Sur le système dual de deux applications de treillis

Par
Masuo HUKUHARA

Dans cet article nous voulons apporter quelques améliorations à nos articles antérieurs [4]. Dans la section I nous traiterons le système dual formé d'un $\vee$-homomorphisme et d'un $\wedge$-homomorphisme et donnerons la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe le $\wedge$-homomorphisme dual d'un $\vee$-homomorphisme donné. La section II est l'étude préliminaire pour la section III. Dans la section III nous traiterons le système dual formé d'un $\vee$-endomorphisme et d'un $\wedge$-endomorphisme plus systématiquement que dans les articles antérieurs et introduirons la notion des systèmes duals premiers entre eux. On pourra ainsi arriver immédiatement à la généralisation de la forme canonique de Jordan d'une matrice à dimension finie. Dans la section IV nous remarquerons les résultats que l'on peut déduire sans supposer la modularité.

I. Homomorphismes de treillis modulaires.

1. Définition du système dual. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ des treillis modulaire munis des opérations $\vee$ et $\wedge$ et pourvus respectivement des éléments nuls o, o' et des éléments universels u, u'. Soit L une application de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ et L^{-1} une application de $\mathfrak{M}'$ dans $\mathfrak{M}$ et supposons les conditions suivantes remplies :

I. $L(x\vee y)=Lx\vee Ly$, c'est-à-dire L est un $\vee$-homomorphisme ;

I'. $L^{-1}(x'\wedge y')=L^{-1}x'\wedge L^{-1}y'$, c'est-à-dire L^{-1} est un $\wedge$-homomorphisme ;

II. $L^{-1}Lx=x\vee L^{-1}o'$;

II'. $LL^{-1}x'=x'\wedge Lu$.

Nous dirons dans ce cas que L et L^{-1} forment un *système dual. Le $\wedge$-homomorphisme L^{-1} qui forme un système dual avec un $\vee$-homomorphisme donné L, s'il existe, est unique.*

En effet, supposons qu'un $\wedge$-homomorphisme L' aussi forme avec L un système dual. On a alors

$$L'Lx=x\vee L'o', \quad LL'x'=x'\wedge Lu.$$

On a donc

$$L'LL^{-1}x'=(L'L)(L^{-1}x')=L^{-1}x'\vee L'o'\geqq L^{-1}x',$$
$$L'LL^{-1}x'=L'((LL^{-1})x')=L'(x'\wedge Lu)\leqq L'x',$$

d'où $L^{-1}x' \leqq L'x'$. On peut échanger les rôles de L^{-1} et de L'. On a donc $L'x' \leqq L^{-1}x'$. Par suite $L' = L^{-1}$.

Cette démonstration montre que l'on a

$$L^{-1}LL^{-1} = L^{-1}. \tag{1.1}$$

On a par dualité

$$LL^{-1}L = L. \tag{1.1)'$$

Si L est un isomorphisme de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}'$, son inverse L^{-1} forme avec L un système dual.

En effet, on a toujours

$$L^{-1}Lx = x, \quad LL^{-1}x' = x'.$$

En y posant $x = o$, $x' = o'$, on obtient

$$L^{-1}Lo = o, \quad LL^{-1}o' = o'.$$

Or on a

$$L^{-1}o' \leqq L^{-1}Lo, \quad Lo \leqq LL^{-1}o'.$$

On a donc

$$L^{-1}o' = o, \quad Lo = o'.$$

Par dualité on obtient

$$Lu = u' \quad L^{-1}u' = u.$$

On a donc

$$L^{-1}Lx = x = x \vee o = x \vee L^{-1}o',$$
$$LL^{-1}x' = x' = x' \wedge u' = x' \wedge Lu.$$

Remarquons que si l'on pose $x = u$, $x' = o'$ dans les conditions II, II', on obtient

$$L^{-1}Lu = u, \tag{1.2}$$

$$LL^{-1}o' = o'. \tag{1.2)'$$

On en déduit immédiatement

$$L^{-1}u' = u, \tag{1.3}$$

$$Lo = o'. \tag{1.3)'$$

Remarquons en passant que $La \leqq b'$ *entraîne* $a \leqq L^{-1}b'$.

En effet,

$$L^{-1}b' \geqq L^{-1}La = a \vee L^{-1}o' \geqq a.$$

Par dualité, $L^{-1}a' \geqq b$ *entraine* $a' \geqq Lb$.

On en déduit

$$L^{-1}a' = \sup\{x\,;\ Lx \leqq a'\}. \tag{1.4}$$

$$La = \inf\{x'\,;\ L^{-1}x' \geqq a\}. \tag{1.4$'$}$$

En effet, si $Lx \leqq a'$, on a $x \leqq L^{-1}a'$. Or on a

$$LL^{-1}a' = a' \wedge Lu \leqq a'.$$

On a donc (1.4). Par dualité on a (1.4)$'$.

2. Propriétés du système dual d'homomorphismes. Démontrons maintenant la proposition

2.1 *Si $c' \leqq La$, il existe au moins un minorant de a dont l'image par L est c'. Parmi ces minorants, $a \wedge L^{-1}c'$ est le plus grand.*

En effet, on a

$$\begin{aligned} L(a \wedge L^{-1}c') &= L(a \wedge L^{-1}c') \vee LL^{-1}o' \\ &= L((a \wedge L^{-1}c') \vee L^{-1}o') \\ &= L((a \vee L^{-1}o') \wedge L^{-1}c') \\ &= L(L^{-1}La \wedge L^{-1}c') \\ &= LL^{-1}(La \wedge c') \\ &= La \wedge c' \wedge Lu = c'. \end{aligned}$$

Si $x \leqq a$, $Lx = c'$, on a

$$\begin{aligned} a \wedge L^{-1}c' &= a \wedge L^{-1}Lx \\ &= a \wedge (x \vee L^{-1}o') \\ &= x \vee (a \wedge L^{-1}o') \geqq x. \end{aligned}$$

Par dualité on obtient la proposition

2.1$'$ *Si $c \geqq L^{-1}a'$, il existe au moins un majorant de a' dont l'image par L^{-1} est c. Parmi ces majorants, $a' \vee Lc$ est le plus petit.*

On dit que L est un *$\vee$-homomorphisme fort* si l'on a

$$L \sup_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sup_{\lambda \in \Lambda} Lx_\lambda \tag{2.1}$$

quel que soit le nombre cardinal de Λ. On définit de même le *$\wedge$-homomorphisme fort*. On a alors la proposition

2.2 *L est un $\vee$-homomorphisme fort ; L^{-1} est un $\wedge$-homomorphisme fort.*

En effet, il est clair que l'on a

$$L \sup_\lambda x_\lambda \geqq \sup_\lambda Lx_\lambda.$$

On a d'autre part

$$L^{-1}\sup_{\lambda} Lx_\lambda \geqq L^{-1}Lx_\lambda \geqq x_\lambda,$$

d'où

$$L^{-1}\sup_{\lambda} Lx_\lambda \geqq \sup_{\lambda} x_\lambda$$

et puis

$$\sup_{\lambda} Lx_\lambda \geqq L\sup_{\lambda} x_\lambda.$$

On a donc (2.1). Par dualité on a

$$(2.1)' \qquad L^{-1}\inf_{\lambda} x_\lambda = \inf_{\lambda} L^{-1}x_\lambda.$$

2.3 *Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont distributifs, L et L' sont des homomorphismes.*

Il suffit de montrer que L, par exemple, est un $\wedge$-homomorphisme.

Il est évident que l'on a

$$L(a\wedge b)\leqq La\wedge Lb.$$

Or on a

$$\begin{aligned} L^{-1}(La\wedge Lb) &= L^{-1}La\wedge L^{-1}Lb \\ &= (a\vee L^{-1}o')\wedge(b\vee L^{-1}o') \\ &= (a\wedge b)\vee L^{-1}o'. \end{aligned}$$

D'après (1.4), on a

$$(a\wedge b)\vee L^{-1}o' = \sup\{z;\ Lz\leqq La\wedge Lb\}.$$

D'après **2.1**, il existe un élément c tel que

$$Lc = La\wedge Lb,$$

et on a

$$\begin{aligned} &c\leqq(a\wedge b)\vee L^{-1}o', \\ &Lc\leqq L((a\wedge b)\vee L^{-1}o') = L(a\wedge b). \end{aligned}$$

On a donc

$$L(a\wedge b) = La\wedge Lb.$$

3. Existence d'un $\wedge$-homomorphisme dual d'un $\vee$-homomorphisme donné. Nous avons déjà remarqué que l'on a

1° $Lo = o'$.

D'après les propositions **2.1**, **2.2** on a

2° Si $x'\leqq Lu$, il existe un élément x tel que $Lx = x'$;

3° L est un $\vee$-homomorphisme fort.

Supposons $\mathfrak{M}$ complémenté et montrons que

4° Si $a<b$, $La=Lb$, il existe un élément c tel que

$$a\wedge c=o, \quad a\vee c=b, \quad Lc=o'.$$

Posons

$$d=a\wedge L^{-1}o', \quad e=b\wedge L^{-1}o'.$$

On a alors

$$a\wedge e=a\wedge b\wedge L^{-1}o'=a\wedge L^{-1}o'=d,$$
$$a\vee e=a\vee(b\wedge L^{-1}o')=b\wedge(a\vee L^{-1}o')=b,$$

car

$$a\vee L^{-1}o'=L^{-1}La=L^{-1}Lb\geqq b.$$

$c\oplus d=e$ entraîne donc $b=a\oplus c$, où $\oplus$ représente l'union directe, c'est-à-dire $a\oplus c$ représente $a\vee c$ quand $a\wedge c=o$.

