Eine Bemerkung über die Zerlegung der Gruppencharaktere

Von Kaoru SEKINO

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ derart, dass $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ die alternierende Gruppe von sechs Symbolen ist. In meiner früheren Arbeit [1] wurde die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ genau angegeben. In der vorliegenden Note werde ich also betrachten wie die Charaktere von $\mathfrak{G}$ durch die Charaktere der Untergruppen von $\mathfrak{G}$ characterisiert werden (vgl. § 4 von [2]). Da ich schon in [1] hierfür nötige Tatsachen hergeleitet habe, werde ich im folgenden durchaus der dortigen Bezeichnungen bedienen.

§ 1.

Zunächst betrachten wir die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ in die von $\mathfrak{H}_{24}$, $\mathfrak{H}_{36}$ und $\mathfrak{U}^*$ in den wirklich nötigen Fällen von [1], § 3.

9) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{24}$.

9. 1) In diesem Falle gibt es keinen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_{24}$, der in $\mathfrak{H}$ gleich 2ψ ist. Deshalb gibt es, wegen 11. 1) von HSA[1], 5 einfache Charaktere ω_i $(1\leqq i\leqq 5)$ von $\mathfrak{H}_{24}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\begin{aligned} &\omega_i(s)=\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 2)\,, \\ &\omega_3(s)=2\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H}\,, \\ &\omega_i(s)=3\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H} && (4\leqq i\leqq 5)\,. \end{aligned}$$

Folglich haben wir (bei passender Wahl):

$$\Xi_i(s)=\omega_i(s)+\cdots \ \text{in } \mathfrak{H}_{24} \qquad (1\leqq i\leqq 5)\,.$$

9. 2) In diesem Falle gibt es keinen einfachen Charakter ω von $\mathfrak{H}_{24}$, der in $\mathfrak{H}$ gleich ψ ist. Denn sonst wäre $\Xi_i=\omega+\cdots$ in $\mathfrak{H}_{24}$ (für ein i), und daher müsste

$$15\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_\omega)\geqq\mathrm{Gr}(\Xi_i)\geqq 30\mathrm{Gr}(\psi)$$

sein. Deshalb gibt es, wegen 11. 2) von HSA, drei einfache Charaktere ω_i $(1\leqq i\leqq 3)$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\begin{aligned} &\omega_i(s)=2\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 2)\,, \\ &\omega_3(s)=4\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H}\,. \end{aligned}$$

Folglich haben wir (bei passender Wahl):

---

1) Hilfssatz 1 von [2] wird mit HSA zitiert.

$$\Xi_i(s)=\omega_i(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H}_{24} \qquad (1\leqq i\leqq 3).$$

11) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_3^*$, 12) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^*$, 13) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_6^*$, 14) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{12}^*$, 15) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{24}^*$, 16) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{U}^*$. In diesen Fällen zieht man die Charaktere von $\mathfrak{U}^*$ statt der von $\mathfrak{U}$ in Betracht; dann werden die Charaktere von $\mathfrak{G}$ durch die von Untergruppen von $\mathfrak{G}$, genauso wie in den Fällen 3), 4), 6), 8), 9), 10), charakterisiert. Hierbei bezeichnet χ_i^* oder ω_i^* einen einfachen Charakter von $\mathfrak{U}^*$ bzw. $\mathfrak{H}_{24}^*$.

17) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^\sharp$. Nach 7) von HSA gibt es 4 einfache Charaktere ω_i $(1\leqq i\leqq 4)$ von $\mathfrak{H}_{24}$ derart, dass

$$\omega_i(s)=\psi(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 4)$$

sind, wobei wir $\omega_2=\omega_1\hat{\omega}$ und $\omega_4=\omega_3\hat{\omega}$ für den erzeugenden Charakter $\hat{\omega}$ von $\mathfrak{H}_{24}/\mathfrak{H}_{12}$ annehmen.

