons par le suffix λ le stabilisateur de λ; par exemple $(\mathscr{F}^{(n)})_\lambda=\{w\in\mathscr{F}^{(n)}:\ w(\lambda)=\lambda\}$ etc. Alors,*

i) *$(\mathscr{F}^{(n)})_\lambda$ est le produit semi-direct de $(\Omega^{(n)})_\lambda$ et de $(\mathfrak{S}^{(n)})_\lambda$.*

ii) *$(\mathfrak{S}^{(n)})_\lambda$ est le groupe de Coxeter relatif à $\{r_0^{(n)}, w_j;\ \lambda\in P_j\}$ si $\lambda\in P_0^{(n)}$, et à $\{w_j;\ \lambda\in P_j\}$ si $\lambda\notin P_0^{(n)}$.*

iii) *La restriction de ι à $(\mathscr{F}^{(n)})_\lambda$ est injective.*

Pour 1), 2), 3), voir [4, § 1].

LEMME 1.2. *Soit w un élément de $\mathfrak{S}^{(n)}$. Supposons que $w(\mathscr{D}^{(n)})$ et $\mathscr{D}^{(n)}$ se trouvent l'un à l'autre aux différents côtés de l'hyperplan P_i ($0\leqq i\leqq l$, $P_0=P_0^{(n)}$). Si $\lambda\in(w\mathscr{D}^{(n)}\cap\mathscr{D}^{(n)})$, alors $\lambda\in P_i$.*

DÉMONSTRATION. D'après la définition de $P_i=\{x\in E;\ (\alpha_i, x)=\delta_{0,i}n\}$, la condition signifie que $(\lambda, \alpha_i)\geqq\delta_{0,i}n$ et $(\lambda, \alpha_i)\leqq\delta_{0,i}n$.

LEMME 1.3. *Soit $\lambda\in\mathscr{D}^{(n)}$. Si $w(\lambda)\in\mathscr{D}^{(n)}$ pour $w\in\mathfrak{S}^{(n)}$, alors $w\in(\mathfrak{S}^{(n)})_\lambda$.*

DÉMONSTRATION. On peut démontrer ce lemme par récurrence sur $l(w)$ (=la longueur de w par rapport aux générateurs $\{w_1, \cdots, w_l, r_0^{(n)}\}$), en vertu du lemme 1.2.

Il en est de même de 4) ii) du théorème 1.1. Quant à 4) i), soit $ab\in(\mathscr{F}^{(n)})_\lambda$ ($a\in\Omega^{(n)}$, $b\in\mathfrak{S}^{(n)}$), i.e. $(ab)(\lambda)=\lambda$, alors $b(\lambda)=a^{-1}(\lambda)\in\mathscr{D}^{(n)}$. D'après le lemme 1.3, $b\in(\mathfrak{S}^{(n)})_\lambda$ et $a\in(\Omega^{(n)})_\lambda$. Pour 4) iii), remarquons que, si $d\neq 0$, $T(d)$ n'a pas de point fixé. Donc,

$$(\mathscr{F}^{(n)})_\lambda\cap(\text{le noyau de } \iota)=(\mathscr{F}^{(n)})_\lambda\cap T(nD)=\{1\}.$$

§ 2. Groupes de Chevalley finis

2.1. Dans la suite, nous supposons que l'ordre lexicographique de E soit régulier au sens de Chevalley ([2, p. 20]). Nous employons les notations de [2]. Soit $\{H_i, X_\alpha;\ i=1, \cdots, l, \alpha\in\Delta\}$ une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$. Désignons par $\mathfrak{g}_Z$ le groupe additif engendré par $\{H_i, X_\alpha;\ i=1, \cdots, l, \alpha \in \Delta\}$; $\mathfrak{g}_Z$ est une algèbre de Lie sur $\boldsymbol{Z}$. Soient K un corps fini à q éléments et $\mathfrak{g}_K$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_Z \otimes K$ sur K. L'éléments $H_i \otimes 1$, $X_\alpha \otimes 1$ de $\mathfrak{g}_K$ sont aussi désignés par H_i, X_α respectivement. Soit G le groupe de Chevalley associé à $\mathfrak{g}$ et K; $\mathfrak{X}_\alpha = \{x_\alpha(t);\ t \in K\}$ est le sous-groupe à un paramètre associé à $\alpha \in \Delta$; $\mathfrak{U}$ est le sous-groupe $\langle \mathfrak{X}_\alpha;\ \alpha \in \Delta^+ \rangle$. Pour chaque $\chi \in \mathrm{Hom}(P_r, K^*)$ (K^* est le groupe multiplicatif de K), on définit un élément $h(\chi)$ de G. $\mathfrak{H}$ désigne le sous-groupe $\{h(\chi);\ \chi \in \mathrm{Hom}(P_r, K^*)\}$; $\mathfrak{H}$ normalise $\mathfrak{U}$ et nous désignons par B le sous-groupe $\mathfrak{U}\mathfrak{H}$. Pour toute $\alpha \in \Delta$, il existe un homomorphisme ϕ_α de $SL(2, K)$ dans G tel que

$$\phi_\alpha\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_\alpha(t); \quad \phi_\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_{-\alpha}(t) .$$

Désignons par $\omega_\alpha(t)$ l'élément $\phi_\alpha\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ $(t \in K^*)$, par ω_α l'élément $\omega_\alpha(1)$, et par $h_\alpha(z)$ l'élément $\phi_\alpha\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$ $(z \in K^*)$. Alors $h_\alpha(z) = h(\chi_{\alpha,z})$, où $\chi_{\alpha,z} \in \mathrm{Hom}(P_r, K^*)$ est défini par $\chi_{\alpha,z}(\gamma) = z^{(\alpha^*, \gamma)}$ pour $\gamma \in P_r$.

Soit $\mathfrak{W}$ le sous-groupe $\langle \mathfrak{H}, \omega_\alpha\ (\alpha \in \Delta) \rangle$; l'application $\zeta: \mathfrak{W} \longrightarrow W$ définie par $\zeta(\mathfrak{H}) = 1$ et $\zeta(\omega_\alpha) = w_\alpha$ (= la réflexion relative à $\alpha \in \Delta$) est un homomorphisme surjectif dont le noyau est $\mathfrak{H}$. Pour $\alpha = \alpha_i \in \Pi$, désignons w_α et ω_α par w_i et ω_i respectivement. Nous allons définir une application $\tau: W \longrightarrow \mathfrak{W}$ telle que $\zeta\tau = id$. Soit $w = w_p w_q \cdots w_r$ une expression réduite de $w \in W$ avec $1 \leqslant p, q, \cdots, r \leqslant l$, alors $\tau(w) = \omega_p \omega_q \cdots \omega_r$. En général, l'application ω d'un sous-groupe W' de W dans $\mathfrak{W}$ telle que $\zeta\omega = id$ s'appelle une section de W'.

2.2.

LEMME 2.1. 1) *Si* $\omega_\alpha(X_\beta) = \eta_{\alpha,\beta} X_\gamma$, $\alpha, \beta \in \Delta$, *alors* $\eta_{\alpha,\beta}$ *est* ± 1 *et ne dépend pas de* K; *on a*

$$\omega_\alpha x_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} = x_\gamma(\eta_{\alpha,\beta} t) \quad (t \in K) ,$$
$$\omega_\alpha \omega_\beta \omega_\alpha^{-1} = \omega_\gamma(\eta_{\alpha,\beta})$$

où $\gamma = w_\alpha(\beta)$.

2) $\omega_\alpha^2 = h_\alpha(-1)$.

3) $h_\alpha(z)\, \omega_\beta(u)\, h_\alpha(z)^{-1} = \omega_\beta(z^{(\alpha^*, \beta)} u)$.

4) $\omega_\alpha h_\beta(z)\, \omega_\alpha^{-1} = h_\gamma(z) = h_\beta(z)\, h_\alpha(z^{-(\beta^*, \alpha)})$.

