L'analyse harmonique sur les espaces riemanniens, à courbure riemannienne négative I

Par Kazuhiko AOMOTO

Introduction

Comme bien connu, il y a trois classes de variétés analytiques complexes à une dimension qui sont simplement connexes: la sphère de Riemann S^2, le plan complexe C et l'intérieur d'un cercle unité D. Ils sont tous des variétés Kähleriennes munies de métriques canoniques. Ses courbures riemanniennes sont respectivement positive, nulle et négative. D'autre coté les équations de structure de E. Cartan (voir (1.14)) montre que un espace de Riemann M simplement connexe est complètement déterminé par sa courbure riemannienne. Donc il me semble naturel que beaucoup de propriétés analytiques qui appartiennent à cet espace peuvent être exprimées de sa courbure riemannienne.

Dans cet article on supposera presque toujours que l'éspace soit à courbure négative. D'abord au § 2 on donnera un théorème (Théorème A) qui se rapporte à l'ordre d'acroissement du volume de M à l'infini. On le déduit facilement du théorème classique de E. Cartan au sujet d'un espace riemannien à courbure négative. Dans § 3 on démontrera le théorème d'existence de la fonction de Green sur un espace à courbure négative et simplement connexe (Théorème C), en se servant de la méthode alternative de C. Schwartz. Voici le fait que l'on ne trouve jamais dans le cas où l'espace M est compact. Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de fonctions harmoniques et pour compactifier cet espace comme plusieurs personnes l'ont montré (voir R. S. Martin [11], S. Itô [8b], H. Furstenberg [5], et F. I. Karpelevič [10], M. G. Šur [14], E. B. Dynkin [4]). De plus si M est une variété Kählerienne à courbure négative et simplement connexe, il semble probable que M est une variété de Stein, ce qui donnerait une condition suffisante pour résoudre le problème de H. Grauert au sujet de " convexité d'holomorphie" (voir H. Grauert [6]), me semble emporter au premier étage pour démontrer la conjecture que: une variété Kählerienne à courbure strictement négative et simplement connexe est biholomorphe à un domainé borné sans critiques intérieures dans un espace vectoriel complexe. Alors on pourra peut-être trouver la relation de la fonction de Green et de la fonction noyau de Bergmann à l'infini comme Bergmann a démontré à une dimension. Mais maintenant ces sujets sont très loin de nous et donc on ne s'y enfoncera pas dans cet article.

Je dois remercier à Monsieur D. Fujiwara qui a eu la bonté de voir cet article et me donner quelques suggestions valuables, et aussi à mon Professeur S. Itô.

1. Préliminaires.

Soit M une variété différentiable connexe. $C^\infty(M)$ et $\mathfrak{D}^1(M)$ désignent les espaces vectoriels de fonctions infiniment différentiables (de classe C^∞) sur M et celui de champs de vecteurs infiniment différentiables (de classe C^∞) sur M. Supposons qu'il existe sur M une métrique riemannienne $\mathfrak{g}$ ayant les deux propriétés suivantes:

(i) $\mathfrak{g}$ est une application du produit direct de $\mathfrak{D}^1(M)$ à $C^\infty(M)$; $\mathfrak{g}:\mathfrak{D}^1(M)\times\mathfrak{D}^1(M)\to C^\infty(M)$, $(X, Y)\to\mathfrak{g}(X, Y)$ $(X, Y\in\mathfrak{D}^1(M))$

(ii) La restriction $\mathfrak{g}_p$ à l'espace tangent M_p en un point p de M est une forme bilinéaire positive (de valeur réelle) sur $M_p\times M_p$.

Il est bien connu qu'il existe une seule connexion riemannienne satisfaisant les conditions suivantes:

$$(1.1)\quad \begin{cases} \text{(i)}\ \ \nabla_X Y-\nabla_Y X=[X, Y] \text{ où } X, Y \text{ est le crochet de deux champs de vecteurs} \\ \qquad \text{pour } X, Y\in\mathfrak{D}^1(M) \\ \text{(ii)}\ \ \nabla_Z\mathfrak{g}=0 \text{ pour } Z \text{ arbitraire de } \mathfrak{D}^1(M) \end{cases}$$

Soit $\gamma(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ une courbe, on définit sa longueur $L(\gamma)$:

$$L(\gamma)=\int_0^1\sqrt{\mathfrak{g}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\,dt \quad \text{où } \dot{\gamma}(t)=\frac{d\gamma(t)}{dt}$$

est le vecteur tangent en chaque $\gamma(t)\in M$.

Soit p, q deux points arbitraires de M. On définit la distance entre p et q par l'infinimum des longueurs de toutes les courbes qui relient p à q, qui sera désignée par $\mathrm{dis}(p, q)$. On pose pour $0<t<\infty$, $p\in M$

$$(1.2)\qquad B_t(p)=\{q\in M;\ \mathrm{dis}(p, q)<t\},\quad S_t(p)=\{q\in M;\ \mathrm{dis}(p, p)=t\}$$

On appelle $B_t(p)$ de $S_t(p)$ une boule de centre p ou une sphère de centre p respectivement. Fixons un point p de M, et considérons une courbe géodésique $\gamma_X(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ ayant une direction tangente X en p $(X\in M_p)$, t étant une paramètre proportionnelle à la distance géodésique. On obtient une application Exp_p:

$$(1.3)\qquad \mathrm{Exp}_p: X\in M_p\to\gamma_X(1)\in M$$

On peut définir Exp_p dans un voisinage assez petit de 0 dans M_p munie de la métrique $\mathfrak{g}_p$. On pose

$$(1.4)\qquad V_r(0)=\{X\in M_p;\ \|X\|<r\} \text{ où } \|X\|=\sqrt{\mathfrak{g}_p(X, X)},\ B_r(p)=\mathrm{Exp}_p(V_r(0)),$$

qui est un voisinage de p dans M.

Il est bien connu qu'il existe un nombre positif tel que l'application de $V_r(0)$ à $B_r(p)$ est un difféomorphisme

$$\mathrm{Exp}_p : V_r(0) \to B_r(p) . \tag{1.5}$$

Donc on peut représenter les points de $B_r(p)$ par les points correspondant dans $V_r(0)$ ce qu'on appelle *système de coordonnées locales normales.* Un tel voisinage $V_r(0)$ ou $B_r(p)$ est dit *voisinage normal.* (voir Helgason [7a] p. 52)

Soit N_0 un voisinage normal et $N_p = \mathrm{Exp}_p N_0 \subset M$. Soit $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$ une base orthonormale de M_p:

$$\mathfrak{g}_p(Y_i, Y_j) = \delta_{ij} \tag{1.6}$$

$\gamma(t) = \mathrm{Exp}_p(tX)$ $X \in N_0$, $0 \leqq t \leqq 1$ désigne la courbe à la direction tangente X en p. En transportant Y_i le long de ce chemin jusqu'au point $q = \gamma(1) = \mathrm{Exp}_p(X)$, par deplacement parallèle relatif à la connexion précédente (1.1), on obtient un vecteur tangent en chaque $q \in N_p$. L'ensemble de ces vecteurs tangents définit un champs de vecteur Y_i^* dans le voisinage N_p de p.

$$\mathfrak{g}(Y_i^*, Y_j^*) = \mathfrak{g}_p(Y_i, Y_j) \ (1 \leqq i, j \leqq n) . \tag{1.7}$$

Nous définissons un système des formes différentielles sur N_p:

$$\omega^i(Y_j^*) = \delta_j^i \qquad (1 \leqq i, j \leqq n) , \qquad \text{evidemment on a} \tag{1.8}$$

$$\mathfrak{g} = \sum_i (\omega^i)^2 \qquad \text{(produit symétrique) sur } N_p . \tag{1.9}$$

Les tenseurs de torsion et de courbure sont définis par:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \ R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \tag{1.10}$$

où $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$.

D'après (1.1), on voit que T est identiquement nul. On peut écrire explicitement la connexion riemannienne et le tenseur de courbure au moyen de la base $\{Y_1^*, \cdots, Y_n^*\}$:

$$\nabla_{Y_i^*} Y_j^* = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k Y_k^* , \quad R(Y_i^*, Y_j^*) Y_l^* = \sum_{k=1}^n R_{lij}^k Y_k^* \tag{1.11}$$

où $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ijk}$, $R_{lij}^k = R_{klij}$ sont des fonctions infiniment différentiables dans N_p. L'équations fondamentales de Cartan s'écrivent:

$$\left\{ \begin{aligned} d\omega^i &= -\sum_{n=1}^n \omega_j^i \wedge \omega^j \\ d\omega_l^i &= -\sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge \omega_l^j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n R_{ljk}^i \omega^j \wedge \omega^k \end{aligned} \right. \tag{1.12}$$

où ω^i_j est une forme différentielle définie par:

$$\omega^i_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{kj} \omega^k \tag{1.13}$$

Si tous $R^i_{ljk} = R_{iljk}$ sont des fonctions partout constantes dans N_p pour chaque point p de M, M est un espace riemanien symétrique, le fait que l'on connait bien (voir Cartan [1]).