Es sei nun $\Xi_1=\omega_1+\cdots$ in $\mathfrak{H}_{24}$, dann ist $\Xi_1=\Xi_{\omega_1}$. Ferner gibt es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ mit $\Xi_1(s)\neq\Xi_i(s)$ $(i=3,4)$ und in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ ist $\Xi_1(s)=\Xi_2(s)$. Andererseits ist für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\Xi_{\omega_2}(s)=\sum{}'\omega_1(tst^{-1})\hat{\omega}(tst^{-1})=\sum{}'\omega_1(tst^{-1})=\Xi_{\omega_1}(s)\,,$$

denn tst^{-1} ist in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$. Also ist $\Xi_2=\Xi_{\omega_2}$, und daher sehen wir ein (bei passender Wahl):

$$\Xi_i(s)=\omega_i(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H}_{24} \qquad (1\leqq i\leqq 4)\,.$$

18) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_8$.

18. 1) Nach 9. 1) von HSA gibt es 5 einfache Charaktere $\omega_i\,(1\leqq i\leqq 5)$ von $\mathfrak{H}_{24}$ derart, dass

$$\omega_i(s)=\psi(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 4)\,,$$
$$\omega_5(s)=2\psi(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H}$$

sind, wobei wir $\omega_2=\omega_1\hat{\omega}$ und $\omega_4=\omega_3\hat{\omega}$ annehmen. Dann haben wir, genauso wie im Falle 17), bei passender Wahl,

$$\Xi_i(s)=\omega_i(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H}_{24} \qquad (1\leqq i\leqq 5)\,.$$

18. 2) Wäre nun $\Xi_1=\omega+\cdots$ in $\mathfrak{H}_{24}$ und $\omega=\psi+\cdots$ in $\mathfrak{H}$, dann wäre

$$45\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_\omega)\geqq\mathrm{Gr}(\Xi_1)=90\mathrm{Gr}(\psi)\,.$$

Deshalb gibt es, wegen 9. 2) von HSA, zwei einfache Charaktere $\omega_i\,(1\leqq i\leqq 2)$ von $\mathfrak{H}_{24}$ derart, dass

$$\omega_i(s)=2\psi(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 2)$$

sind, woraus folgt (bei passender Wahl)

$$\Xi_i(s)=\omega_i(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H}_{24} \qquad (1\leqq i\leqq 2)\,.$$

19) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_9$.

19. 1) Nach 1) von HSB[2] gibt es 9 einfache Charaktere $\varphi_i\,(1\leqq i\leqq 9)$ von $\mathfrak{H}_{36}$, die ψ in sich enthalten, woraus sich ergibt (bei passender Wahl)

$$\Xi_i(s)=\varphi_i(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H}_{36} \qquad (1\leqq i\leqq 9).$$

20) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{18}$.

20. 1) In diesem Falle sind in $\mathfrak{H}$

$$\Xi_i(s)=\psi(s)+\cdots \qquad (1\leqq i\leqq 2)\,,$$
$$\Xi_i(s)=2\psi(s)+\cdots \qquad (3\leqq i\leqq 6)\,,$$

und daher gibt es keinen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_{36}$, der in $\mathfrak{H}$ $3\psi+\cdots$ ist. Deshalb gibt es, wegen 2) von HSB, 6 einfache Charaktere $\varphi_i\,(1\leqq i\leqq 6)$ von $\mathfrak{H}_{36}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\varphi_i(s)=\psi(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 2)\,,$$
$$\varphi_i(s)=2\psi(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H} \qquad (3\leqq i\leqq 6)\,.$$

Wir haben sofort (bei passender Wahl):

$$\Xi_i(s)=\varphi_i(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H}_{36} \qquad (1\leqq i\leqq 6)\,.$$

21) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{36}$.

21. 1) In diesem Falle gibt es, genauso wie im Falle 20. 1), keinen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_{36}$, der in $\mathfrak{H}$ 3ψ ist. Deshalb gibt es, wegen 3) von HSB, 6 einfache Charaktere $\varphi_i\,(1\leqq i\leqq 6)$ von $\mathfrak{H}_{36}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\varphi_i(s)=\psi(s) \quad \text{ in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 4)\,,$$
$$\varphi_i(s)=4\psi(s) \quad \text{ in } \mathfrak{H} \qquad (5\leqq i\leqq 6)\,,$$

woraus folgt (bei passender Wahl)

$$\Xi_i(s)=\varphi_i(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H}_{36} \qquad (1\leqq i\leqq 6)\,.$$

21. 2) Wäre nun $\Xi_i=\varphi+\cdots$ in $\mathfrak{H}_{36}$ und $\varphi=\psi$ in $\mathfrak{H}$, dann wäre

$$10\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_\varphi)\geqq \mathrm{Gr}(\Xi_i)=30\mathrm{Gr}(\psi)\,.$$