LEMME 2.2. *Supposons que* α *et* β *soient deux racines linéairement indépendantes telles que* $(\alpha, \beta) \leqslant 0$.

1) *Si* $(\alpha, \beta) = 0$, $\alpha + \beta \in \Delta$, *alors* $\omega_\alpha \omega_\beta = \omega_\beta \omega_\alpha$.

2) *Si* $(\alpha, \beta) = 0$, $\alpha + \beta \in \Delta$, *alors* $\omega_\alpha \omega_\beta = \omega_\beta^{-1} \omega_\alpha$.

3) *Si* $\theta(\alpha, \beta)$ (*=l'angle de* α *et* β)$=\frac{2}{3}\pi$, $\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha=\omega_\beta\omega_\alpha\omega_\beta$.

4) *Si* $\theta(\alpha, \beta)=\frac{3}{4}\pi$, $(\omega_\alpha\omega_\beta)^2=(\omega_\beta\omega_\alpha)^2$.

5) *Si* $\theta(\alpha, \beta)=\frac{5}{6}\pi$, $(\omega_\alpha\omega_\beta)^3=(\omega_\beta\omega_\alpha)^3$.

DÉMONSTRATION. 1) $x_\alpha(t)$ et $x_\beta(s)$ $(t, s\in K)$ se commutent, et il en est de même de ω_α et ω_β.
2) $\omega_\alpha(X_\beta)=-X_\beta$; d'où on a $\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha^{-1}=\omega_\beta(-1)=\omega_\beta^{-1}$.
3) Si $\alpha-\beta$ n'est pas une racine, alors $\alpha+2\beta$, $2\alpha+\beta$ ne sont pas des racines. $\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha^{-1}=\omega_{\alpha+\beta}(N(\alpha, \beta))$, où $[X_\alpha, X_\beta]=N(\alpha, \beta)X_{\alpha+\beta}$. $\omega_\beta\omega_\alpha\omega_\beta^{-1}=\omega_{\alpha+\beta}(N(\beta, \alpha))$; d'où on a $\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha^{-1}=\omega_\beta\omega_\alpha^{-1}\omega_\beta^{-1}$.

$$\begin{aligned}\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha&=\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha^{-1}h_\alpha(-1)\\&=\omega_\beta\omega_\alpha^{-1}\omega_\beta^{-1}h_\alpha(-1)\\&=\omega_\beta\omega_\alpha h_\alpha(-1)\,\omega_\beta(-1)\,h_\alpha(-1)\,.\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 2.1 3),

$$h_\alpha(-1)\,\omega_\beta(-1)\,h_\alpha(-1)=\omega_\beta((-1)^{(\alpha^*,\beta)}(-1))=\omega_\beta\,.$$

Si $\alpha-\beta$ est une racine, $\alpha+2\beta$, $2\alpha+\beta$ sont des racines, et nous employons les formules $\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha^{-1}=\omega_{\alpha+\beta}\left(-\frac{1}{2}N(\alpha, \beta)\right)$ etc, et pouvons vérifier le lemme également.
4) Supposons que $(\alpha, \alpha)<(\beta, \beta)$. Alors $\theta(\beta, w_\alpha(\beta))=\frac{\pi}{2}$ et $\beta+w_\alpha(\beta)\notin\Delta$. Donc,

$$\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha^{-1}\cdot\omega_\beta=\omega_\beta\cdot\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha^{-1}\,.$$
$$\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha h_\alpha(-1)\,\omega_\beta=\omega_\beta\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha h_\alpha(-1)\,.$$

D'après le lemme 2.1 3),

$$h_\alpha(-1)\,\omega_\beta\,h_\alpha(-1)=\omega_\beta((-1)^{(\alpha^*,\beta)})=\omega_\beta\,.$$

5) Supposons que $(\alpha, \alpha)<(\beta, \beta)$. Alors $\theta(\beta, w_\alpha w_\beta(\alpha))=\frac{\pi}{2}$ et $\beta+w_\alpha w_\beta(\alpha)\notin\Delta$. Donc,

$$\omega_\beta\cdot\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha\omega_\beta^{-1}\omega_\alpha^{-1}=\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha\omega_\beta^{-1}\omega_\alpha^{-1}\cdot\omega_\beta$$

D'autre part, $h_\beta(-1)\,\omega_\alpha^{-1}\,h_\beta(-1)=\omega_\alpha$, $h_\beta(-1)\,\omega_\beta\,h_\beta(-1)=\omega_\beta$; et on a

$$\omega_\beta^{-1}\,\omega_\alpha^{-1}=\omega_\beta\,h_\beta(-1)\,\omega_\alpha^{-1}=\omega_\beta\,\omega_\alpha\,h_\beta(-1)\,.$$

§ 3. Opération du groupe de Weyl sur Hom ($\mathfrak{H}$, k^*)

3.1. Le groupe de Weyl W opère sur les ensembles Hom (P_r, K^*) et $\mathfrak{H}$ d'après les formules suivantes; si $w\in W$, pour $\chi\in$ Hom (P_r, K^*) et $h\in\mathfrak{H}$,

$$(w\cdot\chi)(\alpha)=\chi(w^{-1}(\alpha))$$
$$w\cdot h=\omega h\omega^{-1}$$

où $\alpha\in P_r$, $\omega\in\mathfrak{W}$ tel que $\zeta(\omega)=w$. Si $h=h(\chi)$, $w\cdot h=h(w\cdot\chi)$.

Soit σ un générateur de K^*. Nous définissons un homomorphisme de D dans $\mathrm{Hom}(P_r, K^*)$ par $\lambda\mapsto\chi_\lambda$, où $\chi_\lambda(\alpha)=\sigma^{(\lambda,\alpha)}$ pour $\alpha\in P_r$. Il est un homomorphisme surjectif, dont le noyau est $(q-1)D$; en effect,

$$\begin{aligned}&\lambda\in(\text{le noyau})\\ &\Longleftrightarrow(\lambda,\alpha)\equiv 0 \mod (q-1) \text{ pour toute } \alpha\in\Delta\\ &\Longleftrightarrow\left(\frac{1}{q-1}\lambda,\alpha\right)\in \boldsymbol{Z} \text{ pour toute } \alpha\in\Delta\\ &\Longleftrightarrow\frac{\lambda}{q-1}\in D.\end{aligned}$$

Pour $\chi\in\mathrm{Hom}(P_r, K^*)$, si $\chi(\alpha_i)=\sigma^{\nu(i)}$, posons $\lambda=\sum_i\nu(i)\varepsilon_i$ alors $\chi_\lambda=\chi$. Cet homomorphisme est compatible avec l'opération de W, i.e. si $\lambda\in D$ $w\in W$ et $w(\lambda)=\mu$, $w(\chi_\lambda)(\alpha)=\chi_\mu(\alpha)$ pour $\alpha\in P_r$. Donc, si χ_λ, $\chi_\mu\in\mathrm{Hom}(P_r, K^*)$ où λ, $\mu\in D$, pour qu'il existe un élément w de W tel que $w(\chi_\lambda)=\chi_\mu$, il faut et il suffit qu'il existe un élément w de W et un élément δ de D tels que $\mu=w(\lambda)+(q-1)\delta$. Il en résulte que l'orbite de W dans $\mathfrak{H}$ correspond bijectivement à l'orbite du groupe $\langle W, T((q-1)D)\rangle$ $(=\mathscr{F}^{(q-1)})$ dans D.

3.2. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et ρ une racine primitive $(q-1)^e$ de l'unité dans k. Nous définissons un homomorphisme de P_r dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{H}, k^*)$ par $\gamma\mapsto\Psi_\gamma$ où $\Psi_\gamma(h(\chi_\lambda))=\rho^{(\lambda,\gamma)}$ pour $\chi_\lambda\in\mathrm{Hom}(P_r, K^*)$, $\lambda\in D$. Comme § 3.1, c'est un homomorphisme surjectif dont le noyau est $(q-1)P_r$. Le groupe de Weyl opère sur $\mathrm{Hom}(\mathfrak{H}, k^*)$ par $w\cdot\Psi(h)=\Psi(w^{-1}\cdot h)$, où $w\in W$, $h\in\mathfrak{H}$ et $\Psi\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{H}, k^*)$. L'homomorphisme ci-dessus est compatible avec l'opération de W, et l'orbite de W dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{H}, k^*)$ correspond bijectivement à l'orbite du groupe $\langle W, T((q-1)P_r)\rangle$ dans P_r. Ce groupe $\langle W, T((q-1)P_r)\rangle$ est désigné par $\tilde{W}$.