Puisque $c\leqq e\leqq L^{-1}o'$, on a

$$Lc\leqq LL^{-1}o'=o',$$

d'où $Lc=o'$.

Nous allons montrer que les quatre conditions 1°, 2°, 3°, 4° sont suffisantes pour qu'il existe le $\wedge$-homomorphisme dual de L, c'est-à-dire on a la proposition

3.1 *Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont des treillis modulaires complets et complémentés, les quatre conditions 1°, 2°, 3°, 4° entraînent l'existence du $\wedge$-homomorphisme dual de L.*

Nous définissons L^{-1} par

$$L^{-1}x'=\sup\{y;\ Ly\leqq x'\}.$$

Puisque $Lo=o'$, l'ensemble $\{y;\ Ly\leqq x'\}$ n'est pas vide et, d'après la complétesse, $L^{-1}x'$ est défini pour tous les éléments $x'\in\mathfrak{M}'$. D'après la fortesse du $\vee$-homomorphisme, on a

$$LL^{-1}x'=\sup\{Ly;\ Ly\leqq x'\},$$

d'où

$$LL^{-1}x'\leqq x'\wedge Lu.$$

D'après la condition 2°, il existe un élément y tel que

$$Ly=x'\wedge Lu.$$

La définition de $L^{-1}x'$ entraîne $y\leqq L^{-1}x'$. Par suite

$$LL^{-1}x' \geqq Ly = x' \wedge Lu.$$

Donc la condition II′ est remplie.

Si l'on pose $y = L^{-1}Lx$, on a $y \geqq x$ et puis $Ly \geqq Lx$. On a d'autre part

$$Ly = (LL^{-1})(Lx) \leqq Lx.$$

On a donc $Lx = Ly$. D'après 4°, il existe un élément z tel que

$$y = x \oplus z, \quad Lz = o'.$$

La deuxième égalité entraîne $z \leqq L^{-1}o'$. On a donc

$$y \leqq x \vee L^{-1}o'.$$

Or la définition de L^{-1} entraîne immédiatement

$$y \geqq x \vee L^{-1}o'.$$

Donc la condition II est remplie.

Si l'on pose $x = L^{-1}x'$, $y = L^{-1}y'$, on a

$$Lx \leqq x', \quad Ly \leqq y'.$$

Par suite,

$$L(x \wedge y) \leqq Lx \wedge Ly \leqq x' \wedge y',$$

d'où

$$x \wedge y \leqq L^{-1}(x' \wedge y').$$

Or on a évidemment

$$x \wedge y \geqq L^{-1}(x' \wedge y').$$

La condition I′ est donc remplie.

4. Produits des systèmes duals. Considérons deux systèmes duals L, L^{-1} et K, K^{-1}, les domaines de définition étant $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ pour le premier et $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ pour le second. Alors KL est une application de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}''$ et $L^{-1}K^{-1}$ une application de $\mathfrak{M}''$ dans $\mathfrak{M}$. Nous allons montrer que KL et $L^{-1}K^{-1}$ forment un système dual.

Il est clair que KL est un $\vee$-homomorphisme et $L^{-1}K^{-1}$ un $\wedge$-homomorphisme.

On a d'autre part

$$\begin{aligned} L^{-1}K^{-1}KLx &= L^{-1}(K^{-1}K)Lx \\ &= L^{-1}(Lx \vee K^{-1}o'') \wedge L^{-1}Lu \\ &= L^{-1}((Lx \vee K^{-1}o'') \wedge Lu) \\ &= L^{-1}(Lx \vee (K^{-1}o'' \wedge Lu)) \\ &= L^{-1}(Lx \vee LL^{-1}K^{-1}o'') \\ &= L^{-1}L(x \vee L^{-1}K^{-1}o'') \\ &= x \vee L^{-1}K^{-1}o'' \vee L^{-1}o' \\ &= x \vee L^{-1}K^{-1}o''. \end{aligned}$$

où o'' est l'élément nul de $\mathfrak{M}''$.

Par dualité on obtient

$$KLL^{-1}K^{-1}x''=x''\wedge KLu.$$

Par suite, KL et $L^{-1}K^{-1}$ forment un système dual, de sorte que l'on a

$$(KL)^{-1}=L^{-1}K^{-1}.$$

Si en particulier $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}'$, on a

$$(L^2)^{-1}=(LL)^{-1}=L^{-1}L^{-1}=L^{-2}.$$

D'une manière générale on a

$$(L^n)^{-1}=\underbrace{L^{-1}L^{-1}\cdots L^{-1}}_{n}=L^{-n}.$$

II. Sous-treillis distributifs.

5. Sous-treillis engendré par deux chaines. Soient A et B deux chaînes dans un treillis modulaire $\mathfrak{M}$. Nous désignerons par $a, a_1, a_2, \cdots, a_1', a_2', \cdots$ des éléments de A et par $b, b_1, b_2, \cdots, b_1', b_2', \cdots$ des éléments de B.

On a d'abord

$$a\wedge(b_1\vee\cdots\vee b_n)=(a\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a\wedge b_n), \tag{5.1}$$

car, si b_n est le plus grand des éléments $b_1, \cdots, b_n$, les deux membres coïncident avec $a\wedge b_n$.

Démontrons la relation

$$a\wedge((a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n))=(a\wedge a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a\wedge a_n\wedge b_n). \tag{5.2}$$

Il est clair que le premier membre est un majorant du second.

Supposons par exemple que l'on ait

$$a_1\leqq\cdots\leqq a_m\leqq a\leqq a_{m+1}\leqq\cdots\leqq a_n.$$

Le second membre peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}(a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_m\wedge b_m)\vee(a\wedge b_{m+1})\vee\cdots\vee(a\wedge b_m)\\ =(a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_m\wedge b_m)\wedge(a\wedge(b_{m+1}\vee\cdots\vee b_n))\\ =a\wedge((a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_m\wedge b_m)\vee b_{m+1}\vee\cdots\vee b_n).\end{aligned}$$

On en voit que le second membre de (5.2) est un majorant du premier. La relation (5.2) est donc démontrée.

On a de même

$$b\wedge((a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n))=(a_1\wedge b\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b\wedge b_n). \tag{5.2)'$$

En appliquant successivement les formules (5.2) et (5.2)′ on obtient

(5.3) $$(a\wedge b)\wedge((a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n))=(a\wedge a_1\wedge b\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a\wedge a_n\wedge b\wedge b_n).$$

Démontrons enfin que

(5.4) $$((a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n))\wedge((a'_1\wedge b'_1)\vee\cdots\vee(a'_m\vee b'_m))$$

coïncide avec l'union des éléments

(5.5) $$a_j\wedge b_j\wedge a'_k\wedge b'_k,\quad (j=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,m).$$

Le cas de $m=n=1$ est trivial. Si $m+n=3$, l'un des entiers m et n est égal à 1 et le fait est déjà démontré. Supposons donc le fait démontré dans le cas où le nombre $m+n$ est diminué d'une unité.

Supposons d'abord que l'on ait $a_1=a'_1$, $b_1\geqq b'_1$. On a alors

$$(a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n)\geqq a'_1\wedge b'_1,$$

et, d'après la modularité, l'élément (5.4) est égal à l'union de $a'_1\wedge b'_1$ et de

$$((a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n))\wedge((a'_2\wedge b'_2)\vee\cdots\vee(a'_m\wedge b'_m)).$$

Celui-ci est d'après l'hypothèse égal à l'union des éléments

$$a_j\wedge b_j\wedge a'_k\wedge b'_k\quad (j=1,\cdots,n;\ k=2,\cdots,m).$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}a'_1\wedge b'_1&=((a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n))\wedge(a'_1\wedge b'_1)\\&=(a_1\wedge b_1\wedge a'_1\wedge b'_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n\wedge a'_1\wedge b'_1).\end{aligned}$$

Le fait à démontrer est donc vérifié si $a_1=a'_1$.

A étant une chaîne, nous pouvons supposer

$$a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_n,\quad a'_1\geqq a'_2\geqq\cdots a'_m.$$

Supposons par exemple $a_1<a'_1$. L'élément (5.4) peut s'écrire

$$\begin{aligned}&a_1\wedge((a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n))\wedge((a'_1\wedge b'_1)\vee\cdots\vee(a'_m\wedge b'_m))\\&\quad=((a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n))\wedge((a''_1\wedge b'_1)\vee\cdots\vee(a''_m\wedge b'_m)),\end{aligned}$$

où

$$a''_1=a'_1\wedge a_1,\cdots,a''_m=a'_m\wedge a_1.$$

Or on a $a''_1=a_1$. L'élément (5.4) coïncide donc avec l'union des éléments

$$a_j\wedge b_j\wedge a''_k\wedge b'_k,\quad (j=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,m).$$

Par suite l'élément (5.4) est un minorant de l'union des éléments (5.5). Mais on a évidemment la relation d'ordre inverse.

Le fait à démontrer est donc vérifié dans tous les cas. Par suite

5.1 *Si* $a_1,\cdots,a_n$, $a'_1,\cdots,a'_m$ *appartiennent à une chaîne* A *et* $b_1,\cdots,b_n$, $b'_1,\cdots,b'_m$ *à une chaîne* B, *l'élément* (5.4) *est l'union des éléments* (5.5).

