Sur le commutant d'une représentation d'un groupe de Chevalley fini

En Hommage à M. le Professeur S. Iyanaga à l'occasion de sa 60ème année.

par Takeo YOKONUMA

§ 0. Introduction.

Dans [2], I. M. Gelfand et M. I. Graev ont énoncé un théorème sur la commutativité du commutant de la représentation d'un groupe de Chevalley sur un corps fini induite par un caractère ≪en position générale≫ d'un sous-groupe unipotent maximal $\mathfrak{U}$, et en ont donné la démonstration dans le cas du groupe SL_n. Dans cette note on donne la démonstration générale de ce théorème, c'est-à-dire:

THÉORÈME. *Soient G le groupe de Chevalley sur un corps fini à q éléments et $\mathfrak{U}$ un sous-groupe unipotent maximal. Soit χ une représentation de $\mathfrak{U}$ de degré 1 sur k, k étant un corps algébriquement clos de caractéristique première à l'ordre de G, telle que la restriction de χ sur le sous-groupe à un paramètre $\mathfrak{X}_\alpha$ de G associé à la racine α soit non-triviale pour toute racine simple.* (Une telle représentation est appelée ≪en position générale≫ dans [2].) *Alors le commutant de la représentation de G induite par χ est commutatif et de dimension q^l.*

Par conséquent, la représentation de G induite par χ se décompose en q^l composantes irréductibles deux à deux inéquivalentes.

La méthode de la démonstration est essentiellement analogue à celle donnée dans [2] pour le cas du groupe SL_n. Le groupe G a la décomposition $G=\mathfrak{U}\mathfrak{W}\mathfrak{U}$ et on peut prendre $\mathfrak{W}$ comme un système de représentants des doubles classes de G modulo $\mathfrak{U}$. Nous construisons dans § 3 un anti-automorphisme θ de G tel que $\theta(\mathfrak{U})=\mathfrak{U}$ et $\chi\circ\theta^{-1}=\chi$. Soit $\mathfrak{W}(\chi)$ l'ensemble des éléments ω de $\mathfrak{W}$ qui satisfont à la condition suivante: si $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$ sont tels que $\omega u_1 = u_2\omega$, alors $\chi(u_1)=\chi(u_2)$. D'après une condition suffisante pour la commutativité du commutant, qui est expliquée dans § 1 pour la commodité du lecteur, il suffit de montrer que $\theta(\omega)=\omega$ pour tout $\omega\in\mathfrak{W}(\chi)$. Nous l'accomplirons dans § 4. Dans § 2, nous montrons une proposition sur les constantes de structure des algèbres de Lie qui sert dans § 4. Nous employons la classification des algèbres de Lie simples complexes et vérifierons la proposition ≪cas par cas≫.

J'exprime ma profonde reconnaissance à M. F. Bruhat, qui a bien voulu diriger

mes recherches et me donner tant de suggestions et encouragement pendant mon séjour à Paris, où j'ai préparé ce travail, à M. N. Iwahori, qui m'a guidé constamment de ses conseils et à M. R. Takahashi, qui m'a donné beaucoup de suggestions précieuses.

Le résultat de cette note a été déjà annoncé dans [6].

§ 1. Lemmes sur le commutant d'une représentation.

Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G et χ une représentation de degré 1 de H dans un corps algébriquement clos k de caractéristique première à l'ordre de G. L'espace L des fonctions definies dans G à valeurs dans k est une k-algèbre associative par la convolution:

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} f_1(xy^{-1}) f_2(y) ,$$

où $f_1, f_2 \in L$, $x \in G$ et $|H|$ désigne l'ordre de H.

Soit $L(\chi)$ l'ensemble des éléments φ de L qui vérifient $\varphi(hgh') = \chi(h)\varphi(g)\chi(h')$ quels que soient $h, h' \in H$, $g \in G$; c'est une sous-algèbre de L. Soient $S = \{x_i;\ i \in I\}$ un système de représentants des doubles classes de G modulo H et $S(\chi)$ l'ensemble des éléments x_j de S qui satisfont à la condition suivante: si h_1, h_2 sont des éléments de H vérifiant $x_j = h_1 x_j h_2$, alors $\chi(h_1)\chi(h_2) = 1$. Pour tout $j \in J$ où J est l'ensemble des indices j tels que $x_j \in S(\chi)$, on définit une fonction $\varphi_j \in L(\chi)$ par $\varphi_j(g) = \chi(h_1)\chi(h_2)\delta_{jk}$ si $g = h_1 x_k h_2$, où δ_{jk} est le symbole de Kronecker. Alors les fonctions φ_j $(j \in J)$ forment une base de $L(\chi)$. En effet, si $\varphi \in L(\chi)$, le support $\{x \in G;\ \varphi(x) \neq 0\}$ de φ est une réunion de doubles classes et si $\varphi(x_i) \neq 0$ $(x_i \in S)$, alors $x_i \in S(\chi)$.

Nous considérons la représentation χ^G de G induite par χ; son espace de représentation $V(\chi)$ est l'espace des éléments $f \in L$ tels que $f(hg) = \chi(h) f(g)$ pour tout $h \in H$ et $g \in G$. L'opération de G dans $V(\chi)$ est définie par $\chi^G(a) f(x) = f(xa)$ où $a, x \in G$, $f \in V(\chi)$. Soit $\{g_k;\ k = 1, \cdots, m\}$ un système de représentants des classes à droite modulo H de G tel que $g_1 = e$ i.e. $G = \bigcup_{k=1}^{m} Hg_k$. Pour tout élément g_k on définit une fonction $f_k \in L$ par $f_k(hg_l) = \chi(h)\delta_{kl}$ $(h \in H)$. Alors on sait que $\{f_k;\ k = 1, \cdots, m\}$ est une base de $V(\chi)$; on a $\chi^G(g_k^{-1}) f_1 = f_k$ pour $k = 1, \cdots, m$; $\chi^G(h) f_1 = \chi(h) f_1$ pour $h \in H$.

Soit $C(\chi)$ le commutant de χ^G, i.e. la sous-algèbre de l'algèbre d'endomorphismes de $V(\chi)$ formée de tous les opérateurs A vérifiant $A\chi^G(g) = \chi^G(g) A$ pour tout $g \in G$.

PROPOSITION 1.1. *L'algèbre de fonctions $L(\chi)$ est isomorphe au commutant $C(\chi)$.*

DÉMONSTRATION. On peut définir une application linéaire Ψ de $C(\chi)$ dans $L(\chi)$

par $\Psi(A)=\phi$, où $\phi(x)=(Af_1)(x)$, $A\in C(\chi)$, $x\in G$. Pour $\phi\in L(\chi)$, on pose $A_\phi(f)=\phi*f$. On a $A_\phi\in C(\chi)$ et $\Psi(A_\phi)=\phi$. Il en résulte que Ψ est surjective. Montrons que Ψ est injective; si $\Psi(A)=\Psi(B)$, $Af_k=A\chi^G(g_k^{-1})f_1=\chi^G(g_k^{-1})Af_1=\chi^G(g_k^{-1})Bf_1=Bf_k$ pour tout k, donc $A=B$. L'application $\Phi:\phi\to A_\phi$ est l'inverse de Ψ et bijective. D'après l'associativité de L, Φ est un homomorphisme d'algèbre.