3.3. Pour $\alpha\in\Delta$, nous avons désigné $2(\alpha,\alpha)^{-1}\alpha$ par α^*. On sait que, si l'on pose $\Delta^*=\{\alpha^*;\ \alpha\in\Delta\}$, Δ^* est un système de racines, dont Π^* est l'ensemble des racines simples. Si l'on pose $\delta_i=\alpha_i^*$, $T((q-1)\alpha_i)=T((q-1)\delta_i^*)$. Donc le groupe $\tilde{W}$ est le groupe $\mathfrak{S}^{(q-1)}$ construit à partir de Π^* et nous pouvons appliquer le théorème 1.1 à $\tilde{W}$. Si l'on désigne par δ_0 la plus grande racine de Δ^*, alors $\beta_0=\delta_0^*$ est la racine dominante courte de Δ.

PROPOSITION 3.1. 1) *Soit* $\mathscr{D}^{(q-1)*}=\{x\in E;\ (x,\alpha_i)\geqslant 0,\ (\beta_0^*, x)\leqslant q-1\}$. *Il existe une application bijective entre l'ensemble des orbites de* W *dans* $\mathrm{Hom}(\mathfrak{H}, k^*)$ *et* $\mathscr{D}^{(q-1)*}\cap P_r$.

2) *Soit* $\gamma \in (\mathscr{D}^{(q-1)*} \cap P_r)$. *Soient* $\tilde{W}_\gamma$ *le stabilisateur de* γ *dans* $\tilde{W}$ *et* $W(\Psi_\gamma)$ *le stabilisateur de* Ψ_γ *dans* W. *Alors* $\iota(\tilde{W}_\gamma) = W(\Psi_\gamma)$, *où* ι *est la projection de* $\tilde{W}$ *dans* W. *Donc, d'après le théorème* 1.1, *on sait la structure du groupe* $W(\Psi_\gamma)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROP. 3.1, 2). $w \in W(\Psi_\gamma) \Longleftrightarrow$ *il existe* $d \in (q-1)D^*$ $(D^* = \sum Z\alpha^*)$ *tel que* $w(\gamma) = T(d)\gamma \Longleftrightarrow (T(d^{-1})w)(\gamma) = \gamma \Longleftrightarrow T(d^{-1})w \in \tilde{W}_\gamma$.

§ 4. Structure du commutant

4.1. Soient L un groupe fini quelconque, H un sous-groupe de L et Ψ_i $(i = 1, 2)$ des représentations de degré 1 de H sur un corps algébriquement clos k_1 de caractéristique 0. L'espace $\mathscr{L}$ des fonctions définies dans L à valeurs dans k_1 est une k_1-algèbre associative par la convolution

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{1}{\sharp H} \sum_{y \in L} f_1(xy^{-1}) f_2(y)$$

où $f_1, f_2 \in \mathscr{L}$, $x \in L$.

Soit $\mathscr{L}(\Psi_1, \Psi_2)$ l'ensemble des éléments f de $\mathscr{L}$ qui vérifient $f(hgh') = \Psi_1(h) f(g) \Psi_2(h')$ quelsque soient $h, h' \in H$, $g \in L$; c'est une sous-algèbre de $\mathscr{L}$. Soient S un système de représentants des doubles classes de L modulo H et $S(\Psi_1, \Psi_2)$ l'ensemble des éléments $x \in S$ qui satisfont à la condition suivante: si $h_1, h_2 \in H$ tels que $x = h_1 x h_2$, alors $\Psi_1(h_1)\Psi_2(h_2) = 1$. Pour tout $x \in S(\Psi_1, \Psi_2)$, définissons un élément φ_x de $\mathscr{L}$: $\varphi_x(g) = \Psi_1(h_1)\Psi_2(h_2)$ si $g = h_1 x h_2$ et $\varphi_x(g) = 0$ si $g \notin HxH$. Ces fonctions φ_x $(x \in S(\Psi_1, \Psi_2))$ forment une base de $\mathscr{L}(\Psi_1, \Psi_2)$. Soient Ψ_i^L la représentation de L induite par Ψ_i et $i(\Psi_1, \Psi_2)$ le nombre d'entrelacement de Ψ_1^L et de Ψ_2^L. Alors

$$i(\Psi_1, \Psi_2) = \dim \mathscr{L}(\Psi_1, \Psi_2) = \sharp S(\Psi_1, \Psi_2)\,.$$

Remarquons que 1) et 2) suivantes sont équivalentes;

1) si $x = h_1 x h_2$, $\Psi_1(h_1)\Psi_2(h_2) = 1$;

2) si $h \in H \cap x^{-1}Hx$, $\Psi_2(h) = \Psi_1(xhx^{-1})$.

En particulier, si $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$, on pose $\mathscr{L}(\Psi_1, \Psi_2) = \mathscr{L}(\Psi)$ et $S(\Psi_1, \Psi_2) = S(\Psi)$. Alors le commutant $C(L, H, \Psi)$ de Ψ^L est isomorphe à $\mathscr{L}(\Psi)$ comme algèbre sur k_1.

LEMME 4.1. *Soient* $x, y \in S(\Psi)$, $z \in L$. *Supposons que la double classe* HyH *soit la réunion des ensembles* Hb_i, *et que* Hb_i *soient mutuellement disjoints, Alors,*

$$(\varphi_x * \varphi_y)(z) = \sum_i \varphi_x(zb_i^{-1})\, \varphi_y(b_i)\,,$$

où $i \in \{i;\ zb_i^{-1} \in HxH\}$.

DÉMONSTRATION.

$$(\varphi_x * \varphi_y)(z) = \frac{1}{\# H} \sum_{u \in HyH} \varphi_x(zu^{-1}) \varphi_y(u) ,$$

d'après $HyH = \cup Hb_i$,

$$= \frac{1}{\# H} \sum_{h, i} \varphi_x(zb_i^{-1} h^{-1}) \varphi_y(hb_i)$$

où $h \in H$, $i \in \{i ; zb_i^{-1} \in HxH\}$,

$$= \frac{1}{\# H} \sum_{h, i} \varphi_x(zb_i^{-1}) \Psi(h^{-1}) \Psi(h) \varphi_y(b_i)$$

$$= \sum_i \varphi_x(zb_i^{-1}) \varphi_y(b_i) .$$

4.2. Nous revenons au sujet du groupes de Chevalley finis. Soient Ψ, Ψ_1, Ψ_2 $\in \mathrm{Hom}(\mathfrak{H}, k^*)$. Grâce à la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathfrak{U} \longrightarrow B \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow 1 ,$$

nous pouvons considérer Ψ, Ψ_1, Ψ_2 comme des éléments de $\mathrm{Hom}(B, k^*)$ et nous construisons les représentations induites Ψ^G, etc. de G par $\Psi \in \mathrm{Hom}(B, k^*)$, etc. Dans la suite, s'il s'agit de la représentation induite, Ψ est considéré comme un élément de $\mathrm{Hom}(B, k^*)$. Tandis que, s'il s'agit de l'opération du groupe de Weyl, Ψ est considéré comme un élément de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{H}, k^*)$.

PROPOSITION 4.2. $i(\Psi_1, \Psi_2) = \#\{w \in W ; \Psi_2 = w^{-1} \Psi_1\}$.