On peut en conclure que l'élément x du sous-treillis $\mathfrak{M}'$ engendré par deux chaînes A et B peut s'écrire sous la forme

$$x=(a_1\wedge b_1)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b_n).$$

Pour démontrer que $\mathfrak{M}'$ est distributif, considérons deux autres éléments

$$y=(a'_1\wedge b'_1)\vee\cdots\vee(a'_m\wedge b'_m),$$
$$z=(a''_1\wedge b''_1)\vee\cdots\vee(a''_l\wedge b''_l).$$

D'après 5.1, les deux membres de

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$

coïncident avec l'union des éléments

$$a_i\wedge b_i\wedge a'_j\wedge b'_j,\quad (i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m),$$
$$a_i\wedge b_i\wedge a''_k\wedge b''_k,\quad (i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,l).$$

Par suite,

5.2. *Le sous-treillis engendré par deux chaînes est distributif.*

6. $\vee$-indépendance. Si

$$a\wedge(a_1\vee\cdots\vee a_n)=o,$$

nous dirons que a est $\vee$-indépendant des éléments $a_1,\cdots,a_n$. Si l'un quelconque des n éléments est $\vee$-indépendant des $n-1$ autres, nous dirons qu'ils sont $\vee$-*indépendants* les uns des autres. Dans ce cas leur union s'appelle l'*union directe* et s'écrit

$$a_1\oplus\cdots\oplus a_n.$$

Comme nous avons déjà démontré, les relations

$$(a_1\vee\cdots\vee a_j)\wedge a_{j+1}=0,\quad (j=1,\cdots,n-1),$$

entraînent la $\vee$-indépendance des n éléments $a_1,\cdots,a_n$ et on a

$$(a_{j_1}\oplus\cdots\oplus a_{j_k})\wedge(a_{j_{k+1}}\oplus\cdots\oplus a_{j_n})=0,$$

$j_1,\cdots,j_n$ représentant une permutation quelconque de $1,2,\cdots,n$.

Soit A une partie de $\mathfrak{M}$. Si une partie finie quelconque de A est formée des éléments $\vee$-indépendants, A s'appelle *famille libre.*

6.1 *Une famille libre* A *engendre un sous-treillis distributif dont les éléments sont des unions directes des éléments de* A.

Considérons deux éléments

$$a=a_1\oplus\cdots\oplus a_n,\quad b=b_1\oplus\cdots\oplus b_m,$$

où $a_1,\cdots,a_n$, $b_1,\cdots,b_m$ sont des éléments de A. On peut supposer que $a_1=b_1,\cdots,a_r=b_r$ et que $a_{r+1},\cdots,a_n$, $b_{r+1},\cdots,b_m$ soient différents les uns des autres.

On a alors

$$a\vee b=a_1\oplus\cdots\oplus a_n\oplus b_{r+1}\oplus\cdots\oplus b_m.$$

Si l'on pose

$$b'=b_1\oplus\cdots\oplus b_r,\quad b''=b_{r+1}\oplus\cdots\oplus b_m,$$

on a $a\geqq b'$ et la modularité entraîne

$$a\wedge b=b'\vee(a\wedge b'').$$

$a_1,\cdots,a_n$, $b_{r+1},\cdots,b_m$ étant indépendants les uns des autres, on a $a\wedge b''=o$. Par suite, on a

$$a\wedge b=a_1\oplus\cdots\oplus a_r.$$

Par conséquent, les éléments du sous-treillis $\mathfrak{M}'$ engendré par A sont des unions directes des éléments de A.

Considérons un autre élément de $\mathfrak{M}'$:

$$c=c_1\oplus\cdots\oplus c_l,$$

$c_1,\cdots,c_l$ appartenant à A. Nous pouvons supposer que

$$c=c'\oplus c'',\ c'\leqq a,\ c''\wedge a=o.$$

On a alors

$$a\wedge b=b',\ a\wedge c=c'$$

de sorte que

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=b'\vee c'.$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}a\wedge(b\vee c)&=a\wedge((b'\vee c')\vee(b''\vee c'')\\&=(b'\vee c')\vee(a\wedge(b''\vee c'')).\end{aligned}$$

$b''\vee c''$ est l'union directe des éléments différents de $a_1,\cdots,a_n$. On a donc

$$a\wedge(b''\vee c'')=o.$$

On a par suite la distributivité

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c).$$

Remarquons en passant que a et $b(\geqq a)$ étant donnés dans un treillis distributif $\mathfrak{M}$, il n'existe qu'un élément c tel que

$$a \oplus c = b.$$

Supposons que l'on ait

$$a \oplus c' = b.$$

On a alors

$$c = b \wedge c = (a \vee c') \wedge c = (a \wedge c) \vee (c' \wedge c) = c' \wedge c.$$

On a de même $c' = c' \wedge c$. On a par suite $c = c'$.

L'élément c étant déterminé d'une manière unique, nous le désignerons par $b \ominus a$.

6.2 *Si tous les éléments d'un treillis distributif complémenté $\mathfrak{M}$ sont de hauteur fini, $\mathfrak{M}$ est engendré par une famille libre.*

En effet, désignons par A l'ensemble des éléments de hauteur 1. Si $a_1, \cdots, a_n$ et a sont des éléments de A différents les uns des autres, on a

$$a \wedge (a_1 \vee \cdots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \cdots \vee (a \wedge a_n) = o.$$

A est donc une famille libre. A engendre un sous-treillis distributif $\mathfrak{M}'$. Il faut montrer que l'on a $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$.

Considérons un élément quelconque $a \in \mathfrak{M}$. Le hauteur n de a étant fini, on peut trouver une chaîne maximale de longueur n: $o = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n = a$. On a alors

$$a = a_1 \oplus (a_2 \ominus a_1) \oplus \cdots \oplus (a \ominus a_{n-1})$$

et les éléments $a_1, a_2 \ominus a_1, \cdots, a_n \ominus a_{n-1}$ sont de hauteur 1. On a donc nécessairement $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$.

7. Sous-treillis distributif. Considérons un sous-treillis distributif $\mathfrak{M}'$ d'un treillis modulaire complémenté $\mathfrak{M}$. Nous supposons que les éléments de $\mathfrak{M}'$ soient de hauteur fini dans $\mathfrak{M}'$. Il existe alors l'élément minimum e dans $\mathfrak{M}'$. Soit A_1 l'ensemble des éléments de hauteur 1 dans $\mathfrak{M}'$. $\mathfrak{M}$ étant supposé complémenté, on peut faire correspondre à chaque élément a' de A_1 un élément e' tel que $a' = e \oplus e'$. Nous désignons par E_1 l'ensemble des éléments e'.

Considérons n éléments $e'_1, \cdots, e'_n$ de E_1 auxquels correspondent n éléments $a'_1, \cdots, a'_n$ de A_1. On a alors

$$(a'_1 \vee \cdots \vee a'_j) \wedge a'_{j+1} = (a'_1 \wedge a'_{j+1}) \vee \cdots \vee (a'_j \wedge a'_{j+1}) = e$$

et

$$a'_{j+1}=e\oplus e'_{j+1}.$$

On a donc

$$(a'_1\vee\cdots\vee a'_j)\wedge e'_{j+1}=o,$$

qui peut encore s'écrire

$$(e\vee e'_1\vee\cdots\vee e'_j)\wedge e'_{j+1}=o.$$

Par suite $e, e'_1,\cdots, e'_n$ sont $\vee$-indépendants les uns des autres. $E_0\cup E_1$, où E_0 est l'ensemble formé d'un seul élément e, est donc une famille libre.

Soit $\mathfrak{M}_1$ le sous-treillis engendré par $E_0\cup E_1$. Si $\mathfrak{M}'$ n'est pas une partie de $\mathfrak{M}_1$, nous désignons par $\mathfrak{M}'_1$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}'$ qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{M}_1$, et par A_2 l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}'_1$ qui ont le hauteur minimum $h_2(>h_1=1)$ dans $\mathfrak{M}'$. Il existe dans $\mathfrak{M}'$ au moins un élément b'' de hauteur h_2-1 qui est un minorant de $a''\in A_2$. S'il y avait un autre élément b''_1 ayant la même propriété, on aurait

$$a''=b''\vee b''_1$$

et a'' appartiendrait à $\mathfrak{M}_1$. L'élément correspondant b'' est donc unique.

On peut faire correspondre à a'' un élément e'' tel que $a''=e''\oplus b''$. Nous désignons par E_2 l'ensemble des éléments e''. A m éléments $a''_1,\cdots, a''_m$ de A_2 correspondent m éléments $e''_1,\cdots, e''_m$ de E_2 tels que

$$a''_j=e''_j\oplus b''_j,\quad (j=1,\cdots, m),$$

les b''_j appartenant à $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}'$. Soient d'autre part $e'_1,\cdots, e'_n$ n éléments quelconques de E_1. On a évidemment

$$(a'_1\vee\cdots\vee a'_n\vee a''_1\vee\cdots\vee a''_{j-1}\vee b''_j)\wedge a''_j=b''_j.$$

On a par suite

$$(a'_1\vee\cdots\vee a'_n\vee a''_1\vee\cdots\vee a''_{j-1}\vee b''_j)\wedge e''_j=o,$$

d'où

$$(e\vee e'_1\vee\cdots\vee e'_n\vee e''_1\vee\cdots\vee e''_{j-1})\wedge e''_j=o.$$

Par suite $e, e'_1,\cdots, e'_n, e''_1,\cdots, e''_m$ sont $\vee$-indépendants les uns des autres. On en conclut que $E_0\cup E_1\cup E_2$ est une famille libre. Désignons par $\mathfrak{M}_2$ le sous-treillis distributif engendré par $E_0\cup E_1\cup E_2$. Si $\mathfrak{M}'$ n'est pas une partie de $\mathfrak{M}_2$, nous désignons par $\mathfrak{M}'_2$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}'$ qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{M}_2$, et par A_3 l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}'$ qui ont le hauteur minimum $h_3(>h_2)$ dans $\mathfrak{M}'$. Si $a^{(3)}$ est un élément de A_3, son minorant b de hauteur h_3-1 dans $\mathfrak{M}'$ se trouve dans $\mathfrak{M}_2$. Il se détermine d'une manière unique. Nous pouvons écrire

