Complément au mémoire ≪Sur le commutant d'une représentation d'un groupe de Chevalley fini≫

(Cette revue, tom. XV, p. 115-129.)

par Takeo YOKONUMA

1.

D'abord, le théorème dans mon mémoire [1] n'est vrai que sous les conditions suivantes, dont j'ai oublié d'exprimer une partie. Ici nous allons donner l'énoncé complet du théorème :

THÉORÈME. *Soit* $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{F}_q)$ *un couple d'une algèbre de Lie simple complexe* $\mathfrak{g}$ *et d'un corps fini à* q *éléments* $\boldsymbol{F}_q$. *Soit* G *le groupe de Chevalley associé au couple* $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{F}_q)$. *Désignons par* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{X}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ *les sous-groupes de* G *définis par Chevalley, où* Δ *est le système de racines de* $\mathfrak{g}$. *Soit* χ *une représentation de* $\mathfrak{U}$ *de degré* 1 *sur* k, *où* k *est un corps algébriquement clos de caractéristique première à l'ordre de* G.

1) *Supposons que la restriction de* χ *sur le sous-groupe à un paramètre* $\mathfrak{X}_\alpha$ *soit non-triviale pour toute* $\alpha \in \Pi$, *où* Π *est l'ensemble des racines simples par rapport à un ordre donné.*

2) *Dans le cas où le couple* $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{F}_q)$ *serait un des suivants,* $((B_l), \boldsymbol{F}_2)$ $(l \geqslant 2)$, $((C_l), \boldsymbol{F}_2)$ $(l \geqslant 3)$, $((F_4), \boldsymbol{F}_2)$, $((G_2), \boldsymbol{F}_2)$, $((G_2), \boldsymbol{F}_3)$ $((B_l), \ldots,$ *désignent les types de* $\mathfrak{g}$.), *supposons encore que la restriction de* χ *sur* $\mathfrak{X}_\alpha$ *soit triviale pour toute* $\alpha \in (\Delta^+ - \Pi)$, *où* Δ^+ *est l'ensemble des racines positives.*

Alors, le commutant $C(G, \mathfrak{U}\,; \chi)$ *de la représentation de* G *induite par* χ *est commutatif et de dimension* q^l, *où* l *est le rang de* $\mathfrak{g}$.

La condition 2) ci-dessus aurait dû être mise dans notre énoncé du théorème dans [1], comme on pourrait le vérifier en examinant la démonstration du théorème là donnée.

2.

Alors, nous pouvons montrer que, pour les couples exceptionnels cités dans la condition 2) du théorème, il existe des représentations χ de $\mathfrak{U}$ de degré 1 sur k qui satisfont à la condition 1), mais qui ne satisfont pas à la condition 2), et que la conclusion du théorème n'est pas vraie pour ces représentations-là.

En effet, nous pouvons vérifier les résultats suivants. (Le détail sera publié ultérieurement.) Désignons par $\Gamma(\chi)$ l'ensemble des racines positives pour lesquelles la restriction de χ sur $\mathfrak{X}_\alpha$ n'est pas triviale.

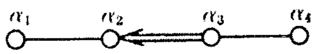
1) *Cas de* $((B_l), \boldsymbol{F}_2)$, $((C_l), \boldsymbol{F}_2)$.

Π : (B_l), (C_l)

Il existe une seule représentation exceptionnelle χ i.e. représentation qui satisfait à 1) sans satisfaisant à 2). Alors $\Gamma(\chi)$ est égal à $\Pi \cup \{w_l(\alpha_{l-1}),\ w_{l-1}(\alpha_l)\}$ où w_i désigne la réflexion relative à α_i. Le commutant $C(G, \mathfrak{U}\,;\chi)$ n'est pas commutatif. Sa dimension est 8 si $l=2$, et $(2^l+2^{l-2}+3\cdot 2^{l-3})$ si $l\geqslant 3$.

2) *Cas de* $((F_4), \boldsymbol{F}_2)$.

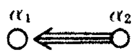
Π :



Il existe une seule représentation exceptionnelle χ. Alors $\Gamma(\chi)=\Pi \cup \{w_3(\alpha_2), w_2(\alpha_3)\}$ et le commutant $C(G, \mathfrak{U}\,;\chi)$ est de dimension 22.

3) *Cas de* $((G_2), \boldsymbol{F}_2)$

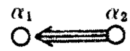
Π :



Il existe une seule représentation exceptionnelle χ, aussi. Alors $\Gamma(\chi)=\Pi \cup \{\alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_1+\alpha_2\}$ et le commutant $C(G, \mathfrak{U}\,;\chi)$ est commutatif et de dimension 6.

4) *Cas de* $((G_2), \boldsymbol{F}_3)$

Π :



Il existe huit représentations exceptionnelles. Pour toute d'elles $\Gamma(\chi)=\Pi \cup \{\alpha_1+\alpha_2,\ 3\alpha_1+\alpha_2\}$ et le commutant $C(G, \mathfrak{U}\,;\chi)$ est de dimension 11.

Université de Sophia

Bibliographie

[1] T. Yokonuma, Sur le commutant d'une représentation d'un groupe de Chevalley fini, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. I, **15** (1968), 115-129.

(Reçu le 7 fevrier 1969)