DÉMONSTRATION. Soit ω une section de W. L'ensemble $\{\omega(w) ; w \in W\}$ est un système de représentants des doubles classes de G modulo B. D'après § 4.1,

$$i(\Psi_1, \Psi_2) = \#\{w \in W ; \Psi_2(y) = (w^{-1} \cdot \Psi_1)(y) \text{ pour } y \in B \cap \omega(w)^{-1} B \omega(w)\}$$

Mais, $B \cap \omega(w)^{-1} B \omega(w) = \mathfrak{U}\mathfrak{H} \cap \omega(w)^{-1} \mathfrak{U}\mathfrak{H} \omega(w) = \omega(w)^{-1} \mathfrak{U}'_{w^{-1}} \omega(w) \mathfrak{H}$; il en résulte que la condition est équivalente à $\Psi_2 = w^{-1} \cdot \Psi_1$.

COROLLAIRE 4.3. 1) *Si* $\Psi' \notin \{w(\Psi) ; w \in W\}$, $i(\Psi, \Psi') = 0$.

2) $i(\Psi, \Psi) = \# W(\Psi)$.

3) *S'il existe un élément* $w' \in W$ *tel que* $w'(\Psi_1) = \Psi_2$, $\Psi_1{}^G$ *est equivalente à* $\Psi_2{}^G$.

DÉMONSTRATION. 3) $\{w \in W ; \Psi_2 = w^{-1} \cdot \Psi_1\} = (W(\Psi_2) \cdot w')^{-1} = W(\Psi_1) \cdot w'^{-1}$; d'où on a $i(\Psi_1, \Psi_2) = i(\Psi_1, \Psi_1) = i(\Psi_2, \Psi_2)$. Soient $\Psi_1{}^G = \sum m_i \rho_i$, $\Psi_2{}^G = \sum n_i \rho_i$, où ρ_i sont les représentations irréductibles de G sur k et m_i, n_i sont des entiers non-négatifs. Alors,

$$\begin{aligned} \sum (m_i - n_i)^2 &= i(\Psi_1, \Psi_1) - 2i(\Psi_1, \Psi_2) + i(\Psi_2, \Psi_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

i.e. $m_i = n_i$.

4.3. Fixons une section ω de W.

THÉORÈME 4.4. *Désignons par* φ_w *l'élément du commutant* $C(\Psi)$ $(=C(G, B, \Psi)=\mathscr{L}(\Psi))$ *qui correspond à* $\omega(w)$ *où* $w\in W(\Psi)$. *Définissons des applications* k*-linéaires* $f: C(\Psi)\to\mathscr{H}_k(G, \mathfrak{U})$ *et* $g: \mathscr{H}_k(G, \mathfrak{U})\to C(\Psi)$ *par les formules suivantes*;

$$f(\varphi_w)=S(\omega(w)) \quad (=\mathfrak{U}\omega(w)\mathfrak{U})\,;$$

$$g(S(\tilde{\omega}))=\begin{cases}\Psi(h^{-1})\varphi_w & si\ w=\zeta(\tilde{\omega})\in W(\Psi)\ et\ \tilde{\omega}=h\omega(w)\,,\\ 0 & si\ w=\zeta(\tilde{\omega})\in W(\Psi)\,;\end{cases}$$

où $\mathscr{H}_k(G, \mathfrak{U})$ *est l'anneau de Hecke de* G *relatif à* $\mathfrak{U}$. *Alors, pour* $a, b\in C(\Psi)$,

$$a*b=g(f(a)*f(b))\,.$$

DÉMONSTRATION. Soient $\tilde{\mu}(w', w''; w)$ les constantes de structure de $C(\Psi)$ par rapport à la base $\{\varphi_w; w\in W(\Psi)\}$, et $\mu(\omega', \omega''; \tilde{\omega})$ celles de $\mathscr{H}_k(G, \mathfrak{U})$ par rapport à la base $\{S(\tilde{\omega}); \tilde{\omega}\in\mathfrak{W}\}$, i.e.

$$\varphi_{w'}*\varphi_{w''}=\sum_{w}\tilde{\mu}(w', w''; w)\varphi_w$$

etc.

Il suffit de démontrer la formule suivante:

$$\tilde{\mu}(w', w''; w)=\sum_{\tilde{\omega}}\mu(\omega', \omega''; \tilde{\omega})\Psi(h^{-1})\,,$$

où $\zeta(\tilde{\omega})=w$, $\tilde{\omega}=h\omega_1$, $\omega'=\omega(w')$, $\omega''=\omega(w'')$ et $\omega_1=\omega(w)$. Puisque $B\omega''B=\mathfrak{U}\mathfrak{H}\omega''\mathfrak{U}$ ([2, p. 42]), il existe des éléments $\{u_\gamma; \gamma\in\Gamma\}$ de $\mathfrak{U}$ tels que;

1) la double classe $B\omega''B$ soit la réunion des ensembles $B\omega''u_\gamma$;
2) $B\omega''u_\gamma$ soient mutuellement disjoints;
3) la double classe $\mathfrak{U}\omega''\mathfrak{U}$ soit la réunion des ensembles $\mathfrak{U}\omega''u_\gamma$.

Posons

$$I_{\tilde{\omega}}=\{\gamma\in\Gamma; \tilde{\omega}u_\gamma^{-1}\omega''^{-1}\in\mathfrak{U}\omega'\mathfrak{U}\}\,,$$

$$J_w=\{\gamma\in\Gamma; \omega_1u_\gamma^{-1}\omega''^{-1}\in B\omega'B\}\,.$$

Alors, d'après la définition de l'anneau de Hecke,

$$\mu(\omega', \omega''; \tilde{\omega})=\#I_{\tilde{\omega}}\,,$$

et

$$\tilde{\mu}(w', w''; w)=\sum\varphi_{w'}(\omega_1u_\gamma^{-1}\omega''^{-1})\varphi_{w''}(\omega''u_\gamma)$$

où $\gamma\in J_w$, d'après le lemme 4.1.

Observons que $\varphi_{w''}(\omega''u_\gamma)=1$ pour tout u_γ.

Or, de la formule $B\omega' B = \mathfrak{U}\mathfrak{H}\omega'\mathfrak{U}$ nous pouvons montrer que J_w est la réunion des ensembles $I_{\tilde{\omega}}$ où $\zeta(\tilde{\omega})=w$, que $I_{\tilde{\omega}}$ soient mutuellement disjoints et que, si $\gamma\in I_{\tilde{\omega}}$,

$$\varphi_{w'}(\omega_1 u_\gamma^{-1}\omega''^{-1})=\Psi(h^{-1})$$

où $\tilde{\omega}=h\omega_1$; il en résulte la formule ci-dessus. En effect, par exemple soit $\gamma\in I_{\tilde{\omega}}$ tel que $\zeta(\tilde{\omega})=w$, $\tilde{\omega}=h\omega_1$. $\tilde{\omega}u_\gamma^{-1}\omega''^{-1}=u\omega' u''\in\mathfrak{U}\omega'\mathfrak{U}$; d'où $\omega_1 u_\gamma^{-1}\omega''^{-1}=h^{-1}u\omega' u''$ $=\tilde{u}h^{-1}\omega' u''$, où $\tilde{u}=h^{-1}uh\in\mathfrak{U}$, i.e. $\omega_1 u_\gamma^{-1}\omega''^{-1}\in B\omega' B$ et $\varphi_{w'}(\omega_1 u_\gamma^{-1}\omega''^{-1})=\Psi(h^{-1})$.