Folglich gibt es, wegen 3) von HSB, 4 einfache Charaktere $\varphi_i\,(1\leqq i\leqq 4)$ von $\mathfrak{H}_{36}$ derart, dass in $\mathfrak{H}$

$$\varphi_i(s)=3\psi(s) \qquad (1\leqq i\leqq 4)$$

sind, woraus folgt (bei passender Wahl)

$$\Xi_i(s)=\varphi_i(s)+\cdots \text{ in } \mathfrak{H}_{36} \qquad (1\leqq i\leqq 4)\,.$$

---

2) Hilfssatz 3 von [1] wird mit HSB zitiert.

22) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{G}$.

22.1.1) In diesem Falle sind in $\mathfrak{H}$

$$\begin{aligned}
&\Xi_1(s) = \psi(s)\,, \\
&\Xi_2(s) = \Xi_3(s) = 5\psi(s)\,, \\
&\Xi_4(s) = \Xi_5(s) = 8\psi(s)\,, \\
&\Xi_6(s) = 9\psi(s)\,, \\
&\Xi_7(s) = 10\psi(s)\,.
\end{aligned}$$

Zunächst gibt es, nach 11.1) von HSA und 3) von HSB, 5 einfache Charaktere $\omega_i\ (1 \leqq i \leqq 5)$ von $\mathfrak{H}_{24}$ und 6 einfache Charaktere $\varphi_i\ (1 \leqq i \leqq 6)$ von $\mathfrak{H}_{36}$, die ψ in sich enthalten, nämlich in $\mathfrak{H}$

$$\begin{aligned}
&\omega_i(s) = \psi(s) && (1 \leqq i \leqq 2)\,, \\
&\omega_3(s) = 2\psi(s)\,, \\
&\omega_i(s) = 3\psi(s) && (4 \leqq i \leqq 5)\,, \\
&\varphi_i(s) = \psi(s) && (1 \leqq i \leqq 4)\,, \\
&\varphi_i(s) = 4\psi(s) && (5 \leqq i \leqq 6)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir $\varphi_3(f^2) = -\varphi_1(f^2)$, $\varphi_4(f^2) = -\varphi_2(f^2)$ annehmen.

In $\mathfrak{H}_5 - \mathfrak{H}$ sind, wegen II) von Hilfssatz 2 von [1],

$$\begin{aligned}
&\Xi_1(s) = \xi(s)\,, \\
&\Xi_2(s) = \Xi_3(s) = 0\,, \\
&\Xi_4(s) = \xi(s) + \xi(s)\hat{\xi}(s) + \xi(s)\hat{\xi}(s)^4\,, \\
&\Xi_5(s) = \xi(s) + \xi(s)\hat{\xi}(s)^2 + \xi(s)\hat{\xi}(s)^3\,, \\
&\Xi_6(s) = \sum_{i=1}^{4} \xi(s)\hat{\xi}(s)^i\,, \\
&\Xi_7(s) = 0\,,
\end{aligned}$$

und ersichtlich ist

$$\Xi_{\varphi_i}(s) = 0 \qquad \text{für} \quad s \in \mathfrak{H}_5 - \mathfrak{H} \qquad (1 \leqq i \leqq 6)\,.$$

Also sind zwei von 4 Charaktere $\Xi_{\varphi_i}\ (1 \leqq i \leqq 4)$ einfach, und nehmen wir daher an, dass Ξ_{φ_2} einfach ist. Folglich haben wir (bei passender Wahl):

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
Ξ_1	1					
Ξ_2			1		1	
Ξ_3			1			1
Ξ_4					1	1
Ξ_5					1	1
Ξ_6	1				1	1
Ξ_7		1		1	1	1

Andererseits ist für einen einfachen Charakter ω von $\mathfrak{H}_{24}$

$$\Xi_1(s)=\omega_1(s) \qquad \text{oder} \qquad =\omega_2(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H}_{24}.$$

Wegen $\mathrm{Gr}(\Xi_{\omega_i})=15\mathrm{Gr}(\psi)$, $1\leqq i\leqq 2$, ist eins von $\sum_{s\in\mathfrak{G}}\Xi_{\omega_1}(s)\Xi_{\omega_1}(s^{-1})$ und $\sum_{s\in\mathfrak{G}}\Xi_{\omega_2}(s)\Xi_{\omega_2}(s^{-1})$ gleich $3[\mathfrak{G}]$ und das andere gleich $2[\mathfrak{G}]$, wobei $[\mathfrak{G}]$ den Grad von $\mathfrak{G}$ bedeutet.