U désignera un sous-ensemble de $\boldsymbol{R}$ (corps de nombres réels)$\times M_p$ de (t, X) $t \in R$, $X \in M_p$ de sorte que $tX \in N_0$. On définit une applicantion Ψ de U à N_p: $\Psi(t, X) = \mathrm{Exp}_p(tX)$; $X \in M_p$ s'écrit par $X = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$, et un point de U est représenté par $(t, a_1, \cdots, a_n) \in R^{n+1}$. $\Psi^*\omega^i$ et $\Psi^*\omega^i_j$, étant, des formes sur U, sont aussi représentées par:

$$\Psi^*\omega^i = a_i dt + \bar{\omega}^i, \quad \Psi^*\omega^i_j = \bar{\omega}^i_j \tag{1.14}$$

où $\bar{\omega}^i$ et $\bar{\omega}^i_j$ des formes des combinaisons linéaires seulement de da_1, da_2, $\cdots$, da_n. Et l'équations fondamentales de Cartan ont les formes suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} &= da_i + \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{\omega}^i_k \\ \frac{\partial \bar{\omega}^i_l}{\partial t} &= \sum_{j,k=1}^{n} R^i_{ljk} a_j \bar{\omega}^k \end{aligned}\right. \tag{1.15}$$

à la condition initiale

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{\omega}^i(t, a_j;\, da_k)|_{t=0} = 0 \\ &\bar{\omega}^i_l(t, a_j;\, da_k)|_{t=0} = 0 \end{aligned}\right. \tag{1.16}$$

Il existe une et une seule solution $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}^i_j$ satisfaisant le système des équations différentielles à la condition initiale (1.16). On connait bien le théorème suivant (voir Helgason [7a]).

THÉORÈME (1.1) *Les trois conditions suivantes sont équivalentes entre eux.*

(1) *M est complet comme un espace métrique.*

(2) *Toute partie bornée et fermée de M est compacte.*

(3) *Toute courbe géodésique maximale dans M a la forme $\gamma_X(t) = \mathrm{Exp}_p(tX)$, $-\infty < t < \infty$, X étant une direction tangente en quelque point p de M.*

Dans un espace riemannien complet, deux points quelconques p, q peut être reliés par un segment géodésique de la longueur dis(p, q) *distance entre les deux points p et q.*

Dorénavant nous supposerons M soit complet, sauf le faire mention. D'après la troisième condition du théorème précédent, l'application $\mathrm{Exp}_p (p \in M)$ est définie sur l'espace tangent M_p tout entier, et donc Exp_p est une application différentiable de M_p dans M. Remarquons cette application est surjective. Sa dérivée $d\,\mathrm{Exp}_p$

n'est pas partout régulière. On appelle point *conjugé à* p un point $q=\mathrm{Exp}_p X$ tel que $d\,\mathrm{Exp}_p$ est singulier en X pour quelque vecteur tangent $X\in M_p$.

2. Quelques propriétés d'un espace de Riemann à courbure négative.

Soit p quelque point de M, et Y, Z deux vecteurs tangents en p. Y, Z s'écrivent en forme suivante: $Y=\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$, $Z=\sum_{i=1}^{n} b_i Y_i$, où Y_i est la base orthonormale de (1.6). Alors

$$g_p(R_p(Y,Z)Y,Z)=\sum_{l,k,i,j} R^k_{lij} a_i b_j a_l b_k \tag{2.1}$$

où le tenseur de courbure $R^k_{lij}=R_{klij}$ est symétrique relatif à l'indice (k, l) et anti-symétrique relatif à (i, j).

On appelle courbure dans les directions de Y et Z la grandeur suivante:

$$K(Y,\ Z)=\frac{-\sum_{klij} R_{klij} a_i a_l b_j b_k}{\sum_{ij}(a_i b_j - a_j b_i)^2} \tag{2.2}$$

indépendent du choix de coordonnées.

L'espace M est dit *espace riemannien à courbure négative* (ou *espace riemannien à courbure strictement négative*) si

$$K(Y,Z)\leqq 0 \quad \text{ou} \tag{2.3}$$

$$K(Y,Z)\leqq -\lambda \quad (\lambda \text{ quelque nombre positif}) \tag{2.4}$$

est vérifié pour tous les vecteurs tangents Y, Z de M_p en chaque point p de M. On peut aussi définir un espace riemannien à courbure positive (ou à courbure strictement positive). Si K est identiquement nulle, M est dit *espace localement euclidéan*. Le théorème suivant de E. Cartan est très important pour notre discussion.

THÉORÈME (2.1) (i) *Soit M un espace riemannien complet* à *courbure négative et soit p un point quelconque de M. Alors M ne contient nul point conjugé* à p.

(ii) *Soit M un espace riemannien complet. Supposons qu'il exist un point p de M tel que M ne contient nul point conjugé* à p. *Alors la paire* (M_p, Exp_p) *est une variété de recouvrement universelle de M. En particulier si M est simplement connexe,* Exp_p *est un difféomophisme de M_p sur M. M est isomorphe à $\boldsymbol{R}^n$.*

Nous généralisons un peu ce théorème. Soit N_0 un voisinage ouvert dans M_p, formé d'étoile à centre p tel que Exp_p est une application régulière de N_0 dans M. Soit $N_p=\mathrm{Exp}_p N_0$, et soit $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ une base orthonormale de M_p. Pour chaque $X\in N_0$ il existe un voisinage ouvert N_X de X dans M_p tel que

$$\mathrm{Exp}_p : N_X \to B \qquad B = \mathrm{Exp}_p N_X - N_p \tag{2.5}$$

est un difféomorphisme. $\{Y_i^*,\ 1 \leqq i \leqq n\}$ soit le système des champs de vecteurs définis auparavant. Nous posons: $U = \{(t, X) \in \boldsymbol{R} \times M_p\,;\ tX \in \tilde{N}_0\} = (t, a_1, a_2, \cdots, a_n)\,;\ t \sum\limits^{n} a_i Y_i \in \tilde{N}_0\}$

$$\Psi : V \to N_p\,, \quad (t, X) \to \mathrm{Exp}_p(tX) \tag{2.6}$$

Le tenseur métrique $\Psi^*\mathfrak{g}$ s'écrit par

$$\Psi^*\mathfrak{g} = (dt)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\bar{\omega}^i)^2 \text{ sur } V\,. \tag{2.7}$$

D'autre coté, $\tilde{N}_0$ peut être regardé comme un espace riemannien muni de la métrique $\mathfrak{g}_p$.

$$\Psi^*\mathfrak{g}_p = (dt)^2 + t^2 \sum_{i=1}^{n} (da_i)^2 \tag{2.8}$$

où $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$. Considérons un champs de vecteur A sur la sphère unité Σ et posons $\alpha_i = \bar{\omega}^i(A)$, $\beta_l^i = \bar{\omega}_l^i = \bar{\omega}_l^i(A)$, $\gamma_i = da_i(A)$ $1 \leqq i \leqq n$. α_i, β_l^i, γ_i sont des fonctions différentiables sur V qui satisfont le système des équations suivantes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial t} = \gamma_i + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \beta_k^i \\ \dfrac{\partial \beta_l^i}{\partial t} = \sum\limits_{j,k=1}^{n} R_{iljk} a_j \alpha_k \end{cases} \tag{2.9}$$

avec la condition initiale

$$\begin{cases} \alpha_i(t, a_j)_{t=0} = 0 \\ \beta_l^i(t, a_j)_{t=0} = 0\,. \end{cases} \tag{2.10}$$

On déduit facilement de (2.9) et (2.10).

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l} R_{iljk} a_l \alpha_j \alpha_k \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} \alpha_i(t, a_j)_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial t}(t, a_j)_{t=0} = \gamma_i(a_j) \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t^2} = \sum_{i,j,k,l} R_{iljk} a_l a_j \alpha_i \alpha_k \geqq \lambda \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (a_i \alpha_j - a_j \alpha_i)^2 \tag{2.13}$$

tenant compte de (2.3) ou (2.4), si M est à courbure négative. On pose

$$\begin{cases} h(t) = (\sum \alpha_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad t \geqq 0, \text{ on voit } h(0) = 0 \text{ et} \\ h(t) > 0 \ (t > 0), \ h'(0) = \dfrac{dh(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{2.14}$$

$$h(t)h'(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial\alpha_i}{\partial t},\quad h(t)h''(t)+h'(t)^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}\right)^2,$$

$$h(t)^3h''(t)+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}\right)^2\right),\ \text{donc}$$

$$h(t)^3h''(t)\geqq\lambda h(t)^2\sum_{i<j}(a_i\alpha_j-a_j\alpha_i)^2+\sum_{i<j}\left(\alpha_i\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}-\alpha_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}\right)^2.\ \text{Mais on a}$$

$$\sum_{i<j}(a_i\alpha_j-a_j\alpha_i)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\right)^2.$$