4.4. Soit β_0 la racine dominante courte de Δ. Posons $\tilde{\Pi}=\{-\beta_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$. Nous fixons les notations; pour $\tilde{\Pi}\supsetneqq I$,

$$W_I=\langle w_\alpha\,;\,\alpha\in I\rangle\,,$$

$$H_I=\langle h_\alpha(-1)\,;\,\alpha\in I\rangle\,,$$

$$\mathfrak{W}_I=\langle \omega_\alpha\,;\,\alpha\in I\rangle\,;$$

pour $\alpha\in\Delta$,

$$\mathfrak{H}_\alpha=\{h_\alpha(z)\,;\,z\in K^*\}\,;$$

et

$$\mathfrak{H}_I=\langle\mathfrak{H}_\alpha\,;\,\alpha\in I\rangle\,.$$

PROPOSITION 4.5. *Si* $\tilde{\Pi}\supsetneqq I$, $\mathfrak{W}_I\cap\mathfrak{H}=H_I$.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2.1 4), H_I est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{W}_I$. Posons $H'=\mathfrak{W}_I\cap\mathfrak{H}$, $H'\supset H_I$. Il existe un homomorphisme $\mathfrak{W}_I/H_I$ $\to\mathfrak{W}_I/H'$ $(\omega_\alpha H_I\mapsto\omega_\alpha H')$. $\mathfrak{W}_I/H'$ $(\cong\mathfrak{W}_I\mathfrak{H}/\mathfrak{H})$ est isomorphe à W_I, qui est un groupe de Coxeter relatif à $\{w_\alpha\,;\,\alpha\in I\}$. D'autre part, $\mathfrak{W}_I/H_I$ est engendré par $\{\omega_\alpha H_I\,;\,\alpha\in I\}$, $\bar{w}_\alpha=\omega_\alpha H_I$ $(\alpha\in I)$ satisfont aux relations fondamentales de w_α d'après le lemme 2.2. Donc, l'application $(w_\alpha\mapsto\bar{w}_\alpha)$ est un homomorphisme W_I $\to\mathfrak{W}_I/H_I$. Il en resulte que $\mathfrak{W}_I/H_I$ est isomorphe à W_I, i.e. $H'=H_I$.

COROLLAIRE 4.6. *Pour toute* $\alpha\in\Delta$, $\omega_\alpha\in\mathfrak{W}_\Pi$ *et* $h_\alpha(-1)\in H_\Pi$.

DÉMONSTRATION. Pour toute $\alpha\in\Delta$, il existe $w\in W$ et $\alpha_i\in\Pi$ tels que $w(\alpha_i)$ $=\alpha$. Alors $\tau(w)\omega_i\tau(w)^{-1}=\omega_\alpha(\pm1)\in\mathfrak{W}_\Pi$ *et* $h_\alpha(-1)=\omega_\alpha^2\in\mathfrak{W}_\Pi\cap\mathfrak{H}=H_\Pi$.

4.5. Dans la suite (sauf §6), nous fixons un élément γ de $\mathscr{D}_0\cap P_r$, où $\mathscr{D}_0$ $=\mathscr{D}^{(q-1)*}$. Nous définissons l'ensemble $I=I(\gamma)$: $I(\gamma)$ est un sous-ensemble de $\tilde{\Pi}$ et $I(\gamma)\ni\alpha_i\Longleftrightarrow(\gamma,\alpha_i)=0$, $I(\gamma)\ni-\beta_0\Longleftrightarrow(\gamma,\beta_0^*)=q-1$. Posons $\Psi=\Psi_\gamma$ et $W_\Psi=$ $W(\Psi_\gamma)$ $(=W_{I(\gamma)})$. Définissons une section ω de W_Ψ: si $I\subset\Pi$, $\omega=\tau/W_\Psi$. Considérons le cas où $I\ni-\beta_0$. Fixons à chaque $w\in W_\Psi$, une expression réduite relative aux générateurs $\{w_\alpha\,;\,\alpha\in I\}$. Posons $\omega_{-\beta_0}=\omega_0$, $w_{-\beta_0}=w_0$. Si $w=w_p w_q\cdots w_r$ $(0\leqslant$

$p, q, \cdots, r \leqslant l$) est l'expression fixée, ω est définie par $\omega(w)=\omega_p\omega_q\cdots\omega_r$. La section ω dépend du choix des expressions de w. Dans la suite, pour le même I, nous fixerons une expression réduite de chaque élément de W_I une fois pour toutes.

LEMME 4.7. 1) *Pour tout* $w\in W_{\Gamma}$, $\omega(w)\in\mathfrak{W}_{\Pi}$, *i.e. il existe* $h\in H_{\Pi}$ *tel que* $\omega(w)=h\tau(w)$.

2) *Posons* $h=h(\chi)$. *Alors* $\chi\colon P_r\to\{\pm 1\}$ *ne dépend pas du corps.*

DÉMONSTRATION. 1) Cf. le cor. 4.6 et la prop. 4.5.

2) $h=\omega(w)\tau(w)^{-1}$ et χ est donné par $h(X_\alpha)=\chi(\alpha)X_\alpha$. D'après le lemme 2.1, il en résulte l'énoncé.

Les éléments de H_{Π} sont définis sur le corps premier. Donc, dans la suite, nous pouvons considérer H_{Π} comme un sous-groupe commun à tous les groupes de Chevalley associés à la même $\mathfrak{g}$ et aux corps de même caractéristique. Alors ce lemme affirme que $h=\omega(w)\tau(w)^{-1}\in H_{\Pi}$ ne dépend pas du corps.

4.6.

THÉORÈME 4.8 [Structure de l'anneau de Hecke $\mathscr{H}(G, \mathfrak{U})$]. *L'anneau de Hecke* $\mathscr{H}(G, \mathfrak{U})$ *est engendré par tous les* $S(h)$ $(h\in\mathfrak{H})$ et S_α $(=S(\omega_\alpha))$ $(\alpha\in\Pi)$.

1) *Le sous-anneau engendré par tous les* $S(h)$ $(h\in\mathfrak{H})$ *est isomorphe à l'algèbre de groupe* $\boldsymbol{Z}[\mathfrak{H}]$ *de* $\mathfrak{H}$ *sur* $\boldsymbol{Z}$.

2) *Si* $h\in\mathfrak{H}$, $\alpha\in\Pi$, $S_\alpha S(h)=S(w_\alpha\cdot h)S_\alpha$.

3) *Si* $\alpha\in\Pi$, $S_\alpha^2=qS(h_\alpha(-1))+\sum_{t\in K^*}S(h_\alpha(t))S_\alpha$.

4) *Si* $\alpha, \beta\in\Pi$, $\alpha\neq\beta$, $\underbrace{S_\alpha S_\beta S_\alpha\cdots}_{m_{\alpha\beta}}=\underbrace{S_\beta S_\alpha S_\beta\cdots}_{m_{\alpha\beta}}$,

où $m_{\alpha\beta}$ est l'ordre de $w_\alpha w_\beta$.

(cf. [6]).

4.7. Nous allons expliquer comment nous pouvons calculer le produit $S(\tau(w))*S(\tau(w'))$ de deux éléments $S(\tau(w))$ et $S(\tau(w'))$ dans $\mathscr{H}(G, \mathfrak{U})$ d'après le théorème 4.8.

Soient $\alpha, \beta\in\Delta$. On dit $\alpha\sim\beta$ si $\beta=\pm\alpha$. Nous désignons par $[\Delta]$ le quotient de Δ par cette relation $\sim$. La classe de α, i.e. $\{\alpha, -\alpha\}$ est désignée par $[\alpha]$. Nous considérons l'anneau des polynômes à coefficients entiers engendré par l'ensemble $[\Delta]$. Soit $\mathfrak{p}$ l'ensemble des monômes avec le coefficient 1. Le groupe de Weyl W opère sur $\mathfrak{p}$ d'après $w\cdot[\alpha]=[w(\alpha)]$ où $w\in W$, $[\alpha]\in[\Delta]$. Soit X le $\boldsymbol{Z}$-module libre engendré par l'ensemble $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}\times W$. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des suites réduites i.e. suites finies d'entiers $(a(1), \cdots, a(p))$ $(p\geqq 1)$ tells que $a(k)\in\{1, \cdots, l\}$ pour tout k et que $l(w_{a(1)}\cdots w_{a(p)})=p$. Pour chaque élément $w\in W$, $w\neq 1$ nous fixons une expression réduite de w, c'est-à-dire, un élément $s(w)$ de $\mathscr{R}$.

Alors, nous définissons une application de $W\times W$ dans X comme suite: nous désignons par $X(w, w')$ l'image de $(w, w')\in W\times W$ par cette application.