Es sei nun

$$\sum_{s\in\mathfrak{G}}\Xi_{\omega_1}(s)\Xi_{\omega_1}(s^{-1})=3[\mathfrak{G}]\,,$$

dann sind in $\mathfrak{H}_{24}$

$$\Xi_1(s)=\omega_1(s)\,,$$
$$\Xi_6(s)=\omega_1(s)+\cdots\,,$$
$$\Xi_7(s)=\omega_2(s)+\cdots\,.$$

Ferner ist in $\mathfrak{H}_{24}$

A) $$\Xi_2(s)=\omega_1(s)+\omega_2(s)+\cdots$$

oder

B) $$\Xi_3(s)=\omega_1(s)+\omega_2(s)+\cdots\,.$$

Im Falle A) ist

$$\Xi_{\omega_3}=\Xi_3+\Xi_4+\Xi_5+\Xi_6=\Xi_{\chi_5}$$

und im Falle B) ist

$$\Xi_{\omega_3}=\Xi_2+\Xi_4+\Xi_5+\Xi_6\neq\Xi_{\chi_5}\,.$$

Aber B) ist unmöglich, denn in $\mathfrak{H}_{12}$ sind

$$\omega_3(s)=\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^{a+1}+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^{a+2}\,,$$
$$\chi_5(s)=\alpha(s)\hat{\alpha}(s)+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^2+\alpha'(s)\,,$$

wobei α einen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_{12}$, der in $\mathfrak{H}$ $\alpha=\psi$ ist, α' den einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_{12}$, der in $\mathfrak{H}$ $\alpha'=3\psi$ ist, und $\hat{\alpha}$ einen erzeugenden Charakter von $\mathfrak{H}_{12}/\mathfrak{H}_4$ bedeutet. Somit sind

$$\omega_3=\omega_{\alpha\hat{\alpha}^{a+1}}=\omega_{\alpha\hat{\alpha}^{a+2}} \qquad \text{und} \qquad \chi_5=\chi_{\alpha\hat{\alpha}}=\chi_{\alpha\hat{\alpha}^2}\,.$$

Hierbei ist mindestens eins von beiden $a+1$ und $a+2$ gleich 1 oder 2 (mod 3), d.h.

$$\Xi_{\omega_3}=\Xi_{\alpha\hat{\alpha}}=\Xi_{\chi_5}\,.$$

Ferner sind unmöglich in $\mathfrak{H}_{24}$

$$\Xi_7(s)=3\omega_3(s)+\cdots \qquad \text{und} \qquad \Xi_6(s)=2\omega_3(s)+\cdots\,,$$

d.h. in $\mathfrak{H}_{24}$, bei passender Wahl,

$$\Xi_7(s)=\omega_2(s)+2\omega_4(s)+\omega_5(s)\,,$$
$$\Xi_6(s)=\omega_1(s)+\omega_3(s)+\omega_4(s)+\omega_5(s)\,.$$

Schliesslich sind in $\mathfrak{H}_{12}$

$$\Xi_4(s)=\chi_2(s)+\chi_5(s)=\alpha(s)\hat{\alpha}(s)+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^2+2\alpha'(s)\,,$$
$$\Xi_5(s)=\chi_3(s)+\chi_5(s)=\alpha(s)\hat{\alpha}(s)+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^2+2\alpha'(s)\,,$$

somit ist in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\Xi_4(s)=\Xi_5(s)=0\,;$$

folglich ist für $s\in\mathfrak{H}d_1$

$$\Xi_4(s)=\Xi_5(s)=0\,.$$

Also ist sicherlich unmöglich in $\mathfrak{H}_{24}$

$$\Xi_4(s)=\omega_3(s)+2\omega_5(s)\,,$$

falls es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}d_1$ mit $\omega_5(s)=0$ gibt.