En tenant compte de (2.9) et que $\sum a_i\gamma_i=0$, on voit facilement $\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i=0$, $\sum_{i,l=1}^{n}\beta_l^i a_i a_l=0$. Donc $\sum_{i<j}(a_i\alpha_j-a_j\alpha_i)^2=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2=h(t)^2$. Enfin on a obtenu l'inégalité suivante:

$$h''(t)\geqq\lambda h(t) \tag{2.15}$$

Lemme (2.1) *$f(x)$ soit une fonction différentiable qui satisfaite l'inégalité $f''(x)\geqq\lambda f(x)$ ($\lambda\geqq0$ constant) $f(0)=0$, $f'(0)=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0}=A>0$. Alors $f(x)$ est au moins égale à $\frac{A\sinh\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ pour $x\geqq0$ (dans le cas $\lambda=0$, $\frac{A\sinh\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ est égale à Ax).*

Démonstration. Posons $\varphi(x)=f'(x)\sinh\sqrt{\lambda}x-f(x)\cosh\sqrt{\lambda}x$. $\varphi'(x)=\sinh\sqrt{\lambda}x$ $(f''(x)-\lambda f(x))\geqq0$ pour $x\geqq0$. $\varphi(0)=0$. Donc $\varphi(x)\geqq0$ pour $x\geqq0$. $f'(x)\sinh\sqrt{\lambda}x$ $-f(x)\cosh\sqrt{\lambda}x\geqq0$. Posons $\psi(x)=\frac{f(x)}{\sinh\sqrt{\lambda}x}$. Vu $f(0)=0$, $\psi(x)$ est une fonction différentiable. $\psi'(x)=\frac{\sqrt{\lambda}\varphi(x)}{(\sinh\sqrt{\lambda}x)^2}\geqq0$ et $\psi(0)=A$. Donc $\psi(x)\geqq A$ pour tout $x\geqq0$. On obtient ainsi $f(x)\geqq\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\sinh\sqrt{\lambda}x$.

Il résulte de ce lemme:

$$h(t)\geqq\frac{\sinh\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2(a_1,\cdots,a_n)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.16}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{\omega}^i(A))^2\geqq\left(\frac{\sinh\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\{da_i(A)\}^2 \tag{2.17}$$

$$\Psi^*\eta\geqq(dt)^2+\left(\frac{\sinh\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\{da_i(A)\}^2\qquad\lambda\geqq0 \tag{2.18}$$

pour $X=\sum_{i=1}^{n}a_iY_i$. Par conséquent,

$$\|d\,\mathrm{Exp}_{p,X}(Y)\|\geqq\|Y\| \tag{2.19}$$

pour $X\in\tilde{N}_0$ et un vecteur tangent de $\tilde{N}_0$ en X, $\|\ \|$ désignent la restriction de la métrique sur un espace tangent en chaque point de M.

On remarque l'égalité se vérifie si et seulement si M est à courbure riemannienne constante (espace de Lorentz généralisé).

Dès maintenant nous assumerons que M soit simplement connexe et à courbure riemannienne négative. Du théorème (2.1) M est isomorphe à M_p et donc à R^n. La métrique $\mathfrak{g}$ de M s'exprime en coordonnées globales de la manière suivante:

$$\mathfrak{g}^*(X, X)=\sum_{i=1}^{n}(\omega^i(X))^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}dx^idx^j\geq\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 \tag{2.20}$$

où $X=\sum_{i=1}^{n}x_iY_i\in M_p$ et g_{ij} sont les fonctions différentiables des variables $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$. L'élément de volume dV est $\sqrt{g}\ dx^1dx^2\cdots dx^n$, où g est le déterminant de la matrice (g_{ij}). On a:

$$\sqrt{g}\,dx^1dx^2\cdots dx^n=\sqrt{g}\,dtd\Omega\geq\left(\frac{\sinh\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n-1}dtd\sigma \tag{2.11}$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface d'une sphère unité, et $x^i=ta_i$, $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$.

THÉORÈME A. *Soit M un espace riemannien à courbure riemannienne négative et simplement connexe. Alors la métrique déterminée par* (2.2) *satisfait les inégalités* (2.18) *et* (2.21).

Ce criterium joue un rôle central pour résoudre le problème de l'existence de fonctions de Green et de fonctions harmoniques bornées.

3. L'opérateur de Laplace-Beltrami, fonctions harmoniques et fonctions de Green

Soit M un espace riemannien quelconque. Considérons un recouvrement de M des voisinages $\{U_\alpha;\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A}$ étant l'ensemble d'indices. Chaque voisinage U_α est isomorphe à une ouverte de R^n dont chaque point est représenté par coordonées locales $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$. Les produits scalaires de vecteurs tangents $e_i=\frac{\partial}{\partial x^1}\cdots e_n=\frac{\partial}{\partial x^n}$ s'expriment

$$\mathfrak{g}_x(e_i, e_j)=g_{ij}\quad\text{en}\quad x\in U_\alpha \tag{3.1}$$

où g_{ij} est une fonction différentiable sur U_α. (g^{ij}) ou g désignera l'inverse ou le déterminant de la matrice (g_{ij}) respectivement.

Soit φ une p-forme différentielle de première ordre. φ s'exprime dans U_α par $\sum_{i_1\cdots i_p}^{n}\varphi_{i_1i_2\cdots i_p}dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}$. En chaque point x de U_α, on peut définir le produit scalaire

$$\langle\varphi, \varphi\rangle_x=\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{i_1i_2\cdots i_p}\varphi_{j_1j_2\cdots j_p}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_pj_p} \tag{3.2}$$

et l'opérateur adjointe * qui transforme une p-forme φ en $(n-p)$ forme $*\varphi$ de sorte que

(3.3) $$*\varphi\wedge\psi=\langle\varphi,\psi\rangle\, dV \text{ pour } p\text{-forme } \psi \text{ quelconque}$$

en chaque point de M, où dV est l'élément de volume représenté en coordonnées locales par:

(3.4) $$dV=\sqrt{g}\; dx^1_\wedge dx^2_\wedge\cdots{}_\wedge dx^n$$

$\langle\ ,\ \rangle$, $*$, g sont indépendants du choix de coordonnées. Enfin pour deux p-formes φ,ψ, on peut définir le produit scalaire (φ,ψ) de la manière suivante:

(3.5) $$(\varphi,\psi)=\int_M \langle\varphi,\psi\rangle dV$$

On désignera par d, δ et Δ, la dérivée extérieure, son adjoint et l' opérateur de Laplace-Beltrami: $\delta=(-1)^p *^{-1}d*$, $\Delta=d\delta+\delta d$.

Considérons en particulier une fonction φ. La dérivée extérieure $d\varphi$ est une 1-forme. $(d\varphi,d\varphi)$ s'appelle *intégrale de Dirichlet* que nous désignerons par $D(\varphi,\varphi)$ ou $D(\varphi)$. $\Delta\varphi$ s'exprime en coordonnées locales:

(3.6) $$\Delta\varphi=\sum_{i,j}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)$$

Une fonction différentiable f est dit *harmonique* quand $\Delta f=0$. Une fonction constante est evidemment harmonique.

Soit Ω un domaine dans M. Considérons l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ dans Ω. Nous appellerons *solution fondamentale* une fonction suivante $\gamma(x,y)$, $x,y\in\Omega$ de sorte que:

(i) $\gamma(x,y)$ est harmonique en $\Omega-\{y\}$ par rapport à x: $\Delta_x\gamma(x,y)=0$.

(ii) Au voisinage de y, $\gamma(x,y)$ a une singularité principale suivante:

(3.7) $$\begin{cases} \gamma(x,y)\sim\dfrac{1}{\omega_{n-1}(n-2)}\operatorname{dis}(x,y)^{-n+2} & (n>2)\\[2ex] \text{ou}\qquad \sim\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{\operatorname{dis}(x,y)} & (n=2)\end{cases}$$

où ω_{n-1} est la superficie de la sphère unité à dimension $n-1$. Il est bien connu que (voir Duff [3] ou F. John [9]):

THÉORÈME (3.1) *L'opérateur de Laplace-Beltrami a une solution fondamentale et une seule dans un assez petit demaine fini.*

DÉFINITION (3.1) *Soit M un espace riemannien. Une fonction $G(x,y)$ continue de deux variables x, y sur $M\times M-\{x=y\}$ est dit fonction de Green s'il satisfait les conditions suivantes:*

(i) *$G(x, y)$ est une fonction harmonique de x dans $M-\{y\}$.*

(ii) *Au voisinage convenable de y, $G(x, y)$ a la singularité principale de* (3.7).

(iii) *Soit M un domaine ouvert de M tel que $M_\delta=\{x\in M;\ \mathrm{dis}(x, y)\geqq\delta\}$ pour un nombre positif quelconque mais fixé δ. $G(x, y)$ est une fonction bornée de x dans M.*

Il n'existe pas si M est un espace euclidéan à 2 dimensions (voir Nevalinna [13]). S. Itô a récemment démontré le (voir S. Itô [8b] et aussi M. G. Šur [15]):

THÉORÈME (3.2) *M soit un espace riemannien quelconque. Pour qu'il existe une fonction de Green sur M, il faut et il suffit qu'il existe une fonction non-constante et non-négative surharmonique.*

Il a utilisé la méthode de l'équation de chaleur en étendant la théorie de Minakshindaram, Pleijel et K. Yoshida.