1) Si $l(ww')=l(w)+l(w')$, $X(w, w')=(1, 1, ww')$.

2) Supposons que $l(ww')<l(w)+l(w')$. Soient $l(w)=p$, $l(w')=q$, $s(w)=(a(1), \cdots, a(p))$, $s(w')=(b(1), \cdots, b(q))$. Nous définissons $X(w, w')$ par récurrence sur q. Si $q=1$, posons $w''=ww_{b(1)}$ et

$$X(w, w')=(w''\cdot[\alpha_{b(1)}], 1, w'')+(1, w''\cdot[\alpha_{b(1)}], w)\ .$$

Si $q>1$, il existe un seul s $(1\leqslant s\leqslant q)$ tel que

$$(a(1), \cdots, a(p), b(1), \cdots, b(s-1))\in\mathscr{R} \quad \text{et}$$
$$(a(1), \cdots, a(p), b(1), \cdots, b(s))\notin\mathscr{R}\ . \quad \text{Posons}$$

$w''=ww_{b(1)}\cdots w_{b(s-1)}w_{b(s)}$, et

$$\begin{aligned} X(w, w')=&(w''\cdot[\alpha_{b(s)}], 1, 1)\cdot X(w'', w_{b(s+1)}\cdots w_{b(q)})\\ &+(1, w''[\alpha_{b(s)}], 1)\cdot X(w''w_{b(s)}, w_{b(s+1)}\cdots w_{b(q)}) \end{aligned}$$

où le produit $(A, B, 1)\cdot(A', B', w)$ dans X signifie (AA', BB', w), où $A, A', B, B'\in\mathfrak{p}$, $w\in W$.

Pour $A=\prod_{[\alpha]\in[\Delta]}[\alpha]^{n(\alpha)}\in\mathfrak{p}$, posons:

$$\begin{aligned} d(A)&=\sum_{[\alpha]\in[\Delta]}n(\alpha)\,,\\ h(A)&=\prod_{[\alpha]\in[\Delta]}\{h_{[\alpha]}(-1)\}^{n(\alpha)}\,,\\ \mathfrak{H}_A&=\prod_{[\alpha]\in[\Delta]}\Big(\sum_{h\in\mathfrak{H}_{[\alpha]}}h\Big)^{n(\alpha)}\,, \end{aligned}$$

où $h_{[\alpha]}(-1)=h_\alpha(-1)=h_{-\alpha}(-1)$ et $\mathfrak{H}_{[\alpha]}=\mathfrak{H}_\alpha=\mathfrak{H}_{-\alpha}$.

D'après le théorème 4.8 et la définition de $X(w, w')$, nous avons le lemme suivant.

LEMME 4.9. *Soient $w, w'\in W$. Désignons par $C_{X(w,w')}(A, B, w'')$ le coefficient de (A, B, w'') de $X(w, w')$. Pour $A=\prod_{[\alpha]\in[\Delta]}[\alpha]^{n(\alpha)}\in\mathfrak{p}$, posons*

$$S(A)=\prod_{[\alpha]\in[\Delta]}\Big(\sum_{h\in\mathfrak{H}_{[\alpha]}}S(h)\Big)^{n(\alpha)}\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} &S(\tau(w))*S(\tau(w'))\\ &=\sum_{(A,B,w'')}C_{X(w,w')}(A, B, w'')q^{d(A)}S(h(A))*S(B)*S(\tau(w''))\ . \end{aligned}$$

4.8.

THÉORÈME 4.10. *Si nous fixons la section ω de W_Ψ comme § 4.5 les constantes de strucure $\tilde{\mu}(w, w'\,;\,w'')$ du commutant $C(\Psi)$ par rapport à la base $\{\varphi_w\,;\,w\in W_\Psi\}$,* *où φ_w est l'élément de $C(\Psi)$ qui correspond à $\omega(w)$, sont des polynômes en q à coefficients entiers.*

DÉMONSTRATION. Considérons les applications f et g définies dans le théorème 4.4.

$$C(\Psi)\xrightarrow{f}\mathscr{H}_k(G, \mathfrak{U})\xrightarrow{g}C(\Psi)$$

Soient $\omega(w)=h\tau(w)$, $\omega(w')=h'\tau(w')$ où $h, h'\in H_\Pi$.

$$f(\varphi_w)=S(\omega(w))=S(h)*S(\tau(w))$$

$$f(\varphi_{w'})=S(\omega(w'))=S(h')*S(\tau(w'))$$

$$(*)\qquad \begin{aligned}\varphi_w*\varphi_{w'}&=g(S(h)*S(\tau(w))*S(h')*S(\tau(w')))\\&=g(S(h)*S(w\cdot h')*S(\tau(w))*S(\tau(w')))\end{aligned}$$

Nous pouvons calculer $S(\tau(w))*S(\tau(w'))$ d'après le lemme 4.9.

D'autre part, pour $A=\prod_{[\alpha]}[\alpha]^{n(\alpha)}\in\mathfrak{p}$

$$\Psi(\mathfrak{H}_A)=\begin{cases}0 & \text{s'il existe un } [\alpha] \text{ tel que } n(\alpha)>0 \text{ et } \Psi|\mathfrak{H}_{[\alpha]}\neq 1\\ (q-1)^{d(A)} & \text{si, pour tout } [\alpha] \text{ tel que } n(\alpha)>0,\ \Psi|\mathfrak{H}_{[\alpha]}=1\end{cases}$$

(Un tel A est appelé Ψ-trivial).

Remarquons que; 1) d'après le lemme 4.7, h, $w\cdot h'$ dans $(*)$ ne dépendent pas du corps;

2) si $h\in H_\Pi$, $h^2=1$ et $\Psi(h)=\pm 1$.

Nous avons, donc, si $\omega(w'')=h''\tau(w'')$ où $w''\in W_\Psi$, $h''\in H_\Pi$,

$$(4.11)\qquad \begin{aligned}&\tilde{\mu}(w, w'; w'')\\&=\sum C_{X(w,w')}(A, B, w'')\Psi(h^{-1}w(h')^{-1}h'')\Psi(h(A)^{-1})q^{d(A)}(q-1)^{d(B)}\end{aligned}$$

où $(A, B, w'')\in\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}\times W$ tels que B soient Ψ-trivials.

REMARQUE. La structure du commutant $C(\Psi)$ est déterminée facilement si W_Ψ est un sous-groupe parabolique de W i.e. il existe un sous-ensemble J de Π tel que $W_\Psi=\langle w_\alpha; \alpha\in J\rangle$. Désignons par φ_α l'élément de $C(\Psi)$ qui correspond à $\tau(w_\alpha)$. $C(\Psi)$ est engendré par 1 et φ_α $(\alpha\in J)$ avec les relations fondamentales suivantes;

$$1\cdot\varphi_\alpha=\varphi_\alpha\cdot 1=\varphi_\alpha \qquad \text{pour } \alpha\in J.$$

$$\varphi_\alpha^2=q1+(q-1)\varphi_\alpha \qquad \text{pour } \alpha\in J.$$

$$\underbrace{\varphi_\alpha\varphi_\beta\varphi_\alpha\cdots}_{m_{\alpha\beta}}=\underbrace{\varphi_\beta\varphi_\alpha\varphi_\beta\cdots}_{m_{\alpha\beta}} \qquad \text{pour } \alpha, \beta\in J,\ \alpha\neq\beta$$

où $m_{\alpha\beta}$ est l'ordre de $w_\alpha w_\beta$. D'après les résultats de [3], $C(\Psi)$ est isomorphe à $k[W_\Psi]$.