Angenommen sei: es gäbe mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}a_3d_1$ mit $\omega_5(s)\neq 0$. Wäre es nun

$$\Xi_4(s)=\omega_3(s)+2\omega_5(s)\,,$$

dann gäbe es keinen einfachen Charakter ausser Ξ_2, Ξ_3, Ξ_4, Ξ_6 und Ξ_7, der ω_5 in sich enthielte und daher müsste

$$\Xi_{\omega_5}(s)=\Xi_2(s)+\Xi_3(s)+2\Xi_4(s)+\Xi_6(s)+\Xi_7(s)=5\omega_5(s)\quad\text{in}\quad\mathfrak{H}_{24}-\mathfrak{H}_{12}$$

sein. Wegen $\Xi_{\omega_5}(s)=\omega_5(s)$ für $s\in\mathfrak{H}a_3d_1$ müsste also für $s\in\mathfrak{H}a_3d_1$

$$\omega_5(s)=0$$

sein. Deshalb haben wir

$$\Xi_4(s)=\Xi_5(s)=\omega_3(s)+\omega_4(s)+\omega_5(s)\qquad\text{in }\mathfrak{H}_{24}\,,$$

und folglich sehen wir sofort ein:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Ξ_1	1				
Ξ_2	1	1			1
Ξ_3			1		1
Ξ_4			1	1	1
Ξ_5			1	1	1
Ξ_6	1		1	1	1
Ξ_7		1		2	1

22. 1. 2) In diesem Falle sind in $\mathfrak{H}_{12}$

$$\Xi_3(s)=\alpha(s)+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^2+\alpha'(s)\,,$$

$$\Xi_4(s)=\alpha(s)+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^2+2\alpha'(s)\,,$$
$$\Xi_5(s)=\alpha(s)+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^2+4\alpha'(s)\,.$$

Andererseits gibt es, nach 11. 1) von HSA, 5 einfache Charaktere $\omega_i\ (1\leq i\leq 5)$ von $\mathfrak{H}_{24}$, nämlich

$$\begin{aligned}
\omega_i(s)&=\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^a && \text{in } \mathfrak{H}_{12}\\
&=\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leq i\leq 2)\,,\\
\omega_3(s)&=\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^{a+1}+\alpha(s)\hat{\alpha}(s)^{a+2} && \text{in } \mathfrak{H}_{12}\\
&=2\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H}\,,\\
\omega_i(s)&=\alpha'(s) && \text{in } \mathfrak{H}_{12}\\
&=3\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H} \quad (4\leq i\leq 5)\,.
\end{aligned}$$

Also sind in $\mathfrak{H}_{24}$

$$\begin{aligned}
\Xi_3(s)&=\omega_1(s)+\omega_3(s)+\cdots\,,\\
\Xi_4(s)&=\omega_1(s)+\omega_3(s)+\cdots\,,\\
\Xi_5(s)&=\omega_2(s)+\omega_3(s)+\cdots\,,
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\Xi_3(s)&=\omega_2(s)+\omega_3(s)+\cdots\,,\\
\Xi_4(s)&=\omega_2(s)+\omega_3(s)+\cdots\,,\\
\Xi_5(s)&=\omega_1(s)+\omega_3(s)+\cdots\,;
\end{aligned}$$

folglich ist eins von $\sum_{s\in\mathfrak{G}}\Xi_{\omega_1}(s)\Xi_{\omega_1}(s^{-1})$ und $\sum_{s\in\mathfrak{G}}\Xi_{\omega_2}(s)\Xi_{\omega_2}(s^{-1})$ gleich $[\mathfrak{G}]$ und das andere gleich $2[\mathfrak{G}]$.

Es sei nun

$$\sum_{s\in\mathfrak{G}}\Xi_{\omega_1}(s)\Xi_{\omega_1}(s^{-1})=[\mathfrak{G}]\,,$$

dann sind

$$\Xi_{\omega_1}=\Xi_5 \qquad \text{und} \qquad \Xi_{\omega_2}=\Xi_3+\Xi_4\,.$$

Wäre ferner in $\mathfrak{H}_{24}$

$$\Xi_5(s)=\omega_1(s)+\omega_3(s)+3\omega_4(s)+\omega_5(s)\,,$$

dann wären in $\mathfrak{H}_{24}-\mathfrak{H}_{12}$

$$\begin{aligned}
\Xi_{\omega_1}(s)&=\omega_1(s)+2\omega_4(s)\,,\\
\Xi_{\omega_4}(s)&=3\Xi_5(s)=3\omega_1(s)+6\omega_4(s)\,.
\end{aligned}$$

Falls es nun mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}a_3d_1$ mit $\omega_4(s)\neq 0$ gibt, ist für $s\in\mathfrak{H}a_3d_1$

$$\Xi_{\omega_1}(s)=\omega_1(s)\,.$$

Somit müsste

$$\omega_4(s)=0 \qquad \text{in } \mathfrak{H}a_3d_1$$

sein, was ein Widerspruch ist.