EXEMPLE. M soit un espace riemannien simplement connexe à courbure négative et constante. M est isomorphe à un espace riemannien symétrique homogène $L(n+1)/S0(n)$ où $L(n+1)$ est le groupe de Lorentz d'ordre $(n+1)$. $\mathfrak{g}(\ ,\ )$ devient

$$\mathfrak{g}^*=(dt)^2+\frac{(\sinh\sqrt{\lambda}\,t)^2}{(\sqrt{\lambda})^2}\sum_{i=1}^{n}(da_i)^2. \tag{3.8}$$

On pose

$$S_r(0)=\{x\in M;\ \mathrm{dis}(0, x)=r\}\quad B_r(0)=\{x\in M;\ \mathrm{dis}(0, x)<r\} \tag{3.9}$$

où 0 est un point fixé de M.

L'aire $A(r)$ de la sphère $S_r(0)$ est égale à $\left(\frac{\sinh\sqrt{\lambda}\,r}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n-1}$ et le volume $V(r)$ de l'intérieur $B_r(0)$ est égale à $\int_0^r\left(\frac{\sinh\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n-1}dt$. L'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit de la façon suivante:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{A(r)}\frac{dA(r)}{dr}\frac{\partial}{\partial r}+\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sinh\sqrt{\lambda}\,r}\right)^2\Delta', \tag{3.10}$$

où Δ' est l'opérateur ordinaire de Laplace-Beltrami sur la sphère unité. r étant $r=\mathrm{dis}(0, x)$.

Il existe une et une seule fonction de Green $G(x, y)$ définie de la manière suivante:

$$G(x, y)=u(r)\quad r=\mathrm{dis}(x, y)\quad \Delta_x u=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{A(r)}\frac{dA(r)}{dr}\frac{du}{dr}=0 \tag{3.11}$$

$$\text{donc,}\qquad u(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_r^\infty\frac{dt}{A(t)}\qquad n\geqq 2.$$

La fonction $G(x, y)$ satisfait une condition plus stricte que la Définition (3.1) (ii):

$$\lim_{r\to\infty} G(x, y)=0 \quad \text{où} \quad r=\operatorname{dis}(x, y), \quad y \text{ fixe.} \tag{3.12}$$

Dans certains espaces riemanniens symétriques, les formes explicites des fonctions de Green ont été trouvées par plusieurs personnes (voir S. Helgason [7b], F. I. Karpelevič [10]) est bien connu que les espaces riemanniens à courbure positive sont tous compacts (voir S. B. Myers [12]). Par conséquent, il n'y a pas de fonction de Green dans un tel espace. Mais dans le cas à courbure négative, il existe actuellement des fonctions de Green ce que nous démontrerons tout à l'heure.

Le lemme suivant est bien connu (voir Courant-Hilbert [2]):

LEMME (3.1) *Soit un domaine borné dans M entouré de sa frontière régulière S de classe C^∞. Considérons le problème de Dirichlet et celui de Neumann dans Ω et S pour l'opérateur Δ. Soit φ une fonction quelconque continue sur S, alors on peut trouver une fonction et une seule f de classe C^∞ dans Ω et continue sur $\bar{\Omega}=\Omega\cup S$ de sorte que*

$$\Delta f=0, \quad f|_S=\varphi \tag{3.13}$$

où $|_S$ signifie la restriction sur S. De plus, soit ψ une fonction continue quelconque sur S et satisfaite:

$$\int_S \psi dS=0 \tag{3.14}$$

où dS est l'élément de surface de la frontière S. Alors, on peut trouver une fonction et une seule f_1 de classe C^∞ dans Ω et continue sur $\bar{\Omega}$ à une constante additive près de sorte que

$$\Delta f_1=0, \quad \left.\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S=\psi \tag{3.15}$$

òu $\left.\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S$ signifie la dérivée normale extérieure en S qui soit définie en un de ses points par l'équation $H(x^1, x^2, \cdots, x^n)=0$, $(x^1, \cdots, x^n)$ étant le système des coordonnées locales en ce point et Ω soit situé du coté défini par $H(x)<0$. alors

$$\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{n}}=\Big(\sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j}\Big)\Big/\sqrt{\sum_{k,l} g^{kl}\frac{\partial H}{\partial x^l}\frac{\partial H}{\partial x^k}} \qquad \textit{sur } H(x)=0.$$

A cause de ce lemme il existe une et une seule fonction de Green $G_\Omega(x, y)$ qui satisfaite les premières deux conditions de la Définition (3.1) et la suivante:

$$G_\Omega(x, y)=0 \tag{3.16}$$

si x ou y appartient à S. Alors, la solution du problème de Dirichlet (3.13) s'exprime

(3.17) $$u(x)=-\int_S \frac{G_\Omega(x,\xi)}{\partial \boldsymbol{n}_\xi}\varphi(\xi)dS_\xi$$

De la même manière on peut trouver une et une seule fonction de Neumann $N_\Omega(x, y)$ qui satisfaite les premières deux conditions de la Définition (3.1) et la suivante:

(3.18) $$\frac{\partial N_\Omega}{\partial \boldsymbol{n}_\xi}(x,\xi)=0 \qquad \text{pour } \xi\in S$$

Alors, la solution du problème de Neumann (3.14) $v(x)$ s'exprime:

(3.19) $$v(x)=\int_S N_\Omega(x,\xi)\psi(\xi)dS_\xi$$

Les propriétés suivantes de la fonction de Green $G_\Omega(x, y)$ sont bien connues (voir Courant-Hilbert [2])

(3.20) $$\begin{cases} \text{(i)} \ \Delta_x G_\Omega(x,y)=0 \quad \textit{pour} \quad x\neq y \\ \text{(ii)} \ G_\Omega(x,y) \ \textit{est continue, non-négative et symétrique sur } \bar\Omega\times\bar\Omega \textit{ en} \\ \quad \textit{dehors de la partie } [\bar\Omega\times\bar\Omega] \textit{ des paires } (x,y) \textit{ telle que } x=y: \\ \quad G_\Omega(x,y)=G_\Omega(y,x)\geqq 0 \\ \text{(iii)} \ G_\Omega(x,y)>0 \quad \textit{dans} \quad \Omega\times\Omega \textit{ et } 0 \textit{ sur } S\times\bar\Omega \ (\textit{ou } \bar\Omega\times S) \\ \text{(iv)} \ \dfrac{G_\Omega(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}_\xi}<0 \quad \textit{pour} \quad x\in\Omega,\ \xi\in S \\ \text{(v)} \ \dfrac{\partial^2 G_\Omega(\xi,\eta)}{\partial \boldsymbol{n}_\xi \partial \boldsymbol{n}_\eta}>0 \quad \textit{pour} \quad \xi,\ \eta\in S \\ \text{(vi)} \ -\displaystyle\int \frac{\partial G_\Omega(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}_\xi}dS_\xi=1. \end{cases}$$

LE PRINCIPE DU MAXIMUM. *A la même condition du Lemme* (3.1), *on vérifie* $m<u(x)<M$, $x\in\Omega$ *où* $m=\operatorname{Min}_{\xi\in S}\varphi(x)$, $M=\operatorname{Max}_{\xi\in S}\varphi(x)$, *c'est-à-dire* $u(x)$ *ne peut jamais prendre dans* Ω *ni la valeur maximale ni minimale. De plus supposons que* u *prenne la valeur maximale en un point* ξ *de* S, *alors*

(3.21) $$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \boldsymbol{n}_\xi}>0$$

REMARQUE. Le lemme (3.1) est aussi vérifié quand $\varphi(x)$ ou $\psi(x)$ est mesurable sur S, si l'on considère la valeur frontière de la fonction $u(x)$ ou $v(x)$ seulement aux points continus de φ ou ψ. (3.13) et (3.15) doit être remplacées par les suivantes respectivement.

(3.13)′ $\Delta f=0 \quad f|_S=\varphi$ en tous les points continus de S.

(3.14)′ $\Delta f_1=0 \quad \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S=\psi$ en tous les points continus de S.

Naturellement cette formation n'est pas précise comme la théorie de potentiel moderne nous enseigne. Mais ça suffira pour notre discussion ultérieure.