§ 5. Théorème d'isomorphisme

5.1. Dans [6], pour démontrer que l'anneau de Hecke $\mathscr{H}_k(G, \mathfrak{U})$ est isomorphe à l'algèbre de groupe $k[\mathfrak{W}]$, on a obtenu les résultats suivants: Soient u un indéterminé sur k, θ l'anneau $k[u]$ et $\tilde{A}$ le θ-module libre de base $(\omega\,;\,\omega\in\mathfrak{W})$. Dans $\tilde{A}$, il existe une structure de θ-algèbre telle que

$$h*\omega=h\omega$$

$$\omega_i*\omega=\begin{cases}\omega_i\omega & \text{si } l(w_iw)>l(w)\\ u\omega_i\omega+\sum\limits_{t\in K^*}\dfrac{u-1}{q-1}h_{\alpha_i}(t)\omega & \text{si } l(w_iw)<l(w)\end{cases}$$

pour tout $\omega\in\mathfrak{W}$, tout $h\in\mathfrak{H}$ et tout $i\in\{1,\cdots,l\}$, où $w=\zeta(\omega)$ et $l(w)$ est la longueur de w par rapport aux générateurs $\{w_i\,;\,1\leqslant i\leqslant l\}$. Et si ν et ν' sont des homomorphismes d'anneau de θ dans k tels que $\nu(u)=q$ et $\nu'(u)=1$, la déformation de $\tilde{A}$ par ν est isomorphe à $\mathscr{H}_k(G, \mathfrak{U})$ et celle par ν' est isomorphe à $k[\mathfrak{W}]$.

Maintenant, soit $M(\Psi)$ le θ-module libre de base $(w\,;\,w\in W_\Psi)$. Fixons une section ω de W_Ψ dans $\mathfrak{W}$ comme § 4.5 et définissons les applications θ-linéaires $f\colon M(\Psi)\to\tilde{A}$ et $g\,;\,\tilde{A}\to M(\Psi)$ comme celles données dans le théorème 4.4.

THÉORÈME 5.1. *Soient m_1, m_2 des éléments de $M(\Psi)$. Définissons le produit $m_1*m_2\in M(\Psi)$ par la formule suivante:*

$$m_1*m_2=g(f(m_1)*f(m_2))\,.$$

Alors, les constantes de structure $C(w, w',; w'')(u)$ du $M(\Psi)$ par rapport à la base $\{w\,;\,w\in W_\Psi\}$ sont des polynômes en u à coefficients entiers. En outre

$$C(w, w'\,;\,w'')(q)=\tilde{\mu}(w, w'\,;\,w'')$$

DÉMONSTRATION. Par le même raisonnement que celui du lemme 4.9 et du théorème 4.10, $C(w, w'\,;\,w'')(u)$ est donné par le deuxième terme de (4.11), en y remplaçant q par u.

5.2. Les polynômes $C(w, w'\,;\,w'')(u)$ sont déterminés par le groupe W_Ψ, la section ω, l'ensemble $\Delta(\Psi)=\{[\alpha]\in[\Delta]\,;\,\Psi|\mathfrak{H}_{[\alpha]}=1\}$ et la restriction de Ψ à $H_{\mathfrak{U}}$.

DÉFINITION. Soient $K^{(1)}$ un corps fini à q_1 éléments $(=GF(q_1))$ de la même caractéristique que K et $G^{(1)}$ le groupe de Chevalley associé à $\mathfrak{g}$ et $K^{(1)}$. Soit $\gamma^{(1)}\in\mathscr{D}_1\cap P_r$ où $\mathscr{D}_1=\{x\in E\,;\,(x,\alpha_i)\geqslant 0,\ (\beta_0{}^*, x)\leqslant q_1-1\}$. Appliquant le résultat de § 3.2 au groupe $G^{(1)}$, on définit un élément $\Psi_{\gamma^{(1)}}$ de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{H}^{(1)}, k^*)$ où $\mathfrak{H}^{(1)}$ est le sous-groupe de $G^{(1)}$ qui correspond à $\mathfrak{H}$ de G. Posons $\Psi^{(1)}=\Psi_{\gamma^{(1)}}$. On dit que $\Psi^{(1)}$ est équivalent à Ψ si

1) $I(\gamma^{(1)})=I(\gamma)$,
2) $\Delta(\Psi^{(1)})=\Delta(\Psi)$,
3) $\Psi^{(1)}|H_{\Pi}=\Psi|H_{\Pi}$,

où $I(\gamma^{(1)})$, $\Delta(\Psi^{(1)})$ sont définis comme $I(\gamma)$, $\Delta(\Psi)$.

La condition 1) entraîne $W(\Psi^{(1)})=W_{\Psi}=W_{I(\gamma)}$. Considérant le choix de la section ω (voir § 4.5), nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2. *Si $\Psi^{(1)}$ est équivalent à Ψ, les constantes de structure de $M(\Psi^{(1)})$ par rapport à la base $\{w\,;\,w\in W_{\Psi}\}$ sont égales à celles de $M(\Psi)$.*

5.3.

LEMME 5.3. 1) *Pour que $\Psi_{\gamma}|\mathfrak{H}_{\alpha}=1$, il faut et il suffit que* $(\alpha^*, \gamma)\equiv 0 \bmod (q-1)$.

2) $\Psi_{\gamma}(h_{\alpha}(-1))=(-1)^{(\alpha^*,\gamma)}$.

DÉMONSTRATION. Si un élément z de K^* est égal à $m\sigma$ ($m\in \boldsymbol{Z}$), $\chi_{\alpha,z}$ s'écrit $\chi_{m\alpha^*}$ (cf. § 3.1). Donc $\Psi_{\gamma}|\mathfrak{H}_{\alpha}=1$ est équivalent que, pour tout m ($1\leqslant m\leqslant q-1$), $(\gamma, m\alpha^*)\equiv 0 \bmod (q-1)$; d'où 1). Si $q\equiv 1 \bmod 2$, $h_{\alpha}(-1)=\chi_{\frac{q-1}{2}\alpha^*}$;

$$\Psi_{\gamma}(h_{\alpha}(-1))=\rho^{\left(\gamma,\frac{q-1}{2}\alpha^*\right)}=(-1)^{(\gamma,\alpha^*)}\,.$$

PROPOSITION 5.4. *Rappelons que $K=GF(q)$, $\gamma\in\mathscr{D}_0\cap P_r$, $\Psi=\Psi_{\gamma}$. Soit $K^{(1)}=GF(q^n)$, où n est entier impair. Posons $\gamma^{(1)}=(q^n-1)(q-1)^{-1}\gamma$ et $\Psi^{(1)}=\Psi_{\gamma^{(1)}}$. Alors $\Psi^{(1)}$ est équivalent à Ψ.*

DÉMONSTRATION. $(\alpha_i, \gamma)=0$ (resp. $(\beta_0^*, \gamma)=q-1$) est équivalent à $(\alpha_i, \gamma^{(1)})=0$ (resp. $(\beta_0^*, \gamma^{(1)})=q^n-1$) ; d'où $I(\gamma^{(1)})=I(\gamma)$. Pour $\alpha\in\Delta$, le fait que $(\alpha^*, \gamma)\equiv 0 \bmod (q-1)$ est équivalent au fait que $(\alpha^*, \gamma^{(1)})\equiv 0 \bmod (q^n-1)$. Et on a $(\alpha^*, \gamma^{(1)})=(q^{n-1}+\cdots+1)(\alpha^*, \gamma)\equiv(\alpha^*, \gamma) \bmod 2$; d'où $\Psi^{(1)}|H_{\Pi}=\Psi|H_{\Pi}$.

THÉORÈME 5.5. *Le produit défini dans $M(\Psi)$ est associatif.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer les identités

$$\sum_{w_0}C(w, w'\,;\,w_0)(u)\cdot C(w_0, w''\,;\,\tilde{w})(u)-\sum_{w_0}C(w, w_0\,;\,\tilde{w})(u)\cdot C(w', w''\,;\,w_0)(u)=0$$

pour $w, w', w'', \tilde{w}\in W_{\Psi}$.

Mais le commutant $C(\Psi)$ est associatif, donc, d'après les théorèmes 5.1 et 5.2 et la proposition 5.4, le premier terme est égal à 0, si $u=q^{\nu}$ pour tout entier positif impair ν ; d'où il est identiquement 0.