Falls aber für alle s aus $\mathfrak{H}a_3d_1$ $\omega_4(s)=0$ ist und es dabei mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}d_1$ mit $\omega_4(s)\neq 0$ gibt, dann ist für $s\in\mathfrak{H}d_1$ oder $\mathfrak{H}a_2$

$$\Xi_\omega(s)=\omega(s)+\omega(h_1sh_1^{-1})+\omega(h_2sh_2^{-1})\,,$$

wobei $\mathfrak{H}h_1=\mathfrak{H}a_1b^2c_3d_2$ und $\mathfrak{H}h_2=\mathfrak{H}a_2b^2c_4d_3$ sind[3]. Also wären für $s\in\mathfrak{H}d_1$ oder $\mathfrak{H}a_2$

$$\omega_1(h_1sh_1^{-1})+\omega_1(h_2sh_2^{-1})=2\omega_4(s)\,,$$
$$\omega_4(h_1sh_1^{-1})+\omega_4(h_2sh_2^{-1})=3\omega_1(s)+5\omega_4(s)\,.$$

Andererseits sind für $s\in\mathfrak{H}d_1$ oder $\mathfrak{H}a_2$

$$\omega(h_1h_2sh_2^{-1}h_1^{-1})=\omega(a_1h_1sh_1^{-1}a_1^{-1})=\omega(h_1sh_1^{-1})\,,$$
$$\omega(h_2h_1sh_1^{-1}h_2^{-1})=\omega(a_2h_2sh_2^{-1}a_2^{-1})=\omega(h_2sh_2^{-1})\,.$$

Wegen $h_1sh_1^{-1}\in\mathfrak{H}a_2$, $h_2sh_2^{-1}\in\mathfrak{H}d_1$ und h_1^2, $h_2^2\in\mathfrak{H}$, wären deshalb

$$\omega_1(s)+\omega_1(h_2sh_2^{-1})=2\omega_4(h_1sh_1^{-1})\,,$$
$$\omega_1(h_1sh_1^{-1})+\omega_1(s)=2\omega_4(h_2sh_2^{-1})\,,$$

somit wäre

$$\omega_1(s)+\omega_4(s)=\omega_4(h_1sh_1^{-1})+\omega_4(h_2sh_2^{-1})\,,$$

und daher müsste

$$\omega_1(s)+2\omega_4(s)=0 \qquad \text{für} \quad s\in\mathfrak{H}d_1$$

sein. Dann wäre

$$\begin{aligned}0&=\sum_{s\in\mathfrak{H}_{24}}\omega_1(s)\omega_4(s^{-1})\\&=\sum_{s\in\mathfrak{H}_{12}}\omega_1(s)\omega_4(s^{-1})+\sum_{s\in\mathfrak{H}a_3d_1}\omega_1(s)\omega_4(s^{-1})+\cdots\\&\qquad+\sum_{s\in\mathfrak{H}d_1}\omega_1(s)\omega_4(s^{-1})+\cdots\\&=-2\sum_{s\in\mathfrak{H}d_1}\omega_4(s)\omega_4(s^{-1})+\cdots\\&=-2\sum_{s\in\mathfrak{H}d_1}|\omega_4(s)|^2+\cdots\,,\end{aligned}$$

was auch ein Widerspruch ist.

Deshalb sehen wir ein (bei passender Wahl):

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Ξ_1				1	
Ξ_2				1	
Ξ_3		1	1		1
Ξ_4		1	1	1	1
Ξ_5	1		1	2	2

3) $\mathfrak{H}h_1=(13)(25)$, $\mathfrak{H}h_2=(14)(26)$.