DÉFINITION (3.2) *Soit Ω un domaine dans M, S sa frontière régulière de classe C^∞. T soit une partie fermée ou ouverte de S avec sa frontière T rare dans S. La fonction $u(x)$ définie sur $\bar{\Omega}$ est dit mesure harmonique par rapport à T si:*

(i) $\Delta u=0$ *dans Ω*

(ii) $\lim\limits_{x\to\xi, x\in\Omega} u(x)=1$ *si ξ est à l'intérieur de T*

(iii) $\lim\limits_{x\to\xi, x\in\Omega} u(x)=0$ *si ξ est à l'intérieur de $S-T$.*

Cette fonction sera designée par $\omega(x;\ T, \Omega)$, qui satisfait les égalités suivantes:

$$\begin{cases} 0\leqq\omega(x;\ T,\Omega)\leqq 1 & x\in\bar{\Omega} \\ 0<\omega(x;\ T,\Omega)<1 & x\in\Omega \\ \omega(x;\ T,\Omega)+\omega(x;\ S-T,\Omega)=1 & x\in\Omega\,. \end{cases} \tag{3.22}$$

On peut étendre la mesure harmonique au cas où T est un ensemble borélien arbitraire de S et $\omega(x;\ T, \Omega)$ devienne une mesure borélienne de S (voir S. Itô [8b]). On peut vérifier le théorème suivant:

THÉORÈME (3.3) *Soit $\varphi(\xi)$ une fonction mesurable sur S, alors la fonction $f(x)$ définie par:*

$$f(x)=\int_S \varphi(\xi)d\omega(x;\ \xi,\Omega) \tag{3.23}$$

est harmonique dans Ω et vérifie

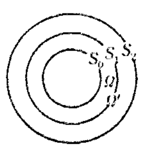
$$\lim_{x\to\xi, x\in\Omega} f(x)=\varphi(\xi) \qquad \textit{presque partout } \xi \textit{ dans } S\,. \tag{3.24}$$

On déduit facilement

$$\omega(x;\ T,\Omega)=-\int_T \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi}dS_\xi\,. \tag{3.25}$$

Soit Ω (ou Ω') un domaine borné entouré de deux frontières régulières et disjointes S_0 et S_1 (ou S_0 et S_2). Supposons que $\Omega\Subset\Omega'$ i.e. la fermée $\bar{\Omega}$ est contenue dans Ω'. Alors il résulte du principe du maximum que:

$$0\leqq\omega(x;S,\Omega)\leqq\omega(x;S,\Omega')\leqq 1$$



pour $x\in\Omega$. Mais si $x\in\Omega$, on vérifie:

$$0<\omega(x;S,\Omega)<\omega(x;S,\Omega')<1 \tag{3.26}$$

On déduit immédiatement de (3.17) et (3.20) le principe d'Harnack:

Soit Ω un domaine borné à sa frontière régulière dans M. Soit $u_n(x)$

$(n=1, 2, 3, \cdots)$ *harmoniques dans* Ω *et forment une suite s'acroissante*: $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$. *Supposons que la suite* $\{u_n(x)\}$ *tende en un point* 0 *de* Ω, *alors elle tend vers une fonction harmonique* $u(x)$ *uniformément sur toute partie compacte de* Ω. (La méthode de la démonstration est parfaitement analogue au cas de l'intégrale classique de Poisson et donc peut être omise.)

Considérons une suite de domaines bornés $\{\Omega_n\}n=0, 1, 2, \cdots$ entourés de ses frontières régulières S_n de telle sorte que $\Omega_{n+1} \Supset \Omega_n$ et la réunion de $\{\Omega_n\}$ soit égale à M tout entier:

$$\Omega_n \Subset \Omega_{n+1}\,, \text{ et } \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n = M \tag{3.27}$$

La mesure harmonique $\omega(x; S_0, \Omega_n - \bar{\Omega}_0)$ satisfait l'inégalité suivante:

$$0 \leq \omega(x; S_0, \Omega_n - \bar{\Omega}_0) \leq \omega(x; S_0, \Omega_{n+1} - \bar{\Omega}_0) \leq 1 \quad \text{pour} \quad x \in \bar{\Omega}_n - \Omega_0. \tag{3.28}$$

A cause du principe d'Harnack $\omega(x; S_0, \Omega_{m+\nu} - \bar{\Omega}_0)$ converge uniformément sur $\bar{\Omega}_m - \Omega_0$ vers une fonction $\omega(x; S_0, M - \bar{\Omega}_0)$ indépendente de m, harmonique dans $M - \bar{\Omega}_0$ et continue sur $M - \Omega_0$ telle que $\omega(\xi; S_0, M - \bar{\Omega}_0) = 1$ pour $\xi \in S_0$:

$$\omega(x; S_0, M - \bar{\Omega}_0) = \lim_{\nu \to \infty} \omega(x; S_0, \Omega_{m+\nu} - \bar{\Omega}_0) \quad \text{pour} \quad x \in \Omega_m - \bar{\Omega}_0 \tag{3.29}$$

Evidemment on vérifie:

$$0 \leq \omega(x; S_0, \Omega_m - \bar{\Omega}_0) \leq \omega(x; S_0, M - \bar{\Omega}_0) \leq 1 \quad \text{pour} \quad x \in \Omega_m - \bar{\Omega}_0. \tag{3.30}$$

Nous montrons que $\omega(x; S_0, M - \bar{\Omega}_0)$ ainsi définie ne dépend pas du choix des suites $\{\Omega_n\}$. Pour cela, nous supposons qu'il existe une autre suite de domaines $\{\Omega'_n\}$ avec $\Omega'_0 = \Omega_0$, qui satisfaite (3.27). Alors pour un nombre entier quelconque m, il existe un autre m' tel que $\Omega_m \Subset \Omega'_{m'}$, donc $\omega(x; S_0, \Omega_m - \bar{\Omega}_0) \leq \omega(x; S_0, \Omega'_{m'} - \bar{\Omega}_0)$. D'autre coté pour un nombre l' il existe un autre l tel que $\omega(x; S_0, \Omega'_{l'} - \bar{\Omega}_0) \leq \omega(x; S_0, \Omega_l - \bar{\Omega}_0)$. On en déduit facilement que: $\omega(x; S_0, M - \bar{\Omega}_0) = \lim_{\nu \to \infty} \omega(x; S_0, \Omega_{m+\nu} - \bar{\Omega}_0) = \lim_{\nu \to \infty} \omega(x, S_0, \Omega_{m'+\nu'} - \bar{\Omega}_0)$ pour $x \in \Omega_m \cap \Omega'_{m'} - \bar{\Omega}_0$.

On peut aussi déduire que si $\Omega_0 \Supset \Omega'_0$.

$$\omega(x; S_0, M - \bar{\Omega}_0) \leq \omega(x; S'_0, M - \bar{\Omega}'_0) \quad \text{pour} \quad x \in M - \bar{\Omega}'_0 \tag{3.31}$$

Pour une partie mesurable T_0 de S_0 on peut définir la mesure harmonique $\omega(x; T_0, M - \bar{\Omega}_0)$ de la manière suivante:

$$\lim_{\nu \to \infty} \omega(x; T_0, \Omega_{m+\nu} - \bar{\Omega}_0) = \omega(x; T_0, M - \bar{\Omega}_0) \quad \text{pour} \quad x \in \Omega_m - \bar{\Omega}_0 \tag{3.32}$$

Alors,
$$0 \leq \omega(x; T_0, M - \bar{\Omega}_0) \leq \omega(x; S_0, M - \bar{\Omega}_0) \leq 1$$

$$\omega(x; T_0, M - \bar{\Omega}_0) + \omega(x; S_0 - T_0, M - \bar{\Omega}_0) = \omega(x; S_0, M - \bar{\Omega}_0) \tag{3.33}$$

$\omega(x; T_0, M - \bar{\Omega}_0)$ devient une mesure borélienne dans S_0 et pour une fonction borélienne $\varphi(\xi)$ sur S_0, la fonction $f(x)$ définie par:

(3.34) $$f(x)=\int_{S_0}\varphi(\xi)d\omega(x;\xi,M-\bar{\Omega}_0) \quad \text{pour} \quad x\in M-\bar{\Omega}_0$$

est harmonique dans $M-\bar{\Omega}_0$ et vérifie la propriété suivante:

(3.35) $$\lim_{x\to\xi,x\in\Omega} f(x)=\varphi(\xi) \quad \text{pour presque partout} \quad \xi\in S_0.$$

Posons l'hypothèse suivante:

(H.1) $\omega(x;S_0,M-\bar{\Omega}_0)$ *n'est pas identiquement égale à* 1 *dans* M-$\bar{\Omega}_0$ *pour toute partie* Ω_0 *bornée, c'est-à-dire,*

(3.36) $$0<\omega(x;S_0,M-\bar{\Omega}_0)<1 \quad \textit{pour} \quad x\in M-\bar{\Omega}_0$$

Nous considérons aussi l'hypothèse plus forte:

(H.2) $$\lim_{x\to\infty,M-\Omega_0}\omega(x;S_0,M-\bar{\Omega}_0)=0.$$

On peut démontrer le théorème suivant au moyen de la méthode alternative de C. Schwartz (voir R. Nevalinna [13] p. 148-149).

THÉORÈME B. *On peut trouver une fonction de Green* $G(x,y)$ *de sorte que*

(3.37) $$l_K\omega(x;S_0,M-\bar{\Omega}_0)\leqq G(x,y)\leqq L_K\omega(x;S_0,M-\bar{\Omega}_0)$$

pour $x\in M-\bar{\Omega}_0$ et $y\in K$ *où* Ω_0 *une partie bornée quelconque,* K *une partie compacte de* Ω_0, l_K, L_K *sont des constantes positives dependant de* Ω_0 *et* K.