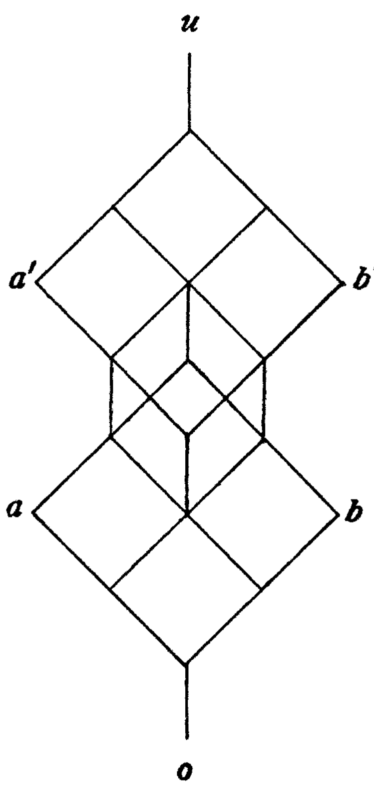
$$a^{(3)}=b^{(3)}\oplus e^{(3)}.$$

Nous désignons par E_3 l'ensemble des éléments $e^{(3)}$. $E_0\cup E_1\cup E_2\cup E_3$ est une famille libre. Elle engendre un sous-treillis distributif $\mathfrak{M}_3$.

Nous pouvons ainsi définir une suite finie ou infinie d'ensembles $\{E_n\}$ de manière que la réunion $E_0\cup E_1\cup E_2\cup\cdots$ soit une famille libre. Elle engendre un sous-treillis qui contient $\mathfrak{M}'$. Nous pouvons donc énoncer la proposition

7.1 *Un sous-treillis distributif $\mathfrak{M}'$ d'un treillis modulaire est une partie d'un sous-treillis engendré par une famille libre pourvu que les éléments de $\mathfrak{M}'$ soient de hauteur fini dans $\mathfrak{M}'$.*

8. Décomposition par deux chaines. Rappelons brièvement nos résultats antérieurs.



Le sous-treillis engendré par deux chaînes $o<a<a'<u$, $o<b<b'<u$ est formé en général de 20 éléments:

$o,\ u,\ a,\ a',\ b,\ b'$;
$a\vee b,\ a\vee b'\ a'\vee b,\ a'\vee b'$,
$a\wedge b,\ a\wedge b',\ a'\wedge b,\ a'\wedge b'$;
$a\vee(a'\wedge b),\ a\vee(a'\wedge b'),\ b\vee(a\wedge b'),\ b\vee(a'\wedge b')$;
$(a\wedge b')\vee(a'\wedge b),\ a\vee b\vee(a'\wedge b')$.

Le diagramme représente ce sous-treillis.

Considérons maintenant deux chaînes:

$$u=a^0>a^1>\cdots>a^m=o,$$
$$o=b_0<b_1<\cdots<b_n=u.$$

Ils engendrent un sous-treillis distributif $\mathfrak{M}'$ formé d'un nombre fini d'éléments. $\mathfrak{M}'$ est donc une partie d'un sous-treillis engendré par une famille libre E. Elle est formé des éléments e_k^j satisfaisant aux relations

$$a^j\wedge a_k=e_k^j\oplus((a^{j+1}\wedge b_k)\vee(a^j\wedge b_{k-1}),$$
$$(j=0,1,\cdots,m-1;\ k=1,2,\cdots,n)$$

et on a

$$a^j=e_1^j\oplus e_2^j\oplus\cdots\oplus e_n^j\oplus a^{j+1},\qquad (j=0,1,\cdots,m-1),$$
$$b_k=e_k^0\oplus e_k^1\oplus\cdots\oplus e_k^{m-1}\oplus e_{k-1},\qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

On obtient donc le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{cccc}
e_1^0 & e_2^0 & \cdots & e_n^0 \\
e_1^1 & e_2^1 & \cdots & e_n^1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e_1^{m-1} & e_2^{m-1} & \cdots & e_n^{m-1}
\end{array}
\qquad
\left.\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a^{m-1} \end{array}\right\} a^1
\end{array}\right\} a^0$$

$$\underbrace{\underbrace{b_1 \quad \vdots}_{b_2} \quad \vdots \quad \vdots}_{b_n}$$

III. Endomorphismes d'un treillis modulaire.

9. Théorèmes de Riesz. Soit $\mathfrak{M}$ un treillis modulaire et pourvu de l'élément nul o et de l'élément universel u, et considérons un système dual formé d'un $\vee$-endomorphisme K de $\mathfrak{M}$ et d'un $\wedge$-endomorphisme K^{-1} de $\mathfrak{M}$. Par suite, les conditions suivantes sont supposées remplies:

I. $K(x\vee y)=Kx\vee Ky$; I'. $K^{-1}(x\wedge y)=K^{-1}x\wedge K^{-1}y$;

II. $K^{-1}Kx=x\vee K^{-1}o$; II'. $KK^{-1}x=x\wedge Ku$.

Nous posons

$$k^n=K^n u, \qquad k_n=K^{-n}o.$$

$u=k^0, k^1, k^2, \cdots$ forment une chaîne descendante tandis que $o=k_0, k_1, k_2, \cdots$ une chaîne ascendante. Nous définissons les entiers μ, ν par

$$\mu=\inf\{n;\ k^n=k^{n+1}\},\quad \nu=\inf\{n;\ k_n=k_{n+1}\}.$$

S'il n'existe pas de n tel que $k^n=k^{n+1}$, nous posons $\mu=\infty$. De même, $\nu=\infty$ signifie que l'on a $k_n<k_{n+1}$ pour tous les entiers positifs n. Si μ est fini, on a $k^n>k^{n+1}$ pour $n<\mu$ et $k^n=k^{n+1}$ pour $n\geqq\mu$. De même, si ν est fini, on a $k_n<k_{n+1}$ pour $n<\nu$ et $k_n=k_{n+1}$ pour $n\geqq\nu$.

Nous avons les propositions suivantes.

9.1 $\mu=0$ *entraîne* $\nu=0$ *ou* $\nu=\infty$.

9.1' $\nu=0$ *entraîne* $\mu=0$ *ou* $\mu=\infty$.

9.2 $k^1\vee k_1=u$ *entraîne* $\nu\leqq 1$ *ou* $\nu=\infty$.

9.2' $k^1\wedge k_1=o$ *entraîne* $\mu\leqq 1$ *ou* $\mu=\infty$.

9.3 $k^1\vee k_1=u$ *entraîne* $\mu\leqq 1$, *et réciproquement.*

9.3' $k^1\wedge k_1=o$ *entraîne* $\nu\leqq 1$, *et réciproquement.*

On en déduit la proposition

9.4 *Si μ et ν sont finis et si $n>0$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes l'une à l'autre:*

$$k^n=k^{n-1},\ k_n=k_{n+1},\ k^n\vee k_n=u,\ k^n\wedge k_n=o.$$

Puis on obtient la proposition

9.5 *Si μ et ν sont finis, on a*

$$\mu=\nu,\ k^\mu\oplus k_\mu=u.$$

10. Décomposition de k_ν.

Considérons le cas où μ et ν sont finis. Les deux chaînes $\{k^0, k^1,\cdots,k^\mu\}$ et $\{k_0, k_1,\cdots,k_\nu\}$ engendrent un sous-treillis distributif $\underline{\mathfrak{M}}$, dont tout élément peut se représenter sous la forme

$$(k^{i_1}\wedge k_{j_1})\vee(k^{i_2}\wedge k_{j_2})\vee\cdots\vee(k^{i_n}\wedge k_{j_n}).$$

Or on a

$$\begin{aligned}K(k^i\wedge k_j)&=K^{i+1}K^{-i}k_j\\&=K^{i+1}K^{-i-1}k_{j-1}\\&=k^{i+1}\wedge k_{j-1}.\end{aligned}$$

On a donc $K(\underline{\mathfrak{M}})\subseteq\underline{\mathfrak{M}}$. Par dualité, on a $K^{-1}(\underline{\mathfrak{M}})\subseteq\underline{\mathfrak{M}}$.