PROPOSITION 1.2. *Soit σ un automorphisme (resp. un anti-automorphisme) de G tel que $\sigma(H)=H$. Alors $L(\chi^\sigma)$ et $L(\chi)$ sont isomorphes (resp. anti-isomorphes), où $\chi^\sigma=\chi\circ\sigma^{-1}$.*

DÉMONSTRATION. L'ensemble $T=\{\sigma(x_i);\ i\in I\}$ est aussi un système de représentants des doubles classes de G. Désignons par $T(\chi^\sigma)$ l'ensemble des éléments $\sigma(x_j)$ de T tels que, si h_1, h_2 sont des éléments de H vérifiant $h_1\sigma(x_j)h_2=\sigma(x_j)$, $\chi^\sigma(h_1)\chi^\sigma(h_2)=1$. Alors on a $T(\chi^\sigma)=\sigma(S(\chi))$. On définit les fonctions $\psi_j\in L(\chi^\sigma)$ comme φ_j, i.e. $\psi_j(g)=\chi^\sigma(h_1)\chi^\sigma(h_2)\delta_{jk}$ si $g=h_1\sigma(x_k)h_2$. Ces ψ_j forment une base de $L(\chi^\sigma)$.

D'autre part on peut définir une application $f\to f^\sigma$ de L par $f^\sigma(x)=(f\circ\sigma^{-1})(x)$, qui est un automorphisme ou un anti-automorphisme de L suivant les cas. Puisque $\varphi_j{}^\sigma=\psi_j$, la restriction de cette application sur $L(\chi)$ donne l'application entre $L(\chi)$ et $L(\chi^\sigma)$.

COROLLAIRE. *S'il existe un anti-automorphisme τ tel que l'on ait,*

(1) $\tau(H)=H$;

(2) $\chi^\tau=\chi$;

(3) *pour chaque* $x_j\in S(\chi)$, $\tau(x_j)=x_j$;

alors le commutant $C(\chi)$ est commutatif.

DÉMONSTRATION. On a $\varphi^\tau=\varphi$ pour toute $\varphi\in L(\chi)$. Donc $\varphi*\psi=(\varphi*\psi)^\tau=\psi^\tau*\varphi^\tau=\psi*\varphi$ quelles que soient $\varphi,\psi\in L(\chi)$.

§2. Lemmes sur l'algèbre de Lie semi-simple complexe.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Δ le système de racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ et Π un système fondamental de racines. Il existe une base $\{H_i, X_\alpha;\ i=1,\cdots,l(=\text{rang}\,\mathfrak{g}), \alpha\in\Delta\}$ de $\mathfrak{g}$ qui vérifie les conditions suivantes,

(1) $\{H_i(i=1,\cdots,l)\}$ forme une $\boldsymbol{Z}$-base de $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{Z}}=\{H\in\mathfrak{h};\ \lambda(H)\in\boldsymbol{Z}$ pour tout poids λ de $\mathfrak{g}$ relatif à $\mathfrak{h}\}$;

(2) $[H, X_\alpha]=\alpha(H)X_\alpha$ pour tout $H\in\mathfrak{h}$; $B(X_\alpha, X_{-\alpha})=2\cdot(\alpha,\alpha)^{-1}$ pour toute $\alpha\in\Delta$, où B désigne la forme de Killing de $\mathfrak{g}$;

(3) si α,β et $\alpha+\beta\in\Delta$, les nombres $N(\alpha,\beta)$ définis par $[X_\alpha, X_\beta]=N(\alpha,\beta)X_{\alpha+\beta}$

satisfont aux conditions suivantes, 1) $N(\alpha,\beta)=-N(-\alpha,-\beta)$, 2) $N(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{Z}$, 3) $|N(\alpha,\beta)|=p+1$ où p est le plus grand entier non négatif tel que $\beta-p\alpha$ soit une racine. ([1])

Une telle base s'appelle une base de Chevalley.

Soient W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ relatif à $\mathfrak{h}$, w_α la réflexion relative à $\alpha\in\Delta$ et w_0 l'élément unique de W qui transforme Π en $-\Pi$.

PROPOSITION 2.1. *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit simple. Alors il existe une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$ qui vérifie, pour toutes $\alpha,\beta\in\Delta$,*

(1) *si $\mathfrak{g}$ n'est pas de type (A_l), $N(w_0(\alpha), w_0(\beta))=-N(\alpha,\beta)$;*

(2) *si $\mathfrak{g}$ est de type (A_l), $N(w_0(\alpha), w_0(\beta))=N(\alpha,\beta)$.*

DÉMONSTRATION. Si $w_0=-1$, la condition dans la proposition n'est autre que (3) 1) de la définition de la base de Chevalley.

Supposons que $\mathfrak{g}$ soit de type (D_l) (l: impair) ou (E_6). Il existe une involution $\alpha\to\bar{\alpha}$ de Δ telle que $w_0(\alpha)=-\bar{\alpha}$. D'après Steinberg ([4]), il existe un automorphisme σ de $\mathfrak{g}$ et une base de Chevalley tels que $\sigma(X_\alpha)=X_{\bar{\alpha}}$. Il en résulte la proposition.

Supposons que $\mathfrak{g}$ soit de type (A_l), i.e. $\mathfrak{g}$ soit isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(l+1,\boldsymbol{C})$. Si l'on pose $X_\alpha=E_{ij}(i\neq j)$ où E_{ij} est la matrice d'ordre $l+1$ dont le (i,j) coefficient est 1 et les autres sont nuls, ces X_α forment une base de Chevalley avec une base $\{H_i;\ i=1,\cdots,l\}$ de $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{Z}}$ ([3]). En calculant les $N(\alpha,\beta)$ relatifs à cette base, on peut vérifier la condition.

Dans la suite on prendra une base de Chevalley qui a cette propriété.

Soient J un sous-ensemble de Π, W_J le sous-groupe de W engendré par $\{w_\alpha;\ \alpha\in J\}$ et w_J l'élément unique de W_J qui transforme J en $-J$.