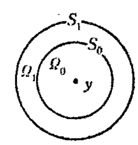
DÉMONSTRATION. Soit Ω_0 et $\Omega_1(\Omega_0\Subset\Omega_1)$ deux domaines entourés de frontières régulières S_0 et S_1. Comme nous avons l'indiqué, il existe une fonction de Green $G_1(x,y)$ dans Ω_1. Fixons un point y de Ω_0 une fois pour toute et posons $u_0(x)=G_1(x,y)\geqq 0$ $(x\in\bar{\Omega}_1-\Omega_0)$. Evidemment $u_0(x)$ est harmonique dans $\Omega_1-\bar{\Omega}_0$ et continue sur $\bar{\Omega}_1-\Omega_0$. Définissons les fonctions $u_n(x)$ et $v_n(x)$ par induction de la manière suivante:

(3.38) $$u_\nu(x)=\int_{S_0}(v_{\nu-1}(\xi)+u_0(\xi))d\omega(x;\xi,M-\bar{\Omega}_0) \qquad \nu=1,2,3,\cdots$$

(3.39) $$\begin{cases} v_0(x)=0 \\ v_\nu(x)=\int_{S_1}u_\nu(\xi)d\omega(x;\xi,\Omega_1) \qquad \nu=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

u_ν(ou v_ν) est harmonique dans $M-\bar{\Omega}_0$ (ou Ω_1), et

(3.40) $$u_{\nu+1}(x)-u_\nu(x)=\int_{S_0}(v_\nu(\xi)-v_{\nu-1}(\xi))d\omega(x;\xi,M-\bar{\Omega}_0)$$



Il en résulte de (3.39) que:

$\max_{\xi\in S_1}|u_\nu(\xi)-u_{\nu-1}(\xi)|=\max_{\xi\in S_1}|v_\nu(\xi)-v_{\nu-1}(\xi)|$, qui sera désignée par M_ν. Donc,

(3.41) $$|v_\nu(x)-v_{\nu-1}(x)|\leqq M_\nu \quad x\in\bar{\Omega}_1, \quad \text{en particulier}$$

(3.42) $$|v_\nu(\xi)-v_{\nu-1}(\xi)|\leq M_\nu \quad \xi\in S_0.$$ Donc, de (3.40) on déduit,

(3.43) $$|u_{\nu+1}(x)-u_\nu(x)|\leq M_\nu\int_{S_0} d\omega(x;\xi, M-\bar{\Omega}_0)=M_\nu\omega(x;S_0, M-\bar{\Omega}_0)$$

pour $x\in M-\bar{\Omega}_0$. En vertu de (3.36)

(3.44) $$0<k=\operatorname*{Max}_{x\in S_1}\omega(x,\xi;M-\bar{\Omega}_0)<1,\ \text{c'est-à-dire}$$
$$M_{\nu+1}\leq kM \quad\text{et}\quad M_\nu\leq k^{\nu-1}M_1.$$

De (3.42) et (3.43), $|u_{\nu+1}(x)-u(x)|\leq kM_\nu=k^\nu M_1$ $(x\in M-\Omega_0)$ et $|v_\nu(x)-v_{\nu-1}(x)|\leq k^{\nu-1}M_1$ $(x\in\bar{\Omega}_1)$. Par conséquent, les deux séries $\sum_{\nu=1}(u_\nu(x)-u_{\nu-1}(x))$ et $\sum_{\nu=1}(v_\nu(x)-v_{\nu-1}(x))$ converge uniformément dans $M-\Omega_0$ et $\bar{\Omega}_1$ respectivement, et $u_\nu(x)$ ou $v_\nu(x)$ converge uniformément vers les fonctions harmoniques $u(x)$ (dans $M-\Omega_0$) ou $v(x)$ (dans $\bar{\Omega}_1$) respectivement.

(3.45) $$\lim_{\nu\to\infty} u_\nu(x)=u(x) \quad x\in M-\Omega_0$$

(3.46) $$\lim_{\nu\to\infty} v_\nu(x)=v(x) \quad x\in\bar{\Omega}_1$$

De plus, $u(\xi)=u_0(\xi)+\sum_{\nu=1}^{\infty}(u_\nu(\xi)-u_{\nu-1}(\xi))=u_0(\xi)+\sum_{\nu=1}^{\infty}(v_\nu(\xi)-v_{\nu-1}(\xi))=u_0(\xi)+v(\xi)$ pour $\xi\in S_0\cup S_1$. Donc,

(3.47) $$u(x)=u_0(x)+v(x) \quad\text{pour}\quad x\in\bar{\Omega}_1-\Omega_0$$

En posant $L=\operatorname{Max}G_1(\xi,y)$, on vérifie pour $\xi\in S_0$,

$$v_m(\xi)\leq|\sum_{\nu=1}^{m}(v_\nu(\xi)-v_{\nu-1}(\xi)|\leq\sum_{\nu=1}^{m}k^{\nu-1}M_1\leq\sum_{\nu=1}^{m}k^\nu L\leq\frac{Lk}{1-k},$$

car $M_1=\operatorname*{Max}_{\xi\in S_1}u_1(\xi)\leq k\operatorname*{Max}_{\xi\in S_0}u_0(\xi)=Lk$. De (3.38) on déduit:

$$u_m(x)\leq\frac{L}{1-k}\omega(x;S_0,M-\bar{\Omega}_0)\quad\text{et donc,}$$

(3.48) $$\begin{cases} 0\leq u(x)\leq\dfrac{L}{1-k}\omega(x;S_0,M-\bar{\Omega}_0) & \text{pour}\quad x\in M-\Omega_0\\ 0\leq v(x)\leq\dfrac{Lk}{1-k} & \text{pour}\quad x\in\bar{\Omega}_0\end{cases}$$

En faisant $\nu\to\infty$, on voit par (3.38) que

$$u(x)=\int_{S_0}(v(\xi)+u_0(\xi))d\omega(x;\xi,M-\bar{\Omega}_0)\geq\int_{S_0}u_0(\xi)d\omega(x;\xi,M-\bar{\Omega}_0)\geq L_0\omega(x;S_0,M-\bar{\Omega}_0)$$

òu $L_0=\operatorname*{Min}_{\xi\in S_0}u_0(\xi)=\operatorname*{Min}_{\xi\in S_0}G(\xi,y)$. La fonction $u(x)$ depend de y quand y parcoure dans Ω_0: $u(x)=u(x,y)$. On peut obtenir l'inégalité suivante de même que (3.47), $|u(x,y)-u(x,y')|\leq\frac{1}{1-k}\omega(x;S_0,M-\bar{\Omega}_0)\cdot\operatorname*{Max}_{\xi\in S_0}|G_1(\xi,y)-G_1(\xi,y')|$ pour $x\in M-\Omega_0$ et $y,y'\in\Omega_0$, $y\neq y'$ et $|v(x,y)-v(x,y)|\leq\frac{k}{1-k}\operatorname*{Max}_{\xi\in S_0}|G_1(\xi,y)-G_1(\xi,y')|$ pour $x\in\bar{\Omega}_0$ et $y,y'\in\Omega_0$, $y\neq y'$. De ces formules, on voit facilement que $u(x,y)$ est continue dans $M-\Omega_0-\{x \neq y\}$ et vérifie les condition de la définition (3.1). Cependant elle est définie seulement sur $M-\Omega_0$. Nous etendrons le demaine de la définition de cette fonction sur M tout entier. Pour cela deux lemmes suivants sont nécéssaires. Sous l'hypothèse (H.1) :

LEMME (3.2) *Soit Ω_0 un domaine borné dans M. Soit $u(x)$ une fonction harmonique dans $M-\bar{\Omega}_0$ et continue sur $M-\Omega_0$ de sorte que*

$$|u(x)| \leq C\omega(x; S_0, M-\bar{\Omega}_0) \quad \textit{pour } x \in M-\Omega_0,\ C \textit{ constant} > 0. \tag{3.49}$$

Alors, $u(x)$ s'exprime de la façon suivante:

$$u(x) = \int_{S_0} u(\xi) d\omega(x; \xi, M-\bar{\Omega}_0) \quad x \in M-\bar{\Omega}_0. \tag{3.50}$$

COROLLAIRE. *On a toujours* $\inf_{x \in M-\Omega_0} \omega(x; S_0, M-\bar{\Omega}_0) = 0$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. Considerons une famille de domaines (3.27). $u(x)$ s'exprime par l'intégrale suivante: $\int_{S_0+S_\nu} u(\xi) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0)$.

$$\left| \int_{S_\nu} u(\xi) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0) \right| \leq C \int_{S_\nu} \omega(\xi; S_0, M-\bar{\Omega}_0) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0)$$