Désignons par $\underline{K}$ l'application K restreinte à $\underline{\mathfrak{M}}$ et par $\underline{K}^{-1}$ l'application K^{-1} restreinte à $\underline{\mathfrak{M}}$. $\underline{K}$ est un $\vee$-endomorphisme de $\underline{\mathfrak{M}}$ et $\underline{K}^{-1}$ un $\wedge$-endomorphisme de $\underline{\mathfrak{M}}$. x désignant un élément quelconque de $\underline{\mathfrak{M}}$, on a

$$\underline{K}^{-1}\underline{K}x=K^{-1}Kx=x\vee K^{-1}o=x\vee\underline{K}^{-1}o.$$

Par dualité on a

$$\underline{K}\underline{K}^{-1}x=x\wedge\underline{K}u.$$

On a donc la proposition

10.1 *Si μ et ν sont finis, les deux chaînes $\{k^0, k^1,\cdots,k^\mu\}$ et $\{k_0, k_1,\cdots,k_\nu\}$ engendrent un sous-treillis distributifs $\underline{\mathfrak{M}}$. Le restreint $\underline{K}$ de K à $\underline{\mathfrak{M}}$ et le restreint $\underline{K}^{-1}$ de K^{-1} à $\underline{\mathfrak{M}}$ forment un système dual.*

D'après la proposition **2.3**, $\underline{K}$ et $\underline{K}^{-1}$ sont des endomorphismes de $\underline{\mathfrak{M}}$. D'après nos résultats cités au numéro 8, on peut déterminer les éléments $\vee$-indépendants e_j^i $(i=0, 1,\cdots,\mu;\ j=1, 2,\cdots,\nu+1)$ de manière que l'on ait

$$\begin{aligned}&k^i=e_1^i\oplus\cdots\oplus e_{\nu+1}^i\oplus k^{i+1},\quad(i=0, 1,\cdots,\mu-1),\\&k^\mu=e_1^\mu\oplus\cdots\oplus e_{\nu+1}^\mu,\end{aligned}$$

$$k_j = e_j^0 \oplus \cdots \oplus e_j^\mu \oplus k_{j-1}, \qquad (j=1, 2, \cdots, \nu),$$
$$u = e_{\nu+1}^0 \oplus \cdots \oplus e_{\nu+1}^\mu \oplus k_\nu.$$

Les conditions auxquelles satisfont les e_j^i sont

$$k^i \wedge k_j = e_j^i \oplus ((k^{i+1} \wedge k_j) \vee (k^i \wedge k_{j-1}))$$

pour $i=0, 1, \cdots, \mu-1$; $j=1, 2, \cdots, \nu$. Les conditions auxquelles satisfont les e_j^μ, $e_{\nu+1}^i$ et $e_{\nu+1}^\mu$ s'écrivent

$$k^\mu \wedge k_j = e_j^\mu \oplus (k^\mu \wedge k_{j-1}), \qquad (j=1, 2, \cdots, \nu),$$
$$k^i = e_{\nu+1}^i \oplus (k^{i+1} \vee (k^i \wedge k_\nu)), \qquad (i=0, 1, \cdots, \mu-1),$$
$$k^\mu = e_{\nu+1}^\mu \oplus (k^\mu \wedge k_\nu).$$

Puisque $k^\mu \wedge k_\nu = o$, on a $e_{\nu+1}^\mu = k^\mu$. On a de plus

$$k^\mu \wedge k_j \leqq k^\mu \wedge k_\nu = o, \qquad (j=0, 1, \cdots, \nu).$$

Par suite, on a $e_j^\mu = o$ pour $j=1, 2, \cdots, \nu$.

Puisque

$$k^{i+1} \vee (k^i \wedge k_\nu) = k^i \wedge (k^{i+1} \vee k_\nu),$$
$$k^{i+1} \vee k_\nu \geqq k^\mu \vee k_\nu = u$$

pour $i=0, 1, \cdots, \mu-1$, on a $e_{\nu+1}^i = o$ pour $i=0, 1, \cdots, \mu-1$.

Comme nons avons déjà remarqué, on a

$$K(k^i \wedge k_j) = k^{i+1} \wedge k_{j-1}.$$

Par suite Ke_j^i satisfera à la condition à laquelle satisfait e_{j+1}^{i-1}:

$$k^{i+1} \wedge k_{j-1} = Ke_j^i \oplus ((k^{i+2} \wedge k_{j-1}) \vee (k^{i+1} \wedge k_{j-2})),$$

si

$$Ke_j^i \wedge ((k^{i+2} \wedge k_{j-1}) \vee (k^{i+1} \wedge k_{j-2})) = o.$$

En remarquent que K^{-1} restreint à $\mathfrak{M}$ est un endomorphisme et que l'on a

$$K^{-1}(k^i \wedge k_j) = K^{-1}k^i \wedge K^{-1}k_j = (k_1 \vee k^{i-1}) \wedge k_{j+1} = k_1 \vee (k^{i-1} \wedge k_{j+1}),$$

on peut transformer le premier membre comme il suit:

$$\begin{aligned} &Ke_j^i \wedge k^1 \wedge ((k^{i+2} \wedge k_{j-1}) \vee (k^{i+1} \wedge k_{j-2})) \\ &= KK^{-1}(Ke_j^i \wedge ((k^{i+2} \wedge k_{j-1}) \vee (k^{i+1} \wedge k_{j-2})) \\ &= K(K^{-1}Ke_j^i \wedge (K^{-1}(k^{i+2} \wedge k_{j-1}) \vee K^{-1}(k^{i+1} \wedge k_{j-2})) \\ &= K((k_1 \vee e_j^i) \wedge (k_1 \vee (k^{i+1} \wedge k_j) \vee (k^i \wedge k_{j-1})). \end{aligned}$$

Les éléments k^i, k_j, e_j^i appartenant au sous-treillis distributif engendré par les éléments e_j^i, celui-ci devient

$$K(k_1\vee(e_j^i\wedge((k^{i-1}\wedge k_j)\vee(k^i\wedge k_{j-1}))))=K(k_1\vee o)=Kk_1=o.$$

Par conséquent, on peut prendre

$$e_j^i=K^ie_{i+j}^0,$$

e_n^0 désignant un élément tel que

$$k_n=e_n^0\oplus(k_{n-1}\vee(k^1\wedge k_n)).$$

Puisque $e_n^0=o$ pour $n>\nu$, on a $e_j^i=o$ pour $i+j>\nu$. On a donc la conclusion

10.2 *k_ν est l'union directe des éléments $e_j^i(i=0, 1,\cdots,\nu-1\,;\ j=1, 2,\cdots,\nu\,;\ i+j\leqq\nu)$ tels que*

$$e_j^i=K^ie_{i+j}^0,\quad k_n=e_n^0\oplus(k_{n-1}\vee(k^1\wedge k_n)).$$

11. Systèmes duals permutables. Nous désignons par μ_K, ν_K les entiers μ, ν relatifs à un système dual (K, K^{-1}) s'il est nécessaire de montrer qu'ils dépendent de (K, K^{-1}). S'ils sont finis, ils sont égaux. Dans ce cas, nous désignerons par $[k]$ la valeur commune $\mu_K=\nu_K$.

Cela posé, considérons deux systèmes duals (K, K^{-1}) et (H, H^{-1}). Si $HK=KH$, on a

$$H^{-1}K^{-1}=(KH)^{-1}=(HK)^{-1}=K^{-1}H^{-1}$$

de sorte que $H^{-1}K^{-1}=K^{-1}H^{-1}$. Dans ce cas, nous dirons que les deux systèmes duals (K, K^{-1}) et (H, H^{-1}) sont permutables. K^mH^nu, $K^{-m}H^{-n}o$ seront représentés par k^mh^n, k_mh_n et la valeur $\mu_{K^mH^n}=\nu_{K^mH^n}$ par $[k^mh^n]$.

On a évidemment

$$K(k^m\wedge k_n\wedge h^p\wedge h_q)\leqq k^{m+1}\wedge k_{n-1}\wedge h^p\wedge h_q, \tag{11.1}$$

$$K^{-1}(k^m\vee k_n\vee h^p\vee h_q)\geqq k^{m-1}\vee k_{n+1}\vee h^p\vee h_q. \tag{11.1$'$}$$

Considérons le cas particulier où l'on a $[h]\leqq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} k^n&=K^n(h^1\oplus h_1)\\ &=K^nh^1\oplus K^nh_1\\ &\leqq(k^n\wedge h^1)\oplus(k^n\wedge h_1)\leqq k^n, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$k^n=(k^n\wedge h^1)\oplus(k^n\wedge h_1).$$

Comme on a

$$\begin{aligned} k^{n+1}&=Kk^n\\ &=K(k^n\wedge h^1)\oplus K(k^n\wedge h_1) \end{aligned}$$

et

$$K(k^n \wedge h^1) \leqq k^{n+1} \wedge h^1, \quad K(k^n \wedge h_1) \leqq k^{n+1} \wedge h_1,$$

on obtient

$$K(k^n \wedge h^1) = k^{n+1} \wedge h^1, \quad K(k^n \wedge h_1) = k^{n+1} \wedge h_1.$$

D'une manière plus générale, on a

$$k^n = (k^n \wedge h^{[h]}) \oplus (k^n \wedge h_{[h]}), \tag{11.2}$$

$$K(k^n \wedge h^{[h]}) = k^{n+1} \wedge h^{[h]}, \tag{11.3}$$

$$K(k^n \wedge h_{[h]}) = k^{n+1} \wedge h_{[h]}. \tag{11.4}$$

On en déduit

$$K^{[k]} h^{[h]} = K(k^{[k]} \wedge h^{[h]}) = k^{[k]} \wedge h^{[h]}, \tag{11.5}$$

$$K^{[k]} h_{[h]} = K(k^{[k]} \wedge h_{[h]}) = k^{[k]} \wedge h_{[h]}. \tag{11.6}$$

Puisque

$$\begin{aligned} k_{[k]} \oplus (k^{[k]} \wedge h_{[h]}) &= K^{-[k]} K^{[k]} (k^{[k]} \wedge h_{[h]}) \\ &= K^{-[k]} (k^{[k]} \wedge h_{[h]}) \\ &= K^{-[k]} k^{[k]} \wedge K^{-[k]} h_{[h]} \geqq h_{[h]}, \end{aligned}$$

on a

$$h_{[h]} = h_{[h]} \wedge (k_{[k]} \oplus (k^{[k]} \wedge h_{[h]}))$$

et la modularité entraîne

$$h_{[h]} = (h_{[h]} \wedge k_{[k]}) \oplus (k^{[k]} \wedge h_{[h]}).$$

On a donc

$$k^{[k]} = (k^{[k]} \wedge h^{[h]}) \oplus (k^{[k]} \wedge h_{[h]}), \tag{11.7}$$

$$k_{[k]} = (k_{[k]} \wedge h^{[h]}) \oplus (k_{[k]} \wedge h_{[h]}). \tag{11.8}$$

et les quatre éléments $k^{[k]} \wedge h^{[h]}$, $k^{[k]} \wedge h_{[h]}$, $k_{[k]} \wedge h^{[h]}$, $k_{[k]} \wedge h_{[h]}$ sont $\vee$-indépendants.