LEMME 2.2. *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit simple. Soit $J=\Pi-\{\beta\}$. Alors il existe une suite de racines positives $\{\beta_i\}_{i=1}^r$ telle que:*

(1) *$\beta_1=\beta$, $\beta_r=w_J(\beta)$, $\gamma_i=\beta_{i+1}-\beta_i\in\Pi$ pour $i=1,\cdots,r-1$;*

(2) *il existe un entier s $\left(\leqq\frac{r}{2}\right)$ qui vérifie,*

1) *$w_J(\gamma_i)=-\gamma_{r-i}$ pour $i=1,\cdots,s$,*

2) *$w_J(\gamma_j)=-\gamma_j$ pour $j=s+1,\cdots,r-s-1$;*

3) *Les racines $\{\gamma_{s+1},\cdots,\gamma_{r-s-1}\}$ sont différentes et la somme de deux d'entre elles n'est pas une racine.*

DÉMONSTRATION. Nous construirons explicitement une telle suite dans chaque cas. Nous indiquons $\beta,\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-1}$ dans un schéma comme ci-dessous;

$$\beta-\gamma_1-\cdots-\gamma_{r-1}.$$

Dans le cas $\beta=\alpha_i$, nous désignons $J=\Pi-\{\alpha_i\}$ par J_i.

$\mathfrak{g}=(A_l)$ 

$\beta=\alpha_i \quad w_{J_i}(\alpha_i)=\alpha_1+\cdots+\alpha_l$

$\alpha_i-\alpha_{i-1}-\alpha_{i-2}-\cdots-\alpha_{i-[\frac{i-2}{2}]}-\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\cdots-\alpha_{i+[\frac{l-i+1}{2}]}$

$-(\alpha_{\frac{i}{2}}^{*})-\alpha_{i+1+[\frac{l-i+1}{2}]}-\cdots-\alpha_{l-1}-\alpha_l-\alpha_{[\frac{i-1}{2}]}-\cdots-\alpha_2-\alpha_1$

* le cas où i est pair.

$\mathfrak{g}=(B_l)$ 

$\beta=\alpha_l \quad w_{J_l}(\alpha_l)=\alpha_1+\cdots+\alpha_l$

$\alpha_l-\alpha_{l-1}-\alpha_{l-2}-\cdots-\alpha_2-\alpha_1$

$\beta=\alpha_i\ (i\neq l) \quad w_{J_i}(\alpha_i)=\alpha_1+\cdots+\alpha_i+2(\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_l)$

$\alpha_i-\alpha_{i+1}-\cdots-\alpha_l-\alpha_{i-1}-\alpha_{i-2}-\cdots-\alpha_2-\alpha_1-\alpha_l-\cdots\alpha_{i+1}$

$\mathfrak{g}=(C_l)$ 

$\beta=\alpha_l \quad w_{J_l}(\alpha_l)=2(\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-1})+\alpha_l$

$\alpha_l-\alpha_{l-1}-\cdots-\alpha_1-\alpha_{l-1}-\cdots-\alpha_1$

$\beta=\alpha_i\ (i\neq l) \quad w_{J_i}(\alpha_i)=\alpha_1+\cdots+\alpha_i+2(\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{l-1})+\alpha_l$

$\alpha_i-\alpha_{i+1}-\cdots-\alpha_{l-1}-\alpha_{i-1}-\cdots-\alpha_{[\frac{i-1}{2}]+1}-\alpha_l-\alpha_{[\frac{i-1}{2}]}-\cdots-\alpha_1-\alpha_{l-1}-\cdots\alpha_{i+1}$

$\mathfrak{g}=(D_l)$ 

$\beta=\alpha_{l-1} \quad w_{J_{l-1}}(\alpha_{l-1})=\alpha_1+2(\alpha_2+\cdots+\alpha_{l-2})+\alpha_{l-1}+\alpha_l$

$\alpha_{l-1}-\alpha_{l-2}-\alpha_{l-3}-\cdots-\alpha_2-\alpha_1-\alpha_l-\alpha_{l-2}-\cdots-\alpha_2$

En échangeant α_{l-1} et α_l, nous avons le cas $\beta=\alpha_l$.

$\beta=\alpha_{l-2} \quad w_{J_{l-2}}(\alpha_{l-2})=\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_l.$

$\alpha_{l-2}-\alpha_{l-3}-\alpha_{l-4}-\cdots-\alpha_{[\frac{l-3}{2}]+1}-\alpha_{l-1}-\alpha_l-\alpha_{[\frac{l-3}{2}]}-\cdots-\alpha_2-\alpha_1$

$\beta=\alpha_i\ (i\neq l-2, l-1, l)$

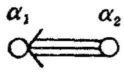
$w_{J_i}(\alpha_i)=\alpha_1+\cdots+\alpha_i+2(\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{l-2})+\alpha_{l-1}+\alpha_l$

$\alpha_i-\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\cdots-\alpha_{l-2}-\alpha_{i-1}-\cdots-\alpha_{[\frac{i+2}{2}]}-\alpha_l-(\alpha_{\frac{i}{2}}^{*})-\alpha_{l-1}$

$-\alpha_{[\frac{i-1}{2}]}-\cdots-\alpha_1-\alpha_{l-2}-\cdots-\alpha_{i+1}$

*le cas où i est pair.

$\mathfrak{g}=(G_2)$



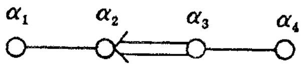
$\beta=\alpha_1 \qquad w_{J_1}(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2$

$\alpha_1-\alpha_2$

$\beta=\alpha_2 \qquad w_{J_2}(\alpha_2)=3\alpha_1+\alpha_2$

$\alpha_2-\alpha_1-\alpha_1-\alpha_1$

$\mathfrak{g}=(F_4)$



$\beta=\alpha_1 \qquad w_{J_1}(\alpha_1)=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$

$\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_2-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2$

$\beta=\alpha_2 \qquad w_{J_2}(\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

$\alpha_2-\alpha_3-\alpha_1-\alpha_4$

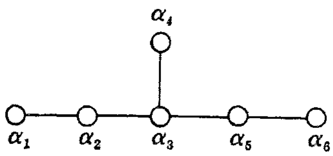
$\beta=\alpha_3 \qquad w_{J_3}(\alpha_3)=2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

$\alpha_3-\alpha_2-\alpha_1-\alpha_4-\alpha_2-\alpha_1$

$\beta=\alpha_4 \qquad w_{J_4}(\alpha_4)=2\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4$

$\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2-\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_2-\alpha_3$

$\mathfrak{g}=(E_6)$



$\beta=\alpha_1 \qquad w_{J_1}(\alpha_1)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6$

$\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6-\alpha_3-\alpha_5-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$

$\beta=\alpha_2 \qquad w_{J_2}(\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6$

$\alpha_2-\alpha_3-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_1-\alpha_6-\alpha_3-\alpha_5$

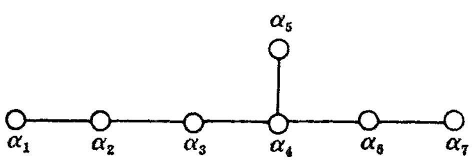
$\beta=\alpha_3 \qquad w_{J_3}(\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$

$\alpha_3-\alpha_2-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_6-\alpha_1$

$\beta=\alpha_4 \qquad w_{J_4}(\alpha_4)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6$

$\alpha_4-\alpha_3-\alpha_5-\alpha_6-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_5-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$