D'autre coté $\omega(x; S_0, M-\bar{\Omega}_0)$

$$= \int_{S_0} d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0) + \int_{S_\nu} \omega(\xi; S_0, M-\bar{\Omega}_0) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0)$$

$$= \omega(x; S_0, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0) + \int_{S_\nu} \omega(x; S_0, M-\bar{\Omega}_0) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0), \quad \text{par définition,}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \omega(x; S_0, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0) = \omega(x; S_0, M-\bar{\Omega}_0). \quad \text{Donc,}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{S_\nu} \omega(\xi, S_0, M-\bar{\Omega}_0) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0) = 0. \tag{3.51}$$

Par conséquent, $u(x) = \lim_{\nu\to\infty} \int_{S_0+S_\nu} u(\xi) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0)$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \int_{S_0} u(\xi) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0) + \int_{S_\nu} u(\xi) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0)$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \int_{S_0} u(\xi) d\omega(x; \xi, \Omega_\nu - \bar{\Omega}_0) = \int_{S_0} u(\xi) d\omega(x; \xi, M-\bar{\Omega}_0).$$

La démonstration est ainsi achevée.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. Dans le cas contraire, la fonction constante 1 satisferait (3.49). Donc, $1 = \int_{S_0} d\omega(x; \xi, M-\bar{\Omega}_0) = \omega(x; S_0, M-\bar{\Omega}_0)$ pour $x \in M-\bar{\Omega}_0$, ce qui est contre l'hypothèse (H.1). C. Q. F. D.

LEMME (3.3) *Soit $u(x)$ harmonique dans M tout entier et satisfaite* (3.49) *dans $M-\Omega_0$, alors $u(x)$ est identiquement nulle.*

DÉMONSTRATION. D'après (3.50), $u(x)$ s'écrit comme suivant :

$$u(x)=\int_{S_0} u(\xi)d\omega(x;\xi, M-\bar{\Omega}_0) \quad \text{pour} \quad x\in M-\bar{\Omega}_0$$

En posant $\operatorname{Max}_{\xi\in S_0} u(\xi)=L$, on obtient $u(x)\leqq L$ $(x\in M-\bar{\Omega}_0)$. D'après la principe du maximum $u(x)\leqq L$ dans Ω_0. Donc, $u(x)$ prend son maximum sur M d'où vient que $u(x)$ est une constante C. Si C n'était pas nulle, le corollaire précédent montre que $\omega(x;S_0, M-\bar{\Omega}_0)$ serait égale à 1 qui n'est pas le cas. Donc, $u(x)$ est nulle. C. Q. F. D.

Supposons que une autre $G'(x,y)$ soit construite d'une autre paire Ω_0', Ω_1' et que Ω_0 soit une partie ouverte finie de Ω_0'. Considérons la fonction $H(x,y)=G'(x,y)-G'(x,y)$ défine dans $M\times\Omega_0-\{x=y\}$. Comme une fonction de x, elle vérifie pour une constante C dépendant de y, $|H(x,y)|\leqq C\omega(x;S_0, M-\bar{\Omega}_0)$ où $y\in\Omega_0$, $x\in M-(\overline{\Omega_1\cup\Omega_1'})$, vu (3.37). De plus $H(x,y)$ est une fonction harmonique sur M tout entier, d'ou $H(x,y)=0$ à cause du lemme précédent. Donc $G(x,y)=G(x,y)$ sur $M\times\Omega_0-\{x\neq y\}$. On a démontré que la fonction $G(x,y)$ est définie sur $M\times M-\{x=y\}$ et qu'elle ne dépend pas du choix de Ω_0, Ω_1. La démonstration est ainsi complète.

4. Théorème d'existence

M soit un espace de Riemann simplement connexe à courbure négative. M est difformorphe à l'espace euclidean à dimension n comme l'on a vu. Prenons un système fixé de coordonnées géodésiques comme (2.10) et (2.11).

$$\text{(4.1)} \qquad \mathfrak{g}^*=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)dx^i dx^j=(dr)^2+\sum_{i=1}^n(\bar{\omega}^i)^2$$

Introduisons les notations suivantes: 0 l'origine des coordonnées, $V_r(0)$ la boule: $\{x\in M;\operatorname{dis}(0,x)<r\}$, $S_r(0)$ la sphère: $\{x\in M;\operatorname{dis}(0,x)=r\}$ et $d\sigma$ l'élément de surface sur la sphère unité ordinaire Σ à $(n-1)$ dimension en paramètre $(a_1, a_2,\cdots, a_n)$ $\sum_{i=1}^n a_i^2=1$ où $x^i=a_i r$.

Nous considérons une suite de nombres $\{\alpha_\nu\}$ $\alpha_\nu>0$ $(\nu=0,1,2,\cdots)$ qui s'acroit et tend vers l'infini et posons $\Omega_\rho=V_\rho(0)$, $S_\rho=S_\rho(0)$, $\omega(x)=\omega(x;S_{\alpha_0}, M-\bar{\Omega}_{\alpha_0})$ et $\omega_\nu(x)=\omega(x;S_{\alpha_0}, \Omega_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0})$.

$$\int_{\bar{\Omega}_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0}}|\operatorname{grad}\omega_\nu|^2 dV\int_{\bar{\Omega}_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0}}\frac{1}{g}dV\geqq\left(\int_{\bar{\Omega}_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0}}|\operatorname{grad}\omega_\nu|\frac{1}{\sqrt{g}}dV\right)^2$$

(l'inégalité de Schwartz)

$$=\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_\nu}\int_\Sigma|\operatorname{grad}\omega_\nu|dr\,d\sigma\right)^2 (dV=\sqrt{g}\,dr\,d\sigma)$$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_\nu}\int_\Sigma|\operatorname{grad}\omega_\nu|dr\,d\sigma\geqq\int_{\alpha_0}^{\alpha_\nu}\int_\Sigma\left|\frac{\partial\omega_\nu}{\partial r}\right|dr\,d\sigma\geqq\int_\Sigma\left|\int_{\alpha_0}^{\alpha_\nu}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial r}dr\right|d\sigma=$$

$$=\int_\Sigma|(\omega)_{r=\alpha_\nu}-(\omega)_{r=\alpha_0}|d\sigma=\int_\Sigma d\sigma=\kappa>0.$$

$$\int_{\Omega_{\alpha_\nu}-\bar\Omega_{\alpha_0}} |\operatorname{grad}\omega_\nu|^2\,dV\int_{\Omega_{\alpha_\nu}-\bar\Omega_{\alpha_0}}\frac{1}{g}\,dV>\kappa^2 \tag{4.2}$$

$\displaystyle\int_{\Omega_{\alpha_\nu}-\bar\Omega_{\alpha_0}}\frac{1}{g}\,dV=\int_{\alpha_0}^{\alpha_\nu}\int_\Sigma\frac{1}{\sqrt{g}}\,dr\,d\sigma$ Donc, si $\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\infty}\int_\Sigma\frac{1}{\sqrt{g}}\,dr\,d\sigma>0$, alors

$$\lim_{\nu\to\infty}\int|\operatorname{grad}\omega_\nu|^2\,dV\geqq\kappa^2\Big/\left\{\int_{\alpha_0}^{\infty}\int_\Sigma\frac{1}{\sqrt{g}}\,dr\,d\sigma\right\}>0. \tag{4.3}$$

vu l'inégalité (2.11), cette ondition est satisfaite dans le cas à courbure strictement négative ou à courbure négative et $n\geqq 3$. D'autre coté par l'intégration partielle,

$$\int_{\Omega_{\alpha_\nu}-\Omega_{\alpha_0}} |\operatorname{grad}\omega_\nu|^2\,dV=-\int\frac{\partial\omega_\nu}{\partial\boldsymbol{n}}\,dS. \tag{4.4}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}$ la dérivée normale extérieure à la frontière. En regardant que $\dfrac{\partial\omega_\nu}{\partial\boldsymbol{n}}\leqq\dfrac{\partial\omega_{\nu+1}}{\partial\boldsymbol{n}}\leqq 0$ sur S, on voit la suite des intégrales de Dirichlet $\displaystyle\int_{\Omega_{\alpha_\nu}-\Omega_{\alpha_0}}|\operatorname{grad}\omega_\nu|^2\,dS=D(\omega_\nu;\Omega_{\alpha_\nu}-\bar\Omega_{\alpha_0})$ est decroissante. Car ω_ν tend vers ω avec ses dérivées uniformément sur une partie finie de $M-\bar\Omega_{\alpha_0}$.