Si n est supérieur ou égal à $[k]$ et $[h]$, on a

$$(kh)^n = k^n h^n = K^n h^{[h]} = k^{[k]} \wedge h^{[h]}.$$

Par dualité on obtient

$$\begin{aligned} (kh)^{-n} &= k_{[k]} \vee h_{[h]} \\ &= (k_{[k]} \wedge h_{[h]}) \oplus (k_{[k]} \wedge h^{[h]}) \oplus (k^{[k]} \wedge h_{[h]}). \end{aligned}$$

On a donc

$$(kh)^n \oplus (kh)_n = u$$

et puis

(11.9) $$[kh] \leqq \max\{[k], [h]\}.$$

En résumant les résultats, nous obtenons la proposition

11.1 *Si les deux systèmes duals* (K, K^{-1}) *et* (H, H^{-1}) *sont permutables, on a les relations* (11.1) *et* (11.1)′ *pour tous les entiers non négatifs* m, n, p, q. *Si de plus les entiers* $\mu_K, \nu_K, \mu_H, \nu_H$ *sont finis, on a les relations* (11.2—9) *et*

(11.10) $$(kh)^n = k^{[k]} \wedge h^{[h]},$$

(11.11) $$(kh)_n = k_{[k]} \vee h_{[h]}$$

pour $n \geqq \max\{[k], [h]\}$.

(11.10) et (11.11) entraînent

$$(kh)^n \oplus (kh)_n = u.$$

Par suite,

11.2 *Si les deux systèmes duals* (K, K^{-1}), (H, H^{-1}) *sont permutables et tels que* $\mu_K, \nu_K, \mu_H, \nu_H$ *soient finis, on a*

(11.12) $$[kh] \leqq \max\{[k], [h]\}.$$

12. Systèmes duals premiers entre eux. Considérons deux systèmes duals permutables (K, K^{-1}) et (H, H^{-1}). Nous dirons qu'ils sont *premiers* entre eux si l'on a

$$k^{[k]} \vee h^{[h]} = u, \qquad k_{[k]} \wedge h_{[h]} = o.$$

On a alors la proposition

12.1 *Si* (K, K^{-1}) *et* (H, H^{-1}) *sont des systèmes duals permutables tels que les entiers* $\mu_K, \nu_K, \mu_H, \nu_H$ *soient finis, les cinq conditions suivantes sont équivalentes l'une à l'autre*:

(i) (K, K^{-1}) et (H, H^{-1}) sont premiers entre eux;

(ii) $k^{[k]} \vee h^{[h]} = u$;

(iii) $k_{[k]} \wedge h_{[h]} = o$;

(iv) $k^{[k]} \geqq h_{[h]}$;

(v) $k_{[k]} \leqq h^{[h]}$.

En effet, on a les relations (11.7), (11.8). Alors (ii) entraîne (iii) et réciproquement. (iii) entraîne (iv) et réciproquement. De même, (v) est équivalente à (iii). Or (i) est équivalente à l'ensemble des deux conditions (ii) et (iii). On a donc la conclusion de la proposition.

12.2 *Soient* (K, K^{-1}) *et* (H, H^{-1}) *des systèmes duals permutables. Si l'on a*

$$k^{[kh]} \vee h^{[kh]} = u, \qquad k_{[kh]} \wedge h_{[kh]} = o,$$

on a $[k] \leqq [kh]$, $[h] \leqq [kh]$, *et* (K, K^{-1}) *et* (H, H^{-1}) *sont premiers entre eux.*

Il suffit de considérer le cas de $[kh] \leqq 1$, car il suffit de considérer $K^{[kh]}$, $H^{[kh]}$ au lieu de K, H.

On voit facilement

$$\begin{aligned} k^1 &= K((kh)^1 \oplus (kh)_1) \\ &= K(kh)^1 \oplus K(kh)_1 \\ &\leqq (kh)^1 \oplus (k^1 \wedge h_1) \leqq k^1. \end{aligned}$$

On a donc

$$k^1 = (kh)^1 \oplus (k^1 \wedge h_1).$$

Or on a

$$\begin{aligned} u &= (kh)^1 \oplus (kh)_1 \\ &\geqq (kh)^1 \oplus (k^1 \wedge h_1) \oplus (k_1 \wedge h^1) \\ &= ((kh)^1 \oplus (k^1 \wedge h_1)) \vee ((kh)^1 \oplus (k_1 \wedge h^1)) \\ &= k^1 \vee h^1 = u. \end{aligned}$$

On en déduit

$$u = (kh)^1 \oplus (k^1 \wedge h_1) \oplus (k_1 \wedge h^1),$$
$$(kh)_1 = (k^1 \wedge h_1) \oplus (k_1 \wedge h^1).$$

Par dualité, on obtient

$$(kh)^1 = (k^1 \wedge h_1) \odot (k_1 \wedge h^1).$$

En remarquant

$$(kh)^1 \leqq k^1 \wedge h^1 \leqq (k^1 \vee h_1) \odot (k_1 \vee h^1),$$

on obtient

$$(kh)^1 = k^1 \wedge h^1.$$

On a par suite

$$k^1 = (k^1 \wedge h^1) \oplus (k^1 \wedge h_1),$$
$$u = (k^1 \wedge h^1) \oplus (k^1 \wedge h_1) \oplus (k_1 \wedge h^1),$$

d'où l'on déduit

$$k^1 \vee k_1 = u.$$

Par dualité, on obtient

$$k^1 \wedge k_1 = o.$$

On a par conséquent $[k] \leqq 1$. On a de même $[h] \leqq 1$.

La proposition est donc établie.

Si les deux systèmes duals (K, K^{-1}) et (H, H^{-1}) sont permutables, on a l'inégalité (11.12). S'ils sont premiers entre eux, la proposition **12.2** est applicable, et on a l'inégalité

$$[kh] \geqq \max\{[k], [h]\}.$$

On a donc la proposition

12.3 *Si les systèmes duals (K, K^{-1}) et (H, H^{-1}) sont premiers entre eux, on a*

(12.1) $$[kh] = \max\{[k], [h]\}.$$

13. Ensemble des systèmes duals premiers entre eux. Soient (H, H^{-1}), (K, K^{-1}), (L, L^{-1}) des systèmes duals premiers entre eux. On a alors (12.1). Si donc on pose $n = [hk]$, $m = [l]$, on a

$$\begin{aligned} u &= h_n \oplus k_n \oplus (h^n \wedge k^n), \\ l^m &= L^m h_n \oplus L^m k_n \oplus L^m (h^n \wedge k^n) \\ &\leqq (h_n \wedge l^m) \oplus (k_n \wedge l^m) \oplus (h^n \wedge k^n \wedge l^m) \\ &\leqq h_n \oplus k_n \oplus (h^n \wedge k^n \wedge l^m) \leqq l^m. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} l^m &= h_n \oplus k_n \oplus (h^n \wedge k^n \wedge l^m), \\ u &= h_n \oplus k_n \oplus l_m \oplus (h^n \wedge k^n \wedge l^m). \end{aligned}$$

Par suite $h_{[h]}$, $k_{[k]}$, $l_{[l]}$ sont $\vee$-indépendants. Par dualité $h^{[h]}$, $k^{[k]}$, $l^{[l]}$ sont $\wedge$-indépendants.

Puisque

$$(hk)_{[hk]} = h_{[h]} \oplus k_{[k]},$$

on a

$$(hk)_{[hk]} \wedge l_{[l]} = o.$$

Par dualité on a

$$(hk)^{[hk]} \vee l^{[l]} = u.$$

Par suite $(HK, (HK)^{-1})$ et (L, L^{-1}) sont premiers entre eux, et on a

$$\begin{aligned} (HKL)_{[hkl]} &= h_{[h]} \oplus k_{[k]} \oplus l_{[l]}, \\ (HKL)^{[hkl]} &= h^{[h]} \odot k^{[k]} \odot l^{[l]}, \\ u &= h_{[h]} \oplus k_{[k]} \oplus l_{[l]} \oplus (h^{[h]} \odot k^{[k]} \odot l^{[l]}). \end{aligned}$$

D'une manière générale, on peut démontrer par récurrence la proposition

13.1 *Soient* $(F, F^{-1}), \cdots, (H, H^{-1}), (K, K^{-1}), (L, L^{-1}), \cdots, (S, S^{-1})$ *des systèmes duals premiers entre eux. Alors* $(F\cdots HK, (F\cdots HK)^{-1})$ *et* $(L\cdots S, (L\cdots S)^{-1})$ *sont premiers entre eux, et on a*

$$[f\cdots hkl\cdots s]=\max\{[f], \cdots, [h], [k], [l], \cdots, [s]\}, \tag{13.1}$$

$$(f\cdots hkl\cdots s)_{[f\cdots s]}=f_{[f]}\oplus\cdots\oplus h_{[h]}\oplus k_{[k]}\oplus l_{[l]}\oplus\cdots\oplus s_{[s]}, \tag{13.2}$$

$$(f\cdots hkl\cdots s)^{[f\cdots s]}=f^{[f]}\odot\cdots\odot h^{[h]}\odot k^{[k]}\odot l^{[l]}\odot\cdots\odot s^{[s]}. \tag{13.3}$$