LEMME 5.6. *Si l'on définit la section ω comme* § 4.5,

$$\Psi(\omega(w)\omega(w')\omega(ww')^{-1})=1$$

pour tout $w, w'\in W_{\Psi}$.

DÉMONSTRATION. $\omega(w)\omega(w')\omega(ww')^{-1}\in\mathfrak{W}_I\cap\mathfrak{H}=H_I$ (cf. la prop. 4.5), où $I=I(\Psi)$.

Considérons les déformations de la θ-algèbre $M(\Psi)$ par ν ($\nu(u)=p$) et ν' ($\nu'(u)=1$). D'après le théorème 5.1, celle par ν est isomorphe au commutant $C(\Psi)$, tandis que, d'après ce lemme, celle par ν' est isomorphe à l'algèbre de groupe $k[W_\Psi]$ de W_Ψ. Donc, en vertu du théorème de Gerstenhaber-Tits ([3, p. 81]), nous avons le théorème principal.

THÉORÈME 5.7. *Le commutant $C(\Psi)$ est isomorphe à l'algèbre de groupe $k[W_\Psi]$ de W_Ψ sur k.*

§ 6. Appendice. Opération du groupe de Weyl sur $\mathfrak{H}$.

6.1. Nous reprenons le sujet de § 3.1.

PROPOSITION 6.1. *Il existe une correspondance biunivoque entre l'orbite de W dans $\mathfrak{H}$ et l'orbite de $\Omega^{(q-1)}$ dans $\mathscr{D}^{(q-1)}\cap D$.*

Soit $\lambda\in\mathscr{D}^{(q-1)}\cap D$. Possons $\chi=\chi_\lambda$, $h=h(\chi)$,

$$W_h=\{w\in W\,;\,w\cdot h=h\}\,,$$
$$\Delta(\chi)=\{\alpha\in\Delta\,;\,\chi(\alpha)=1\}\,,$$
$$(W_h)_0=\langle w_\alpha\,;\,\alpha\in\Delta(\chi)\rangle\,.$$

$(W_h)_0$ est un sous-groupe de W_h ; en effect, si $\alpha\in\Delta(\chi)$,

$$w_\alpha\chi(\gamma)=\chi(w_\alpha(\gamma))=\chi(\gamma-(\alpha^*,\gamma)\alpha)=\chi(\gamma)$$

pour tout $\gamma\in P_r$.

PROPOSITION 6.2. (Ree [5, prop. 1.4])

1) *W_h est isomorphe au produit semi-direct* $(\Omega^{(q-1)})_\lambda\cdot(\mathfrak{S}^{(q-1)})_\lambda$.

2) $\iota((\mathfrak{S}^{(q-1)})_\lambda)=(W_h)_0$.

DÉMONSTRATION. 2) Soit $\alpha\in\Delta(\chi)$, $w_\alpha(\lambda)=\lambda-(\lambda,\alpha)\alpha^*$. Posons $\delta=(\lambda,\alpha)\alpha^*$. $\alpha\in\Delta(\chi)$ entraîne $(\lambda,\alpha)\equiv0 \bmod (q-1)$, i.e. $\delta\in(q-1)D'$. $T(\delta)w_\alpha(\lambda)=\lambda$; d'où $w_\alpha\in\iota((\mathfrak{S}^{(q-1)})_\lambda)$. Inversement, soit $w\in\iota((\mathfrak{S}^{(q-1)})_\lambda)$. Il existe $T(\delta)$ tel que $T(\delta)w\in(\mathfrak{S}^{(q-1)})_\lambda$. $T(\delta)w=r_pr_q\cdots r_s$ où r_j est la réflexion par rapport à $P_j\ni\lambda$. $P_j\ni\lambda$ entraîne $\chi_\lambda(\alpha_j)=1$ i.e. $\alpha_j\in\Delta(\chi)$; d'où $\iota(r_j)\in(W_h)_0$ et $\iota(T(\delta)w)\in(W_h)_0$.

6.2. En vertu des résultats de la § 6.1, nous pouvons calculer le nombre des orbites de W dans $\mathfrak{H}$ qui consistent en des éléments d'ordre 2. Dans la suite, nous supposons que $q\equiv1 \pmod 2$.

Soit $\lambda\in D$. $h(\chi_\lambda)$ est d'ordre 2

$$\Longleftrightarrow \lambda\notin(q-1)D,\ 2\lambda\in(q-1)D$$

$$\Longleftrightarrow \lambda=\frac{q-1}{2}\sum_j c_j\varepsilon_j\,,\quad \text{où } (c_1,\cdots,c_l)\not\equiv(0,\cdots,0) \bmod 2\,.$$

Supposons que $\alpha_0 = \sum_i m_i \alpha_i$. Alors, si $\lambda = \frac{q-1}{2} \sum_j c_j \varepsilon_j$, pour que $\lambda \in \mathscr{D}^{(q-1)}$ et $h(\chi_\lambda)$ soit d'ordre 2, il faut et il suffit que $c_j \geqq 0$, $\sum c_j m_j \leqq 2$ et $(c_1, \cdots, c_l) \not\equiv (0, \cdots, 0)$ mod 2.

Le lemme suivant sert à déterminer les orbites de $\Omega^{(q-1)}$.

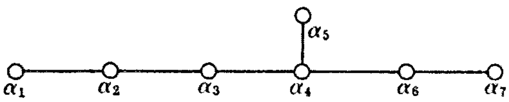
LEMME 6.3. 1) *Si* $w_\Pi(\alpha_i) = -\alpha_j$, $w_\Pi(\varepsilon_i) = -\varepsilon_j$.

2) *Supposons que* $(\alpha_0, \varepsilon_i) = 1$. *Alors, si* $w^{(i)}(\alpha^j) = -\alpha_k$ $(j \neq i)$,

$$w^{(i)}(\varepsilon_j) = m_j \varepsilon_i - \varepsilon_k ,$$

$$w^{(i)}(\varepsilon_i) = \varepsilon_i .$$

EXEMPLE. $\mathfrak{g} = (E_7)$



$$\alpha_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7$$

$$\Omega^{(q-1)} = \langle a \rangle, \text{ où } a = T((q-1)\varepsilon_1) w^{(1)} w_\Pi, \ a^2 = 1 \ ([4])$$

Nous allons déterminer tout les $\lambda \in \mathscr{D}^{(q-1)} \cap D$ tels que $h(\chi_\lambda)$ soient d'ordre 2 et les partager en les orbites de $\Omega^{(q-1)}$.

orbite de $\Omega^{(q-1)}$	$\left\{\frac{q-1}{2}\varepsilon_1\right\}$	$\left\{\frac{q-1}{2}\varepsilon_5\right\}$	$\left\{\frac{q-1}{2}\varepsilon_2, \frac{q-1}{2}\varepsilon_7\right\}$
type de $(W_h)_0$	(E_6)	(A_7)	$(A_1)\times(D_6)$
$\#(\Omega^{(q-1)})_\lambda$	2	2	1

Université de Sophia

Bibliographie

[1] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes $\mathfrak{p}$-adiques, Bull. Soc. Math. France, **89** (1961), 43-75.

[2] C. Chevalley, Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J., **7** (1955), 14-66.

[3] N. Iwahori, Generalized Tits System (Bruhat Decomposition) on $\mathfrak{p}$-Adic Semi-Simple Groups, Proc. Sym. Pure Math. IX, Amer. Math. Soc., Providence, 1966, 71-83.

[4] N. Iwahori-H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of the $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups, Publ. Math., I.H.E.S., n°25 (1965), 5-48.

[5] R. Ree, Classification of involutions and centralizers of involutions in certain simple groups, Proc. Int. Conf. Austral. Nat. Univ. Canberra, 1965, 281-301.

[6] T. Yokonuma, Sur la structure des anneaux de Hecke d'un groupe de Chevalley fini, C. R. Acad. Sci. Paris, **264** (1967), 344-347.

(Reçu le 20 septembre 1968)