$\mathfrak{g}=(E_7)$



$\beta=\alpha_1 \qquad w_{J_1}(\alpha_1)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+2\alpha_5+3\alpha_6+2\alpha_7$

$\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2-\alpha_7-\alpha_6-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_6-\alpha_7$

$\beta=\alpha_2 \qquad w_{J_2}(\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7$

$\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_6-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_1-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_6-\alpha_4-\alpha_5$

$\beta=\alpha_3 \qquad w_{J_3}(\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7$

$\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6-\alpha_2-\alpha_1-\alpha_4-\alpha_7-\alpha_6$

$\beta=\alpha_4 \qquad w_{J_4}(\alpha_4)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7$

$\alpha_4-\alpha_3-\alpha_6-\alpha_2-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_1$

$\beta=\alpha_5 \qquad w_{J_5}(\alpha_5)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+3\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7$

$\alpha_5-\alpha_4-\alpha_6-\alpha_7-\alpha_3-\alpha_2-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_6-\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$

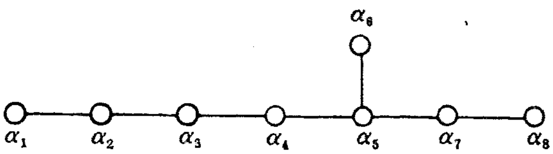
$\beta=\alpha_6 \qquad w_{J_6}(\alpha_6)=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7$

$\alpha_6-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2-\alpha_1-\alpha_7-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2$

$\beta=\alpha_7 \qquad w_{J_7}(\alpha_7)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+2\alpha_5+3\alpha_6+\alpha_7$

$\alpha_7-\alpha_6-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_6-\alpha_1-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_6$

$\mathfrak{g}=(E_8)$



$\beta=\alpha_1 \qquad w_{J_1}(\alpha_1)=\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+5\alpha_4+6\alpha_5+3\alpha_6+4\alpha_7+2\alpha_8$

$\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6-\alpha_7-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_8-\alpha_7-\alpha_5-\alpha_6-\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_8-\alpha_3$
$-\alpha_4-\alpha_6-\alpha_7-\alpha_6-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2$

$\beta=\alpha_2 \qquad w_{J_2}(\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+4\alpha_5+2\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8$

$\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_6-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_8-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_7-\alpha_5-\alpha_6-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_8$

$\beta=\alpha_3 \qquad w_{J_3}(\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+2\alpha_7+\alpha_8$

$\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_6-\alpha_2-\alpha_5-\alpha_8-\alpha_1-\alpha_4-\alpha_7-\alpha_5-\alpha_6$

$\beta=\alpha_4 \qquad w_{J_4}(\alpha_4)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6+2\alpha_7+\alpha_8$

$\alpha_4-\alpha_3-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_6-\alpha_2-\alpha_8-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_1$

$\beta=\alpha_5 \qquad w_{J_5}(\alpha_5)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8$

$\alpha_5-\alpha_7-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_6-\alpha_2-\alpha_1-\alpha_8$

$\beta=\alpha_6 \qquad w_{J_6}(\alpha_6)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+3\alpha_4+3\alpha_5+\alpha_6+2\alpha_7+\alpha_8$

$\alpha_6-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_8-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$

$\beta=\alpha_7 \qquad w_{J_7}(\alpha_7)=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8$

$\alpha_7-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2-\alpha_1-\alpha_8-\alpha_6-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2$

$\beta=\alpha_8 \qquad w_{J_8}(\alpha_8)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+5\alpha_5+3\alpha_6+3\alpha_7+\alpha_8$

$\alpha_8-\alpha_7-\alpha_5-\alpha_4-\alpha_3-\alpha_2-\alpha_6-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_4-\alpha_1-\alpha_6-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_6-\alpha_5-\alpha_7-\alpha_2-\alpha_3$
$-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6$

REMARQUE. Nous allons indiquer comment nous calculons $w_{J_i}(\alpha_i)$.

LEMME. *Supposons que* $J_i(=\Pi-\{\alpha_i\})=\bigcup_{j=1}^{p} J^{(j)}$ *et que* $J^{(j)}(j=1,\cdots,p)$ *soient mutuellement orthogonaux. Alors*

$$w_{J_i}(\alpha_i)=\alpha_i+\sum_{j=1}^{p}(w_{J^{(j)}}(\alpha_i)-\alpha_i) .$$

DÉMONSTRATION. $w_{J_i}=\prod_{j=1}^{p} w_{J^{(j)}}$. $w_{J^{(k)}}$ est trivial sur $J^{(j)}(j\neq k)$. Donc

$$\begin{aligned} w_{J_i}(\alpha_i) &= w_{J^{(1)}}\cdots w_{J^{(p-1)}}(w_{J^{(p)}}(\alpha_i)) \\ &= w_{J^{(1)}}\cdots w_{J^{(p-1)}}\{\alpha_i+(w_{J^{(p)}}(\alpha_i)-\alpha_i)\} \\ &= w_{J^{(1)}}\cdots w_{J^{(p-2)}}\{w_{J^{(p-1)}}(\alpha_i)+(w_{J^{(p)}}(\alpha_i)-\alpha_i)\} \\ &= \cdots \\ &= \alpha_i+\sum_{j=1}^{p}(w_{J^{(j)}}(\alpha_i)-\alpha_i) . \end{aligned}$$

D'après ce lemme, nous nous ramenons au cas où α_i est au bout du schéma de Dynkin de Π. Alors la proposition suivante donne le résultat dans beaucoup de cas.

PROPOSITION (Iwahori-Matsumoto [Publ. Math., I. H. E. S. n°25. Cor. 1.22]). *Soit* $\alpha_0=\sum_{j=1}^{l} m_j\alpha_j$ *la plus grande racine. Si* $m_i=1$, *alors* $w_{J_i}(\alpha_i)=\alpha_0$.

Considérons le système dual $\Pi^*=\{\alpha^*;\ \alpha\in\Pi\}$, où $\alpha^*=\frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha$. Alors $w_\alpha=w_{\alpha^*}$ et $w_{J_i^*}=w_{J_i}$ où $J_i^*=\{\alpha^*,\alpha\in J_i\}$ et nous pouvons employer l'égalité

$$w_{J_i}(\alpha_i)=\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}w_{J_i^*}(\alpha_i^*) .$$

Dans quelques cas nous devons calculer directement.