22.2.1) In diesem Falle gibt es, nach 3) von HSB, 6 einfache Charaktere φ_i $(1 \leqq i \leqq 6)$ von $\mathfrak{H}_{36}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\varphi_i(s) = \psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 4),$$
$$\varphi_i(s) = 4\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (5 \leqq i \leqq 6),$$

wobei wir $\varphi_3(f^2) = -\varphi_1(f^2)$, $\varphi_4(f^2) = -\varphi_2(f^2)$ annehmen.

In $\mathfrak{H}_5 - \mathfrak{H}$ haben wir, wegen III) von Hilfssatz 2 von [1],

$$\Xi_1(s) = \Xi_2(s) = \sum_{i=1}^{4} \xi(s)\hat{\xi}(s)^i,$$
$$\Xi_3(s) = \xi(s) + \xi(s)\hat{\xi}(s) + \xi(s)\hat{\xi}(s)^4,$$
$$\Xi_4(s) = \xi(s) + \xi(s)\hat{\xi}(s)^2 + \xi(s)\hat{\xi}(s)^3,$$
$$\Xi_5(s) = \Xi_6(s) = 0$$

und ersichtlich ist

$$\Xi_{\varphi_i}(s) = 0 \qquad \text{für } s \in \mathfrak{H}_5 - \mathfrak{H} \qquad (1 \leqq i \leqq 6).$$

Also haben wir, bei passender Wahl, in $\mathfrak{H}_{36}$

$$\Xi_5(s) = \varphi_1(s) + \varphi_3(s) + \cdots,$$
$$\Xi_6(s) = \varphi_2(s) + \varphi_4(s) + \cdots$$

und es gibt keinen einfachen Charakter ausser Ξ_5 und Ξ_6, der φ_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ in sich enthält.

Wäre nun in $\mathfrak{H}_{36}$

$$\Xi_5(s) = \varphi_1(s) + \varphi_3(s) + 2\varphi_5(s),$$

dann wäre in $\mathfrak{H}_{36}$

$$\Xi_{\varphi_1}(s) = \varphi_1(s) + \varphi_3(s) + 2\varphi_5(s).$$

Andererseits ist für $s \in \mathfrak{H}_9 - \mathfrak{H}$

$$\Xi_{\varphi_1}(s) = \varphi_1(s),$$

so müsste in $\mathfrak{H}_9 - \mathfrak{H}$

$$\varphi_3(s) + 2\varphi_5(s) = 0$$

sein, was ein Widerspruch ist.

Deshalb haben wir (bei passender Wahl):

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
Ξ_1					1	
Ξ_2						1
Ξ_3					1	1
Ξ_4					1	1
Ξ_5	1		1		1	1
Ξ_6		1		1	1	1

22.2.2) In diesem Falle gibt es, wegen 3) von HSB, 4 einfache Charaktere φ_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ von $\mathfrak{H}_{36}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\varphi_i(s) = 3\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 4),$$

und wir haben, wegen III) von Hilfssatz 2 von [1], in $\mathfrak{H}_5 - \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} \Xi_1(s) &= \Xi_2(s) = \xi(s), \\ \Xi_3(s) &= \xi(s)\hat{\xi}(s) + \xi(s)\hat{\xi}(s)^4, \\ \Xi_4(s) &= \xi(s)\hat{\xi}(s)^2 + \xi(s)\hat{\xi}(s)^3, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt (bei passender Wahl)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
Ξ_1	1		1	
Ξ_2		1		1
Ξ_3	1	1	1	1
Ξ_4	1	1	1	1

§ 2.

Mittels unsrer Ergebnisse bezüglich der Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ in die von $\mathfrak{H}_{24}$, $\mathfrak{H}_{24}^*$, $\mathfrak{H}_{36}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ werden die ψ enthaltenden einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$ durch die Charaktere dieser Untergruppen $\mathfrak{H}_{24}$, $\mathfrak{H}_{24}^*$, $\mathfrak{H}_{36}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ folgenderweise bestimmt:

1) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}$.

$$\Xi = \Xi_\psi .$$

2) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_2$.

$$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}} \qquad i = 1, 2.$$

3) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_3$.

$$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}} \qquad i = 1, 2, 3.$$

4) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_4$.

4.1) $$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}} \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

4.2) $$\Xi = \Xi_{\chi^{(1)}} .$$

5) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_5$.

$$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

6) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_6$.

$$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(2)}} \qquad i = 1, 2, 3.$$

7) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{10}$.

$$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}} \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

8) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{12}$.