En effet, supposons la proposition établie lorsque le nombre des systèmes duals est moindre que celui des systèmes duals $(F, F^{-1}), \cdots, (S, S^{-1})$. Alors $(F\cdots H, (F\cdots H)^{-1}), (K, K^{-1}), (L\cdots S, (L\cdots S)^{-1})$ sont premiers entre eux. On a déjà démontré la proposition lorsque le nombre des systèmes duals est 3. Par suite $(F\cdots HK, (F\cdots HK)^{-1})$ et $(L\cdots S, (L\cdots S)^{-1})$ sont premiers entre eux. On a de plus

$$\begin{aligned}[f\cdots hkl\cdots s]&=\max\{[f\cdots hk], [l\cdots s]\}\\ &=\max\{[f], \cdots, [k], [l], \cdots, [s]\},\\ (f\cdots hkl\cdots s)_{[f\cdots s]}&=(f\cdots hk)_{[f\cdots k]}\oplus(l\cdots s)_{[l\cdots s]}\\ &=f_{[f]}\oplus\cdots\oplus k_{[k]}\oplus l_{[l]}\oplus\cdots\oplus s_{[s]}\end{aligned}$$

et la relation duale (13.3). Puisque

$$u=(f\cdots hkl\cdots s)_{[f\cdots s]}\oplus(f\cdots hkl\cdots s)^{[f\cdots s]},$$

on a

$$u=f_{[f]}\oplus\cdots\oplus s_{[s]}\oplus(f^{[f]}\odot\cdots\odot s^{[s]}). \tag{13.4}$$

IV. Applications de treillis non modulaire.

14. Homomorphismes.

Examinons les propositions que l'on peut démontrer sans utiliser la modularité. $a\oplus b=a$ *implique* $b=o$. Car

$$b=b\wedge(a\vee b)=b\wedge a=o.$$

Si $b=(a\wedge b)\oplus e$, *on a* $a\vee b=a\oplus e$.

On a en effet,

$$\begin{aligned}a\wedge e&=(a\wedge e)\wedge(a\wedge b)=a\wedge b\wedge e=o,\\ a\vee b&=a\vee((a\wedge b)\vee e)=a\vee e.\end{aligned}$$

Les résultats du n° 1 sont valables ainsi que la proposition **2.2**.

Si $x' \leqq Lu$, *on a* $LL^{-1}x' = x'$.

En effet

$$LL^{-1}x' = x' \wedge Lu = x'.$$

Par suite, pour qu'il existe le $\wedge$-homomorphisme dual d'un $\vee$-homomorphisme L, il faut que l'on ait les conditions 1°, 2°, 3° du n°3. Pour démontrer la nécessité de la condition 4°, on a utilisé la modularité. Mais pour démontrer la proposition **3.1** on ne l'a pas utilisée. Donc cette proposition reste valable.

Considérons deux systèmes duaux (L, L^{-1}) et (K, K^{-1}), les domaines de définition étant $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ pour le premier et $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ pour le second. Pour démontrer que KL et $L^{-1}K^{-1}$ forment un système dual, on a utilisé la modularité. Mais *si l'on suppose l'existence du* $\wedge$-*homomorphisme dual* $(KL)^{-1}$ *de* KL, *on a*

$$(KL)^{-1} = L^{-1}K^{-1}. \tag{14.1}$$

On a en effet,

$$(KL)^{-1}x'' = \sup\{x;\ KLx \leqq x''\}.$$

Par suite

$$(KL)(KL)^{-1}x'' \leqq x''.$$

On en déduit

$$(KL)^{-1}x'' \leqq L^{-1}K^{-1}x''.$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}(KL)(L^{-1}K^{-1}x'') &= K(LL^{-1})K^{-1}x'' \\ &\leqq KK^{-1}x'' \leqq x''.\end{aligned}$$

On a donc (14.1).

15. Endomorphismes.

Considérons un $\vee$-endomorphisme K dont toutes les puissances positives admettent leurs duals. On a alors

$$(K^n)^{-1} = (K^{-1})^n = \underbrace{K^{-1}K^{-1}\cdots K^{-1}}_{n}.$$

Dans ce cas on a la proposition

15.1 *Les deux chaînes* $u = k^0, k^1, k^2, \cdots$ *et* $o = k_0, k_1, \cdots$ *engendrent un treillis distributif dont un élément quelconque* x *peuvent se représenter sous la forme*

$$x = (k^{i_1} \wedge k_{j_1}) \vee (k^{i_2} \wedge k_{j_2}) \vee \cdots \vee (k^{i_n} \wedge k_{j_n}). \tag{15.1}$$

Remarquons d'abord que l'on a

$$K(k^i \wedge k_j) = k^{i+1} \wedge k_{j-1}. \tag{15.2}$$

On a en effet

$$\begin{aligned} K(k^i \wedge k_j) &= KK^iK^{-i}k_j \\ &= K^{i+1}K^{-i-1}k_{j-1}, \end{aligned}$$

d'où découle la relation (15.2).

K étant un $\vee$-homomorphisme, on a d'une manière générale

$$K((k^{i_1}\wedge k_{j_1})\vee\cdots\vee(k^{i_n}\wedge k_{j_n})) = (k^{i_1+1}\wedge k_{j_1-1})\vee\cdots\vee(k^{i_n+1}\wedge k_{j_n-1}). \tag{15.3}$$

Démontrons maintenant la relation

$$\begin{aligned} &K^{-1}((k^{i_1}\wedge k_{j_1})\vee\cdots\vee(k^{i_n}\wedge k_{j_n})) \\ &= \begin{cases} k_1\vee(k^{i_1-1}\wedge k_{j_1+1})\vee\cdots\vee(k^{i_n-1}\wedge k_{j_n+1}), & (i_1>0), \\ k_{j_1+1}\vee(k^{i_2-1}\wedge k_{j_2+1})\vee\cdots\vee(k^{i_n-1}\wedge k_{j_n+1}), & (i_1=0), \end{cases} \end{aligned} \tag{15.4}$$

en supposant $i_1<i_2<\cdots$, $j_1<j_2<\cdots$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Si $i_1=0$, le premier membre de (15.4) est égal à

$$\begin{aligned} &K^{-1}K^{-j_1}K^{j_1}((k^{i_2}\wedge k_{j_2})\vee\cdots\vee(k^{i_n}\wedge k_{j_n})) \\ &= K^{-j_1-1}K^{j_1+1}((k^{i_2-1}\wedge k_{j_2+1})\vee\cdots\vee(k^{i_n-1}\wedge k_{j_n+1})) \\ &= k_{j_1+1}\vee(k^{i_2-1}\wedge k_{j_2+1})\vee\cdots\vee(k^{i_n-1}\wedge k_{j_n+1}). \end{aligned}$$

Si $i_1>0$, il est égal à

$$K^{-1}K((k^{i_1-1}\wedge k_{j_1+1})\vee\cdots\vee(k^{i_n-1}\wedge k_{j_n+1})) = k_1\vee(k^{i_1-1}\wedge k_{j_1+1})\vee\cdots\vee(k^{i_n-1}\wedge k_{j_n+1}).$$

La formule (15.4) est donc établie.

Démontrons ensuite les formules

$$k^p\wedge((k^{i_1}\wedge k_{j_1})\vee\cdots\vee(k^{i_n}\wedge k_{j_n})) = (k^p\wedge k^{i_1}\wedge k_{j_1})\vee\cdots\vee(k^p\wedge k^{i_n}\wedge k_{j_n}), \tag{15.5}$$

$$k_q\wedge((k^{i_1}\wedge k_{j_1})\vee\cdots\vee(k^{i_n}\wedge k_{j_n})) = (k^{i_1}\wedge k_{j_1}\wedge k_q)\vee\cdots\vee(k^{i_n}\wedge k_{j_n}\wedge k_q). \tag{15.6}$$

Si $i_{r-1}\leqq p<i_r$, le premier membre de (15.5) est égal à

$$\begin{aligned} &K^pK^{-p}((k^{i_1}\wedge k_{j_1})\vee\cdots\vee(k^{i_n}\wedge k_{j_n})) \\ &= K^p(k_{j_{r-1}+p}\vee(k^{i_r-p}\wedge k_{j_r+p})\vee\cdots\vee(k^{i_n-p}\wedge k_{j_n+p})) \\ &= (k^p\wedge k_{j_{r-1}})\vee(k^{i_r}\wedge k_{j_r})\vee\cdots\vee(k^{i_n}\wedge k_{j_n}) \end{aligned}$$

et on voit sans peine que celui-ci est égal au second membre de (15.5).

Démontrons (15.6) par l'induction relative à n. Elle est évidente pour $n=1$. Nous la supposons établie pour n diminué d'une unité.

Supposons $i_1=0$. Le premier membre de (15.6) que nous noterons y peut s'écrire

$$y = K^{-q}o \wedge K^{-j_1}K^{j_1}((k^{i_2} \wedge k_{j_2}) \vee \cdots \vee (k^{i_n} \wedge k_{j_n}). \tag{15.7}$$

Si $q \leqq j_1$, on a

$$y = K^{-q}(o \wedge K^{-j_1+q}K^{j_1}((k^{i_2} \wedge k_{j_2}) \vee \cdots \vee (k^{i_n} \wedge k_{j_n})) = K^{-q}o = k_q.$$

D'autre part, on voit immédiatement que le second membre de (15.6) est k_q.

Si $q > j_1$, on a

$$y = K^{-j_1}(k_{q-j_1} \wedge ((k^{i_2+j_1} \wedge k_{j_2-j_1}) \vee \cdots \vee (k^{i_n+j_1} \wedge k_{j_n-j_1})).$$

On a ensuite

$$y = K^{-j_1}((k^{i_2+j_1} \wedge k_{j_2-j_1} \wedge k_{q-j_1}) \vee \cdots \vee (k^{i_n+j_1} \wedge k_{j_n-j_1} \wedge k_{q-j_1}))$$

par hypothèse. Le premier membre de (15.6) est donc égal à

$$k_{j_1} \vee (k^{i_2} \wedge k_{j_2} \wedge k_q) \vee \cdots \vee (k^{i_n} \wedge k_{j_n} \wedge k_q).$$

La formule est donc établie pour $i_1 = 0$.