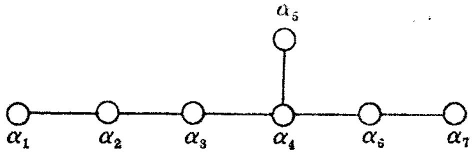
EXEMPLE 1. $\mathfrak{g}=(B_l)$

$$w_{J_l}(\alpha_l)=\alpha_1+\cdots+\alpha_l$$

En effet, Π^* étant de type (C_l), d'après la proposition,

$$\begin{aligned} w_{J_l^*}(\alpha_l^*) &= 2(\alpha_1^*+\cdots+\alpha_{l-1}^*)+\alpha_l^*, \text{ donc} \\ w_{J_l}(\alpha_l) &= \frac{(\alpha_l,\alpha_l)}{2}\{2(\alpha_1^*+\cdots\alpha_{l-1}^*)+\alpha_l^*\} \\ &= \alpha_1+\cdots+\alpha_l . \end{aligned}$$

EXEMPLE 2. $\mathfrak{g}=(E_7)$



$$w_{J_7}(\alpha_7)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+2\alpha_5+3\alpha_6+\alpha_7$$

Soit $\{\theta_0,\theta_1,\cdots\theta_6\}$ une base orthonormale de $\boldsymbol{R}^7$. Supposons que

$$\alpha_i=\theta_i-\theta_{i+1}\ \ i=1,\cdots,5,\quad \alpha_6=\theta_5+\theta_6$$

et
$$\alpha_7=\frac{\sqrt{2}}{2}\theta_0-\frac{1}{2}(\theta_1+\cdots+\theta_6).$$

L'élément w_{J_7} est -1 sur J_7, donc $w_{J_7}(\theta_i)=-\theta_i\ \ i=1,\cdots,6,\ w_{J_7}(\theta_0)=\theta_0$

$$\begin{aligned} w_{J_7}(\alpha_7)&=\frac{\sqrt{2}}{2}\theta_0+\frac{1}{2}(\theta_1+\cdots+\theta_6)\\ &=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+2\alpha_5+3\alpha_6+\alpha_7\,.\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.3. *Soient $J\subset\Pi$ et $\beta\in\Pi-J$. Il existe une suite de racines positives $\{\beta_i\}_{i=1}^r$ telle que:*

(1) $\beta_1=\beta,\ \beta_r=w_J(\beta),\ \gamma_i=\beta_{i+1}-\beta_i\in\Pi$ *pour* $i=1,\cdots,r-1$;

(2) $$N=\frac{N(w_J(\beta_1),w_J(\gamma_1))N(w_J(\beta_2),w_J(\gamma_2))\cdots N(w_J(\beta_{r-1}),w_J(\gamma_{r-1}))}{N(\beta_1,\gamma_1)N(\beta_2,\gamma_2)\cdots N(\beta_{r-1},\gamma_{r-1})}=1\,.$$

DÉMONSTRATION. On se ramène au cas où $\Pi=J\cup\{\beta\}$ est indécomposable, i.e. le schéma de Dynkin de Π est connexe. Remarquons tout d'abord que:

(1) Soient α,β deux racines avec $\alpha+\beta\neq0$. Supposons que les $\beta+k\alpha$ avec $-p\leqslant k\leqslant q$ forment la α-série contenant β. Alors

$$N(\beta,\alpha)N(\beta+\alpha,-\alpha)=q(p+1)\,. \qquad ([1])$$

Donc, si α,β et $\alpha+\beta\in\Delta$, $N(\beta,\alpha)N(\beta+\alpha,-\alpha)>0$.

(2) Pour tout $w\in W$, $N(\alpha,\beta)=\pm N(w(\alpha),w(\beta))$.

On prend la suite construite dans le lemme 2.2 et calcule le nombre N. $N=\pm1$ d'après (2). On va montrer que le numérateur de N a le même signe que le dénominateur, d'où on aura $N=1$.

Pour $i=1,\cdots,s,\ r-s,\cdots,r-1$,

$$N(w_J(\beta_i),w_J(\gamma_i))(=N(\beta_{r+1-i},-\gamma_{r-i})=N(\beta_{r-i}+\gamma_{r-i},-\gamma_{r-i}))$$

a le même signe que $N(\beta_{r-i},\gamma_{r-i})$ d'après (1). D'autre part,

$$N(w_J(\beta_{s+1}),w_J(\gamma_{s+1}))\cdots N(w_J(\beta_{r-s-1}),w_J(\gamma_{r-s-1}))$$

$(=N(\beta_{r-s},-\gamma_{s+1})\cdots N(\beta_{s+1}+\gamma_{r-s-1},-\gamma_{r-s-1}))$ a le même signe que

$$N(\beta_{r-s}-\gamma_{s+1},\gamma_{s+1})\cdots N(\beta_{s+1},\gamma_{r-s-1})\,.$$

Or, d'après l'identité de Jacobi, on a

$$[[\cdots[[X_{\beta_{s+1}},X_{\gamma_{s+1}}],X_{\gamma_{s+2}}]\cdots],X_{\gamma_{r-s-1}}]=[[\cdots[X_{\beta_{s+1}},X_{\gamma_{r-s-1}}]\cdots],X_{\gamma_{s+1}}]\,,$$

d'où résulte que

$$\begin{aligned}&N(\beta_{s+1},\gamma_{s+1})N(\beta_{s+2},\gamma_{s+2})\cdots N(\beta_{r-s-1},\gamma_{r-s-1})\\ &=N(\beta_{r-s}-\gamma_{s+1},\gamma_{s+1})\cdots\cdots N(\beta_{s+1},\gamma_{r-s-1})\,.\end{aligned}$$

§ 3. Groupe de Chevalley.

Soit K un corps fini à q éléments. On construit le groupe de Chevalley G associé à $\mathfrak{g}$ et K. On emploie les notations de [1]: G est un sous-groupe du groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}_Z \otimes K$ $(=\mathfrak{g}_K)$; $\mathfrak{X}_\alpha = \{x_\alpha(t) : t \in K\}$ est le sous-groupe à un paramètre de G associé à la racine α. On fixe un ordre lexicographique de $\mathfrak{h}_R^*$ tel que Π soit l'ensemble de racines simples pour cet ordre et tel qu'il soit régulier au sens de Chevalley ([1] p. 20); $\mathfrak{U}$ est le sous-groupe de G engendré par les $\mathfrak{X}_\alpha$, où α parcourt toutes les racines positives.

Nous rappelons quelques propriétés du groupe de Chevalley. Pour tout élément χ de Hom (P_r, K^*), où P_r est le groupe additif de racines de $\mathfrak{g}$ relatif à $\mathfrak{h}$, on associe un élément $h(\chi)$ de G; ces $h(\chi), \chi \in$ Hom (P_r, K^*), forment un sous-groupe $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{H}$ est contenu dans le normalisateur de $\mathfrak{U}$ dans G; pour toute racine α il existe un homomorphisme ϕ_α de $SL(2, K)$ dans G tel que

$$\phi_\alpha\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_\alpha(t); \qquad \phi_\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_{-\alpha}(t);$$

on désigne par ω_α l'image de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ par ϕ_α, et par $\mathfrak{W}$ le sous-groupe engendré par $\mathfrak{H}$ et tous les ω_α $(\alpha \in \Delta)$; alors $\mathfrak{H}$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{W}$ et le groupe quotient $\mathfrak{W}/\mathfrak{H}$ est isomorphe au groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}$ relatif à $\mathfrak{h}$; on note ζ l'application canonique de $\mathfrak{W}$ sur W $(\zeta(\omega_\alpha) = w_\alpha)$. Le sous-groupe $\mathfrak{W}$ est un système de représentants des doubles classes de G modulo $\mathfrak{U}$. Si $\alpha, \beta \in \Pi$ et $m_{\alpha\beta}$ est l'ordre de $w_\alpha w_\beta$ dans W, alors, d'après Tits ([5]).