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\Omega_{\alpha_\nu}-\bar\Omega_{\alpha_0}}|\operatorname{grad}\omega_\nu|^2\,dV=-\int_S\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{n}}\,dS \tag{4.5}$$

qui n'est pas nulle d'après (4.3). Le lemme suivant montre que (4.5) est égale à

$$\int_{M-\Omega_{\alpha_0}}|\operatorname{grad}\omega|^2\,dV=D(\omega;M-\bar\Omega_{\alpha_0}).$$

LEMME (4.1) *Soit une fonction $\varphi(x)$, continue sur $M-\Omega_{\alpha_0}$ et de classe C^2 sur $M-\Omega_{\alpha_0}$, et soit l'intégrale de Dirichlet $D(\varphi;M-\Omega_{\alpha_0})$ finie. Alors*

$$D(\varphi,\omega;M-\bar\Omega_{\alpha_0})=\int_{M-\Omega_{\alpha_0}}\langle\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{grad}\omega\rangle\,dV=$$
$$=-\int_{S_{\alpha_0}}\omega(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\boldsymbol{n}}\,dS_\xi \tag{4.6}$$

En particulier,

$$D(\omega;M-\bar\Omega_{\alpha_0})=-\int_{S_{\alpha_0}}\frac{\partial\omega(\xi)}{\partial\boldsymbol{n}}\,dS_\xi \tag{4.7}$$

La démonstration suivante est due à R. Nevalinna (voir p. 327, R. Nevalinna [13]).

DÉMONSTRATION. Par la formule de Green on a pour ($\nu\leqq\mu$) $D(\omega_\mu,\varphi;\Omega_{\alpha_\mu}-\Omega_{\alpha_\nu})=$ $\displaystyle-\int_S\omega_\mu(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\boldsymbol{n}}\,dS_\xi$ qui tend vers $\displaystyle-\int_{S\alpha_\nu}\omega(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\boldsymbol{n}}\,dS_\xi$ pour $\mu\to\infty$. D'autre coté,

$$D(\omega_\mu, \varphi; \Omega_{\alpha_\nu}-\Omega_{\alpha_\nu})^2 \leq D(\omega_\mu; \Omega_{\alpha_\mu}-\Omega_{\alpha_0})\ D(\varphi; \Omega_{\alpha_\mu}-\bar{\Omega}_{\alpha_\nu}) \leq -\int_{S\alpha_0} \omega_\mu \frac{\partial \omega_\mu}{\partial n} dS_\xi$$

$\times D(\varphi; \Omega_{\alpha_\mu}-\Omega_{\alpha_\nu})$. Pour $\mu \to \infty$, on a

$$\left\{-\int_S \omega(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n} dS_\xi\right\}^2 \leq \left(-\int_{S\alpha_0} \omega \frac{\partial \omega}{\partial n} dS_\xi\right) D(\varphi; M-\bar{\Omega}_{\alpha_\nu}).$$

Il est claire que $\lim\limits_{\nu\to\infty} D(\varphi; M-\bar{\Omega}_{\alpha_\nu})=0$, donc

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{S\alpha_\nu} \omega(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n} dS_\xi = 0 . \tag{4.8}$$

D'autre coté

$$D(\omega, \varphi; \Omega_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0}) = -\int_{S\alpha_0} \omega(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n} dS_\xi + \int_{S\alpha_\nu} \omega(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n} dS_\xi .$$

En faisant $\nu \to \infty$, on voit

$$D(w, \varphi; M-\bar{\Omega}_{\alpha_0}) = -\int_{S\alpha_0} \omega(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n} dS_\xi$$

ce qui n'est autre que (4.6). De plus,

$$D(\omega; \Omega_\nu-\bar{\Omega}_0) = \lim_{\mu\to\infty} D(\omega_\mu; \Omega_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0}) ,$$
$$D(\omega; \Omega_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0}) \leq D(\omega_\mu; \Omega_{\alpha_\mu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0})\ (\mu \geq \nu) .$$

D'après (4.5), $\lim\limits_{\mu\to\infty} D(\omega_\mu; \Omega_{\alpha_\mu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0}) = -\int_{S\alpha_0} \frac{\partial\omega(\xi)}{\partial n} dS_\xi .$

Donc, $D(\omega; \Omega_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_0) \leq \lim\limits_{\mu\to\infty} D(\omega_\mu; \Omega_{\alpha_\mu}-\bar{\Omega}_{\alpha_0}) = -\int_{S\alpha_0} \frac{\partial\omega(\xi)}{\partial n} dS_\xi ,$

Pour $\nu \to \infty$, on a $D(\omega; M-\bar{\Omega}_{\alpha_0}) \leq -\int_{S\alpha_0} \frac{\sigma\omega(\xi)}{\sigma n} dS_\xi ,$

c'est-à-dire l'intégrale de Dirichlet de $\omega(x)$ sur $M-\bar{\Omega}_{\alpha_0}$ est fini. En applicant la formule (4.6) pour $\omega(x)$, on voit (4.7) tout de suite. On a demontré le

THÉORÈME C. *M soit un espace de Riemann simplement connexe à courbure négative* ($n \geq 3$) *ou strictement à courbure négative* ($n \geq 2$). *Alors*

$$\int_{M-\bar{\Omega}\alpha_0} \frac{1}{g} dV < \infty \tag{4.9}$$

et $\omega(x) = \omega(x; S_0, M-\bar{\Omega}_{\alpha_0})$ *n'est pas identiquement égale à* 1 *sur* $M-\Omega_{\alpha_0}$. *Elle satisfait les propriétés suivantes:*

$$D(\omega; M-\bar{\Omega}_{\alpha_0}) = -\int \frac{\partial \omega}{\partial n} dS \tag{4.10}$$

$$\int_\Sigma (\omega(x))_{r=\rho} d\sigma \leq D(\omega; M-\bar{\Omega}_\rho)^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{M-\bar{\Omega}_\rho} \frac{1}{g} dV\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.11}$$

Aussi il existe une fonction de Green qui vérifié les propriété de la definition (3.1).

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer (4.11). En effet,

$$\int_{\Sigma} |(\omega_\nu)_{r=\alpha_\nu}-(\omega_\nu)_{r=\rho}|d\sigma = \int_{\Sigma}\int_{\rho}^{\alpha_\nu}\left|\frac{\partial\omega_\nu}{\partial r}\right|d\sigma \leq \int_{\Sigma}\int_{\rho}^{\alpha_\nu}|\text{grad}\,\omega_\nu|d\sigma$$

$$\leq \left\{\iint_{\Omega_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_\rho}|\text{grad}\,\omega_\nu|^2 dV\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\iint_{\Omega_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_\rho}\frac{1}{\bar{g}}dV\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad dV=\sqrt{\bar{g}}\,dr\,d\sigma)$$

$(\omega)_{r=\alpha_\nu}=0$, donc $\displaystyle\int_{S_\rho}(\omega_\nu)_{r=\rho}\,d\sigma \leq \left\{\iint_{\Omega_{\alpha_\nu}-\Omega_\rho}|\text{grad}\,\omega_\nu|^2 dV\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\iint_{\Omega_{\alpha_\nu}-\bar{\Omega}_\rho}\frac{1}{\bar{g}}dV\right\}^{\frac{1}{2}}$

Pour $\nu\to\infty$ on voit par (4.5) et (4.10)

$$\int_{S_\rho}(\omega)_{r=\rho}\,d\sigma \leq \left\{\iint_{M-\bar{\Omega}_\rho}|\text{grad}\,\omega|^2 dV\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\iint_{M-\bar{\Omega}_\rho}\frac{1}{\bar{g}}dV\right\}^{\frac{1}{2}}$$

COROLLAIRE. *Sous la même condition que la Théorème C, la fonction de Green* $G(x, y)$ *vérifie*: $\displaystyle\int_{\Sigma,\rho=\text{dis}\,(x,y)}|G(x, y)|d\sigma_x\to 0$ *pour* $\rho\to\infty$, y *fixé.*

Université de Tokyo

Bibliographies

[1] E. Cartan: Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars (1928).

[2] R. Courant and D. Hilbert: Methods of mathematical physics, Interscience Publishers (1962).

[3] G. F. D. Duff: Partial differential equations, Toronto.

[4] E. B. Dynkin: Non-negative eigenfunctions of Laplace-Beltrami operators and Brownian motions in some symmetric spaces, Doklady, **141**, No. 2 (1961).

[5] H. Furstenberg: A Poisson formula for semi-simple Lie groups, Ann. of Math. **77** (1963), 335-386.

[6] H. Grauert: Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige kählersche Metrik, Math. Annalen, **131** (1956), 38-75.

[7] S. Helgason: [a] Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, 1962.
———: [b] Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces, Amer. J. Math. **86** (1964), 565-601.

[8] S. Itô: [a] On existence of Green function and positive superharmonic functions for linear elliptic operators of second order, J. Math. Soc. Japan Vol. **16** (1964), 299-306.
———: [b] Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold, Ibid. 307-334.

[9] F. John: Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience publishers, 1955.

[10] F. I. Karpelevič: Geometry of geodesics and eigenfunctions of Laplace-Beltrami operators on symmetric spaces, Trudy Moscow, **14** (1965).

[11] R. S. Martin: Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., **49** (1941), 137-172.

[12] S. B. Myers: Riemannian manifolds in the large, Duke. Math. J. **1** (1935), 39-49.

[13] R. Nevalinna: Uniformisierung, Springer Verlag, 1953.

[14] M. G. Šur: Martin's boundary for linear elliptic operators of second order, Izv. Akad. Nauk, SSSR, **27** (1963), 45-60.

(Reçu le 31 mai, 1966)