Si $i_1 > 0$, on a

$$\begin{aligned} y &= k_q \wedge K^{i_1}(k_{j_1+i_1} \vee (k^{i_2-i_1} \wedge k_{j_2+i_1}) \vee \cdots \vee (k^{i_n-i_1} \wedge k_{j_n+i_1})) \\ &= k_q \wedge K^{i_1}K^{-j_1-i_1}K^{j_1+i_1}((k^{i_2-i_1} \wedge k_{j_2+i_1}) \vee \cdots \vee (k^{i_n-i_1} \wedge k_{j_n+i_1})) \\ &= k_q \wedge k^{i_1} \wedge K^{-j_1}K^{j_1}((k^{i_2} \wedge k_{j_2}) \vee \cdots \vee (k^{i_n} \wedge k_{j_n})) \\ &= K^{i_1}K^{-i_1}(k_q \wedge K^{-j_1}K^{j_1}((k^{i_2} \wedge k_{j_2}) \vee \cdots \vee (k^{i_n} \wedge k_{j_n}))). \end{aligned}$$

Si $q \leqq j_1$, on a

$$\begin{aligned} y &= K^{i_1}K^{-i_1-q}(o \wedge K^{-i_1+q}K^{j_1}((k^{i_2} \wedge k_{j_2}) \vee \cdots \vee (k^{i_n} \wedge k_{j_n}))) \\ &= K^{i_1}K^{-i_1-q}o = K^{i_1}K^{-i_1}k_q = k^{i_1} \wedge k_q. \end{aligned}$$

Or on voit immédiatement que le second membre de (15.6) coïncide avec $k^{i_1} \wedge k_q$.

Si $q > j_1$, on a

$$y = K^{i_1}K^{-i_1-j_1}(k_{q-j_1} \wedge ((k^{i_2+j_1} \wedge k_{j_2-j_1}) \vee \cdots \vee (k^{i_n+j_1} \wedge k_{j_n-j_1}))),$$

qui par hypothèse peut se transformer en

$$\begin{aligned} y &= K^{i_1}K^{-i_1-j_1}((k^{i_2+j_1} \wedge k_{j_2-j_1} \wedge k_{q-j_1}) \vee \cdots \vee (k^{i_n+j_1} \wedge k_{j_n-j_1} \wedge k_{q-j_1})) \\ &= K^{i_1}(k_{j_1+i_1} \vee (k^{i_2-i_1} \wedge k_{j_2+i_1} \wedge k_{q+i_1}) \vee \cdots \vee (k^{i_n-i_1} \wedge k_{j_n+i_1} \wedge k_{q+i_1})) \\ &= (k^{i_1} \wedge k_{j_1}) \vee (k^{i_2} \wedge k_{j_2} \wedge k_q) \vee \cdots \vee (k^{i_n} \wedge k_{j_n} \wedge k_q) \end{aligned}$$

et on trouve le second membre de (15.6).

La formule (15.6) est donc etablie.

Les formules (15.5) et (15.6) entraînent

$$\begin{aligned} &(k^p \wedge k_q) \wedge ((k^{i_1} \wedge k_{j_1}) \vee \cdots \vee (k^{i_n} \wedge k_{j_n})) \\ &\quad = (k^p \wedge k_q \wedge k^{i_1} \wedge k_{j_1}) \vee \cdots \vee (k^p \wedge k_q \wedge k^{i_n} \wedge k_{j_n}). \end{aligned}$$

D'une manière générale, on a la proposition

15.2 *L'intersection de* l'élément (15.1) *et de*

$$x'=(k^{p_1}\wedge k_{q_1})\vee(k^{p_2}\wedge k_{q_2})\vee\cdots\vee(k^{p_m}\wedge k_{q_m}) \tag{15.1$'$}$$

coïncide avec l'union des éléments

$$k(p_s,\, q_s;\ i_t,\, j_t)=k^{p_s}\wedge k_{q_s}\wedge k^{i_t}\wedge k_{j_t},\quad (s=1,\cdots,m;\ t=1,\cdots,n). \tag{15.8}$$

Cette proposition permet d'obtenir la conclusion de la proposition **15.1.**

Elle est établie pour $m=1$. Donc nous la supposons établie pour $m+n$ diminué d'une unité. Nous supposerons en outre $i_1<i_2<\cdots$, $j_1<j_2<\cdots$, $p_1<p_2\cdots$, $q_1<q_2<\cdots$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Considérons d'abord le cas de $p_1=i_1=0$. Si $q_1\leqq j_1$, on a

$$\begin{aligned} x\wedge x' &= K^{-q_1}((k^{p_2+q_1}\wedge k_{q_2-q_1})\vee\cdots))\wedge K^{-j_1}((k^{i_2+j_1}\wedge k_{j_2-j_1})\vee\cdots) \\ &= K^{-q_1}(((k^{p_2+q_1}\wedge k_{q_2-q_1})\vee\cdots)\wedge K^{-j_1+q_1}((k^{i_2+j_1}\wedge k_{j_2-j_1})\vee\cdots))) \\ &= K^{-q_1}(((k^{p_2+q_1}\wedge k_{q_2-q_1})\vee\cdots)\wedge(k_{j_1-q_1}\vee(k^{i_2+q_1}\wedge k_{j_2-q_1})\vee\cdots)) \end{aligned}$$

et celui-ci est par hypothèse égal à l'image par K^{-q_1} de l'union des éléments

$$\begin{aligned} &k(p_s+q_1,\, q_s-q_1;\ i_t+q_1,\, j_t-q_1), &&(s=2,\cdots,m;\ t=2,\cdots,n), \\ &k(p_s+q_1,\, q_s-q_1;\ 0,\, j_1-q_1), &&(s=2,\cdots,m). \end{aligned}$$

$x\wedge x'$ est donc égal à l'union des éléments

$$\begin{aligned} &k(p_s,\, q_s;\ i_t,\, j_t), &&(s=2,\cdots,m;\ t=2,\cdots,n), \\ &k(p_s,\, q_s;\ 0,\, j_1), &&(s=2,\cdots,m). \end{aligned}$$

et k_{q_1}. Et on vérifie sans peine que cette union coïncide avec celle des éléments (15.8).

Considérons ensuite le cas de $p_1>0$, $i_1\geqq 0$. On a

$$x\wedge x'=k^{p_1}\wedge(k_{q_1}\vee(k^{p_2}\wedge k_{q_2})\vee\cdots)\wedge k^{i_1}\wedge(k_{j_1}\wedge(k^{i_2}\wedge k_{j_2})\vee\cdots).$$

$x\wedge x'$ est donc égal à l'intersection de $k^{p_1}\wedge k^{i_1}$ et de l'union des éléments

$$\begin{aligned} &k(p_s,\, q_s;\ i_t,\, j_t), &&(s=2,\cdots,m;\ t=2,\cdots,n), \\ &k(0,\, q_1;\ i_t,\, j_t), &&(t=2,\cdots,n), \\ &k(p_s,\, q_s;\ 0,\, j_1), &&(s=2,\cdots,n) \end{aligned}$$

et de $k_{q_1}\wedge k_{j_1}$. Par suite il est égal à l'union des éléments (15.8).

Le treillis engendré par les éléments $k^0, k^1, k^2,\cdots, k_0, k_1, k_2,\cdots$ étant distributif, les démonstrations des propositions du n° 9 de la section III sont valables.

15.3 *Si* μ_K, ν_K *sont finis, on a*

$$k^m\wedge k_n=k^m\wedge k_{n+1} \tag{15.9}$$

pour $m+n\geqq[k]$.

En effet, on a (15.9) pour $m=0$, $n\geqq[k]$, car les deux membres coïncident avec $k_{[k]}$. Supposons donc établie la relation

$$k^{m-1}\wedge k_{n+1}=k^{m-1}\wedge k_{n+2}$$

pour $m+n\geqq[k]$. On en déduit

$$K(k^{m-1}\wedge k_{n+1})=K(k^{m-1}\wedge k_{n+2}).$$

On a donc (15.9) d'après (15.2).

Université de Tokyo

Bibliographie

[1] A. Deprit: Sous-espaces vectoriels d'un espace localement convexe séparé. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V, **42** (1945), 1012-1017.

[2] A. Deprit: Endomorphisme de Riesz. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **70** (1956), 165-183.

[3] M. Hukuhara: Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel, I, II. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, **7** (1954), 129-192; **7** (1956), 305-332.

[4] M. Hukuhara: $\oplus$-endomorghisme et $\cap$-endomorphisme d'un treillis en dualité et la théorie de Riesz sur l'endomorphisme complètement continu. Funk. Ekv., **1** (1958), 85-102; 103-120; **2** (1959), 19-32.

[5] M. Hukuhara et Y. Sibuya: Sur l'endomorphisme complètement continu. Proc. Japan Acad., **31** (1955), 595-599.

[6] M. Hukuhara et Y. Sibuya: Théorie des endomorphismes complètement continus, I, II. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, **7** (1957), 391-405; **7** (1958), 511-525.

[7] F. Riesz: Über lineare Funktionalgleichungen. Acta. Math., **41** (1918), 71-98.

[8] K. Tandai: On certain pairs of mappings of modular lattices. Sci. Papers, Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo, **5** (1955), 83-86.

(Received July 17, 1962)