$$(\sharp) \qquad \underbrace{\omega_\alpha \omega_\beta \omega_\alpha \cdots}_{m_{\alpha\beta} \text{ facteurs}} = \underbrace{\omega_\beta \omega_\alpha \omega_\beta \cdots}_{m_{\alpha\beta} \text{ facteurs}}.$$

Pour $w \in W$, soit $w = w_\alpha \cdots w_\gamma$ une expression réduite de $w \in W$ avec $\alpha, \cdots \gamma \in \Pi$; d'après la propriété $(\sharp)$, l'élément $\omega_\alpha \cdots \omega_\gamma$ ne dépend que de w; nous le notons $\tau(w)$.

PROPOSITION 3.1. *Si G est un groupe de Chevalley, il existe un anti-automorphisme θ de G qui vérifie les conditions suivantes:*

(1) $\theta(x_\alpha(t)) = x_{-w_0(\alpha)}(c_\alpha t)$ *pour* $\alpha \in \Delta$ *où* $c_\alpha \in K^*$;

(2) $c_\alpha = 1$ *pour toute* $\alpha \in \Pi$;

(3) $\theta(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$.

DÉMONSTRATION. Il existe un automorphisme φ_0 de $\mathfrak{g}$ tel que $\varphi_0(H) = -H$ pour $H \in \mathfrak{h}$ et $\varphi_0(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$. φ_0 induit un automorphisme φ de $\mathfrak{g}_K$ et un automorphisme Φ de $G (\Phi(g) = \varphi g \varphi^{-1}$ pour $g \in G)$ tel que $\Phi(x_\alpha(t)) = x_{-\alpha}(-t)$ et $\Phi(h) = h^{-1}$ pour $h \in \mathfrak{H}$. On pose $\theta(g) = g_0(\Phi(g))^{-1} g_0^{-1}$ où g_0 est un élément de $\mathfrak{W}$ de la forme $h\tau(w_0)$ avec $h \in \mathfrak{H}$ choisi de telle sorte que la condition (2) soit réalisée.

Pour $\omega=h\tau(w)\in\mathfrak{W}$ avec $h\in\mathfrak{H}$, $\theta(\omega)=g_0\tau(w)^{-1}hg_0^{-1}$. En effet, comme

$$\omega_\alpha=x_\alpha(1)x_{-\alpha}(-1)x_\alpha(1)\ ,$$

$$\begin{aligned}\Phi(\omega_\alpha)&=x_{-\alpha}(-1)x_\alpha(1)x_{-\alpha}(-1)\\&=\omega_\alpha x_\alpha(1)\omega_\alpha^{-1}\cdot\omega_\alpha x_{-\alpha}(-1)\omega_\alpha^{-1}\cdot\omega_\alpha x_\alpha(1)\omega_\alpha^{-1}\\&=\omega_\alpha;\end{aligned}$$

d'où $\Phi(\tau(w))=\tau(w)$. On désigne aussi par X_α l'élément $X_\alpha\otimes 1$ de $\mathfrak{g}_K$. Nous posons

$$g_0X_\alpha=\eta_\alpha X_{w_0(\alpha)} \text{ pour } \alpha\in\Delta \text{ où } \eta_\alpha\in K\ .$$

Alors, d'après le choix de g_0, $\eta_\alpha=\pm1$ et, pour $\alpha\in(-\Pi)$ $\eta_\alpha=1$.

LEMME 3.2. *Soit ω un élément de $\mathfrak{W}$. Si l'on pose $\omega X_\alpha=c_\alpha X_{w(\alpha)}$ où $w=\zeta(\omega)$ et $\alpha\in\Delta$,*

(1) $c_\alpha c_{-\alpha}=1$;

(2) *si $\beta,\gamma\in\Delta$ et $\alpha=\beta+\gamma$,* $c_\alpha=\dfrac{N(w(\beta),w(\gamma))}{N(\beta,\gamma)}c_\beta c_\gamma$;

(3) *si $w^2=1$ et $c_\alpha=c_{w(\alpha)}$ pour toute $\alpha\in\Pi$, alors $c_\alpha=c_{w(\alpha)}$ pour toute $\alpha\in\Delta$.*

DÉMONSTRATION. (1) Si $H_\alpha=[X_\alpha,X_{-\alpha}](\alpha\in\Delta)$, $\omega(H_\alpha)=H_{w(\alpha)}$ ([1] p. 37); d'où on a (1).

(2) Faisons opérer ω sur l'identité

$$[X_\beta,X_\gamma]=N(\beta,\gamma)X_\alpha\ .$$

$$\begin{aligned}c_\alpha N(\beta,\gamma)X_{w(\alpha)}&=[c_\beta X_{w(\beta)},c_\gamma X_{w(\gamma)}]\\&=c_\beta c_\gamma N(w(\beta),w(\gamma))X_{w(\beta+\gamma)}\ .\end{aligned}$$

Il en résulte (2).

(3) On peut supposer que α soit positive; et on raisonnera par récurrence sur la hauteur de α. Si $\alpha=\beta+\gamma$, où β est une racine positive et $\gamma\in\Pi$,

$$c_\alpha=\frac{N(w(\beta),w(\gamma))}{N(\beta,\gamma)}c_\beta c_\gamma \text{ et } c_{w(\alpha)}=\frac{N(\beta,\gamma)}{N(w(\beta),w(\gamma))}c_{w(\beta)}c_{w(\gamma)}\,;$$

on sait que $\dfrac{N(w(\beta),w(\gamma))}{N(\beta,\gamma)}=\pm1$ et, par l'hypothèse, $c_\beta=c_{w(\beta)}$, $c_\gamma=c_{w(\gamma)}$; il en résulte que $c_\alpha=c_{w(\alpha)}$.

§4. Démonstration du théorème.

Nous allons démontrer le théorème mentionné dans l'introduction. Il suffit de le faire dans le cas où $\mathfrak{g}$ est simple et χ est de la forme suivante; $\chi(u)=\chi_0(t_1+\cdots+t_l)$ où $u=x_{\alpha_1}(t_1)\cdots x_{\alpha_l}(t_l)u'\in\mathfrak{U}$, $u'\in\mathfrak{U}_2$, $\alpha_i\in\Pi(i=1,\cdots,l)$ et χ_0 est un caractère non-trivial de K dans k. En effet, si χ_1 est un caractère non-trivial de K, il existe un élément $c \in K^*$ tel que $\chi_1(t)=\chi_0(ct)$ pour tout $t \in K$; d'où, si χ' est un caractère ≪en position générale≫, il existe un élément $h \in \mathfrak{H}$ tel que $\chi'(u)=\chi(h^{-1}uh)$ pour tout $u \in \mathfrak{U}$, donc les commutants $C(\chi)$ et $C(\chi')$ sont isomorphes d'après la proposition 1.2. Dans ce cas, d'après le théorème de Clifford, la représentation $\chi'^{\mathfrak{U}\mathfrak{H}}$ de $\mathfrak{U}\mathfrak{H}$ induite par χ' est équivalente à la représentation $\chi^{\mathfrak{U}\mathfrak{H}}$ induite par χ, donc la représentation χ'^G est équivalente à χ^G.