8. 1) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4.$

8. 2) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3.$

9) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{24}$.

9. 1) $\Xi_i=\Xi_{\omega_i}$ $i=1, 2, 3, 4, 5.$

9. 2) $\Xi_i=\Xi_{\omega_i}$ $i=1, 2, 3.$

10) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{U}$.

10. 1) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4, 5.$

10. 2) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4.$

11) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_3^*$.

$\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{*(1)}}$ $i=1, 2, 3.$

12) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^*$.

12. 1) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{*(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4.$

12. 2) $\Xi=\Xi_{\chi^{*(1)}}$

13) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_6^*$.

$\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{*(2)}}$ $i=1, 2, 3.$

14) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{12}^*$.

14. 1) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{*(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4.$

14. 2) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{*(1)}}$ $i=1, 2, 3.$

15) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{24}^*$.

15. 1) $\Xi_i=\Xi_{\omega_i^*}$ $i=1, 2, 3, 4, 5.$

15. 2) $\Xi_i=\Xi_{\omega_i^*}$ $i=1, 2, 3.$

16) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{U}^*$.

16. 1) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{*(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4, 5.$

16. 2) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{*(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4.$

17) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^\sharp$.

$\Xi_i=\Xi_{\omega_i}$ $i=1, 2, 3, 4.$

18) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_8$.

18. 1) $\Xi_i=\Xi_{\omega_i}$ $i=1, 2, 3, 4, 5.$

18. 2) $\Xi_i=\Xi_{\omega_i}$ $i=1, 2.$

19) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_9$.

19. 1) $\Xi_i=\Xi_{\varphi_i}$ $i=1, 2, \cdots, 9.$

19. 2) $\Xi=\Xi_{\chi_1^{(1)}}$

20) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{18}$.

20. 1) $\Xi_i=\Xi_{\varphi_i}$ $i=1, 2, \cdots, 6.$

20. 2) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2.$

21) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{36}$.

21.1) $\Xi_i=\Xi_{\varphi_i}$ $i=1, 2, \cdots, 6$.

21.2) $\Xi_i=\Xi_{\varphi_i}$ $i=1, 2, 3, 4$.

22) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{G}$.

22.1.1) $\Xi_7=\Xi_{\varphi_2}$, $\Xi_4=\Xi_{\chi_2}-\Xi_7$, $\Xi_5=\Xi_{\chi_3}-\Xi_7$, $\Xi_2=\Xi_{\omega_2}-\Xi_7$,
$\Xi_1=\Xi_{\chi_1}-\Xi_2$, $\Xi_6=\Xi_{\chi_4}-\Xi_2-\Xi_7$, $\Xi_3=\Xi_{\chi_5}-\Xi_4-\Xi_5-\Xi_6$.

22.1.2) $\Xi_3=\Xi_{\chi_1}$, $\Xi_5=\Xi_{\omega_1}$, $\Xi_1=\Xi_{\chi_2}-\Xi_5$, $\Xi_2=\Xi_{\chi_3}-\Xi_5$, $\Xi_4=\Xi_{\chi_4}-\Xi_5$.

22.2.1) $\Xi_5=\Xi_{\varphi_1}$, $\Xi_6=\Xi_{\varphi_2}$, $\Xi_2=\Xi_{\chi_3}-\Xi_5-\Xi_6$,
$2\Xi_1=\Xi_{\chi_1}+\Xi_{\chi_2}+\Xi_5+\Xi_6-\Xi_{\chi_4}$,
$\Xi_3=\Xi_{\chi_1}-\Xi_1$, $\Xi_4=\Xi_{\chi_2}-\Xi_1$.

22.2.2) $\Xi_3=\Xi_{\chi_1}$, $\Xi_4=\Xi_{\chi_2}$, $\Xi_1=\Xi_{\varphi_1}-\Xi_3-\Xi_4$, $\Xi_2=\Xi_{\varphi_2}-\Xi_3-\Xi_4$.

Mathematisches Institut, Universität zu Tokyo

Literatur

[1] K. Sekino, Über die Zerlegung der Gruppencharaktere (Zweite Mitteilung), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **8**, 2(1960), 195-228.
[2] ———, Über die Zerlegung der Gruppencharaktere (Dritte Mitteilung), ebd., 333-362.

(Received October 27, 1961)