Dans la suite nous supposons ces conditions réalisées. Désignons par Δ^+(resp. Δ^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives).

LEMME 4.1. *Soit* σ *un élément de* W. *Si* $\sigma\Pi \subset (-\Pi) \cup \Delta^+$, *alors* $\sigma=w_J$, *où* $J=\{\alpha \in \Pi;\ \sigma(\alpha) \in (-\Pi)\}$. *Inversement, si* $\sigma=w_J, \sigma\Pi \subset (-J) \cup \Delta^+$.

La démonstration est, en grande partie, due à N. Iwahori.

DÉMONSTRATION. Soient $J_1=\{\alpha \in \Pi;\ \sigma(\alpha) \in (-\Pi)\}$ et $J=-\sigma J_1$. On va montrer que $w_J\sigma(\Pi) \in \Delta^+$. Si $\alpha \in J_1, w_J\sigma(\alpha) \in w_J(-J) \subset \Delta^+$. Si $\alpha \in \Pi-J_1, w_J\sigma(\alpha) \in \Delta^+$; si $w_J\sigma(\alpha) \in \Delta^-$, puisque $\sigma(\alpha) \in \Delta^+$, $\sigma(\alpha)$ serait une combinaison linéaire des éléments de $J=-\sigma J_1$; d'où α serait une combinaison linéaire des éléments de $-J_1$; c'est une contradiction.

Soit $\mathfrak{W}(\chi)$ l'ensemble des éléments $\omega \in \mathfrak{W}$ qui satisfont à la condition suivante; si $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$ tels que $\omega u_1=u_2\omega$, alors $\chi(u_1)=\chi(u_2)$.

PROPOSITION 4.2. *Soit* ω *un élément de* $\mathfrak{W}$ *de la forme* $h_1\omega_1$ *où* $h_1=h(\chi_1) \in \mathfrak{H}$, $\omega_1=\tau(w)$ *et* $w \in W$. *On pose* $\omega_1 X_\alpha=\varepsilon_\alpha X_{w(\alpha)}$ *où* $\varepsilon_\alpha \in K^*$. *Alors, pour que* ω *soit dans* $\mathfrak{W}(\chi)$, *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées:*

(1) $w=w_0w_J$ *où* $J=\{\alpha \in \Pi;\ w(\alpha) \in \Pi\}$;

(2) *si* $\alpha \in J$, $\chi_1(w(\alpha))\varepsilon_\alpha=1$.

DÉMONSTRATION. D'après l'égalité $\omega\mathfrak{X}_\alpha\omega^{-1}=\mathfrak{X}_{w(\alpha)}$, pour que ω soit dans $\mathfrak{W}(\chi)$, il faut et il suffit que

(i) $w(\Pi) \subset \Delta^- \cup \Pi$ et $w(\Delta^+-\Pi) \subset \Delta^- \cup (\Delta^+-\Pi)$;

(ii) si $\alpha \in J, \omega x_\alpha(t)\omega^{-1}=x_{w(\alpha)}(t)$ pour $t \in K$.

Si l'on pose $\sigma=w_0w$, on a $\sigma=w_J$, d'après la première condition de (i) et le lemme 4.1; d'où résulte que la condition (i) est équivalente à la condition (1).

$$\omega x_\alpha(t)\omega^{-1}=h_1\omega_1 x_\alpha(t)\omega_1^{-1}h_1^{-1}=x_{w(\alpha)}(\chi_1(w(\alpha))\varepsilon_\alpha t);$$

donc (ii) est équivalente à (2).

COROLLAIRE. *Le commutant* $C(\chi)$ *est de dimension* q^l.

DÉMONSTRATION. Pour chaque J fixé, le nombre d'éléments h vérifiant la condition (2) est $(q-1)^{l-|J|}$. Donc

$$\dim C(\chi)=|\mathfrak{W}(\chi)|=\sum_J (q-1)^{l-|J|}=\sum_i \binom{l}{i}(q-1)^{l-i}=q^l \,.$$

Pour la démonstration du théorème, d'après §1, il suffit de montrer que $\theta(\omega)=\omega$ pour $\omega\in\mathfrak{W}(\chi)$, où θ est l'anti-automorphisme de G construit dans la proposition 3.1. Si $\omega=h_1\omega_1\in\mathfrak{W}(\chi)$ où $h_1\in\mathfrak{H}, \zeta(\omega)=w$ et $\tau(w)=\omega_1$, d'après la proposition 4.2 w étant de la forme w_0w_J, on a,

$$\theta(\omega)=g_0\omega_1^{-1}h_1g_0^{-1}=h'\omega_1,\ \text{où}\ h'=g_0\omega_1^{-1}g_0^{-1}\omega_1^{-1}\in\mathfrak{H}\,.$$

Soient $h_1=h(\chi_1), h'=h(\chi')$ où $\chi_1,\chi'\in\operatorname{Hom}(P_r,K^*)$. Nous allons montrer que $\chi'(\alpha)=\chi_1(\alpha)$ pour $\alpha\in\Pi$. Posons

$$\omega_1X_\alpha=\varepsilon_\alpha X_{w(\alpha)}\,,\qquad g_0X_\alpha=\eta_\alpha X_{w_0(\alpha)}\ ,$$

où $\varepsilon_\alpha,\eta_\alpha\in K^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
&g_0\omega_1^{-1}h_1g_0^{-1}\omega_1^{-1}(X_\alpha)\\
&\quad=g_0\omega_1^{-1}h_1g_0^{-1}(\varepsilon_{w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}X_{w^{-1}(\alpha)})\\
&\quad=g_0\omega_1^{-1}h_1(\varepsilon_{w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}\eta_{w_0w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}X_{w_0w^{-1}(\alpha)})\\
&\quad=g_0\omega_1^{-1}\{\varepsilon_{w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}\eta_{w_0w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}\chi_1(w_0w^{-1}(\alpha))X_{w_0w^{-1}(\alpha)}\}\\
&\quad=g_0\{\varepsilon_{w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}\eta_{w_0w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}\chi_1(w_0w^{-1}(\alpha))\varepsilon_{w_0(\alpha)}{}^{-1}X_{w_0(\alpha)}\}\\
&\quad=\varepsilon_{w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}\eta_{w_0w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}\chi_1(w_0w^{-1}(\alpha))\varepsilon_{w_0(\alpha)}{}^{-1}\eta_{w_0(\alpha)}X_\alpha\,.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\chi'(\alpha)=\varepsilon_{w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}\eta_{w_0w^{-1}(\alpha)}{}^{-1}\chi_1(w_0w^{-1}(\alpha))\varepsilon_{w_0(\alpha)}{}^{-1}\eta_{w_0(\alpha)}\ .$$

Or, on a $\varepsilon_\alpha=\pm1$, $\eta_\alpha=\pm1$ et $\eta_\alpha=1$ pour $\alpha\in(-\Pi)$; d'après le lemme 3.2, $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_{-\alpha}$, $\eta_\alpha=\eta_{-\alpha}$ pour toute $\alpha\in\Delta$. Pour $\alpha\in\Pi$, puisque $w_0(\alpha)\in(-\Pi), \eta_{w_0(\alpha)}=1$ et on pose $\beta=-w_0(\alpha)(\in\Pi)$, alors $w_0w^{-1}(\alpha)=-w(\beta)$.

Donc il suffit de montrer, pour $\alpha\in\Pi$,

$$\varepsilon_{w^{-1}(\alpha)}\eta_{w(\beta)}\chi_1(-w(\beta))\varepsilon_\beta=\chi_1(\alpha)\ .$$

Remarquons que $w(J)(=w_0w_J(J))=-w_0(J)$ et, donc, $w(J)\subset\Pi$. Si $\beta\in J$ i.e. $\alpha=-w_0(\beta)\in w(J)$, alors $w(\beta)\in\Pi$, donc $\eta_{w(\beta)}=1$ et $\chi_1(\alpha)=\varepsilon_{w^{-1}(\alpha)}, \chi_1(-w(\beta))=\varepsilon_\beta$ grâce à la proposition 4.2; d'où on a l'égalité précédente dans ce cas.

Supposons que $\beta\notin J$ i.e. $\alpha\notin w(J)$. On doit démontrer

$$(☆)\qquad \varepsilon_{w_J(\beta)}\eta_{w_0w_J(\beta)}\chi_1(w_0(\beta-w_J(\beta)))\varepsilon_\beta=1\,.$$

LEMME. *Soit* $w_J(\beta)=\beta+\sum_{\gamma\in J}n(\gamma)\gamma,\ n(\gamma)\in\mathbf{Z}$. *Alors*

(1) $n(\gamma)=n(-w_J(\gamma))$ *pour* $\gamma\in J$;

(2) $\chi_1(w_0(\beta-w_J(\beta)))=\prod_{\gamma\in J}\varepsilon_\gamma{}^{n(\gamma)}$.

DÉMONSTRATION. (1) $w_J{}^2(\beta)=w_J(\beta)+\sum_{\gamma\in J} n(\gamma)w_J(\gamma)$ i.e. $\beta=\beta+\sum n(\gamma)\gamma - \sum n(-w_J(\gamma))\gamma$; d'où on a $n(\gamma)=n(-w_J(\gamma))$.

(2) Comme $w_0(J)=-w(J)$, on pose $w_0(\gamma)=-w(\gamma'), \gamma'\in J$ i.e. $\gamma=-w_J(\gamma')$.

$$w_0(\beta-w_J(\beta))=w_0(-\sum_{\gamma\in J} n(\gamma)\gamma)=\sum_{\gamma} n(\gamma)(-w_0(\gamma))=\sum_{\gamma} n(\gamma)(w(\gamma'))$$

$$\chi_1(w_0(\beta-w_J(\beta)))=\prod_{\gamma'\in J}\varepsilon_{\gamma'}{}^{n(\gamma)}=\prod_{\gamma\in J}\varepsilon_{\gamma}{}^{n(\gamma)}\ .$$

En vertu du lemme 3.2, $\eta_{w_0(\rho)}=\eta_{(\rho)}$ pour toute $\rho\in\Delta$. Nous allons calculer $\varepsilon_{w_J(\beta)}$ et $\eta_{w_J(\beta)}$. Soit $(\beta_i)_{i=1}^{r}$ une suite qui satisfait à la condition de la proposition 2.3 1).

a) *Le cas où* $\mathfrak{g}$ *n'est pas de type* (A_l).

$$\varepsilon_{\beta_i+\gamma_i}=\frac{N(w_0w_J(\beta_i),\, w_0w_J(\gamma_i))}{N(\beta_i,\gamma_i)}\varepsilon_{\beta_i}\varepsilon_{\gamma_i}$$

$$=(-1)\frac{N(w_J(\beta_i),\, w_J(\gamma_i))}{N(\beta_i,\gamma_i)}\varepsilon_{\beta_i}\varepsilon_{\gamma_i}$$

Donc,

$$\varepsilon_{w_J(\beta)}=(-1)^{r-1}N\cdot\varepsilon_\beta\prod_{\gamma\in J}\varepsilon_\gamma{}^{n(\gamma)}$$

où

$$N=\frac{N(w_J(\beta_1),w_J(\gamma_1))\cdots N(w_J(\beta_{r-1}),w_J(\gamma_{r-1}))}{N(\beta_1,\gamma_1)\cdots N(\beta_{r-1},\gamma_{r-1})}$$

D'ailleurs

$$\eta_{w_J(\beta)}=\frac{N(w_0(\beta_1),w_0(\gamma_1))\cdots N(w_0(\beta_{r-1}),w_0(\gamma_{r-1}))}{N(\beta_1,\gamma_1)\cdots N(\beta_{r-1},\gamma_{r-1})}$$

$$=(-1)^{r-1}\ .$$

b) *Le cas où* $\mathfrak{g}$ *est de type* (A_l).

Par le même raisonnement, on a $\varepsilon_{w_J(\beta)}=N\cdot\varepsilon_\beta\prod_{\gamma\in J}\varepsilon_\gamma{}^{n(\gamma)}$ et $\eta_{w_J(\beta)}=1$.

D'après la proposition 2.3, il existe une suite pour laquelle $N=1$; il en résulte l'égalité (☆).

Université de Tokyo

Bibliographie

[1] C. Chevalley, Sur certains groupes simples, Tohoku Math. J., **7** (1955), 14-66.

[2] I. M. Gelfand et M. I. Graev, Construction of irreducible representations of simple algebraic groups over a finite field, Soviet Math. Dokl. **3** (1962), 1646-1649. (Doklady, **147** (1962), 529-532).

[3] R. Ree, On some simple groups defined by C. Chevalley, Trans. Amer. Math. Soc., **84** (1957), 392-400.

[4] R. Steinberg, Variations on a Theme of Chevalley, Pacific J. Math., **9** (1959), 875-891.

[5] J. Tits, Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples, Pub. Math. I. H. E. S., N°**31** (1966), 21-58,

[6] T. Yokonuma, Sur le commutant d'une représentation d'un groupe de Chevalley fini, C. R. Acad. Sci. Paris, **264** (1967), 433-436.

(Reçu le 7 mars 1968)