Über die Zerlegung der Gruppencharaktere.
(Zweite Mitteilung.)

Herrn Professor Dr. Z. Suetuna zum 60. Geburtstag gewidmet.

Von Kaoru SEKINO.

Um die Zerlegung der Charaktere einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ in die ihres Normalteilers $\mathfrak{H}$ eingehends zu untersuchen, betrachtete Professor Z. Suetuna ausser dem Falle, wo die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ abelsch ist, die speziellen Fälle, wo $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ eine lineare Gruppe mod p^n ist, wobei p eine ungerade Primzahl bedeutet, und auch wo $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ die Ikosaedergruppe $\mathfrak{A}_5$ ist ([1], [2], [3], [4]). In einer früheren Arbeit betrachtete ich den Fall, wo $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ eine lineare Gruppe 2^n ist ([5]). In der vorliegenden zweiten Mitteilung soll der Sonderfall, wo $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ die *alternierende Gruppe von sechs Symbolen* d. h. $\mathfrak{A}_6$ ist, erledigt werden.

Es sei also $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ die alternierende Gruppe von sechs Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wir denken uns

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{U}+\mathfrak{U}d_1+\mathfrak{U}d_2+\mathfrak{U}d_3+\mathfrak{U}d_4+\mathfrak{U}d_5 \qquad (d_0=1),$$

mit

$$\mathfrak{H}d_1=(12)(46),\ \mathfrak{H}d_2=(13)(46),\ \mathfrak{H}d_3=(14)(35),\ \mathfrak{H}d_4=(15)(46),\ \mathfrak{H}d_5=(16)(35).$$

Weil dabei $\mathfrak{U}/\mathfrak{H}$ die alternierende Gruppe von fünf Ziffern 2, 3, 4, 5, 6 ist, so denken wir uns

$$\mathfrak{U}=\mathfrak{H}_{12}+\mathfrak{H}_{12}c_1+\mathfrak{H}_{12}c_2+\mathfrak{H}_{12}c_3+\mathfrak{H}_{12}c_4 \qquad (c_0=1),$$
$$\mathfrak{H}_{12}=\mathfrak{H}_4+\mathfrak{H}_4 b+\mathfrak{H}_4 b^2,$$
$$\mathfrak{H}_4=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_1+\mathfrak{H}a_2+\mathfrak{H}a_3 \qquad (a_0=1)$$

mit

$$\mathfrak{H}c_1=(23)(45),\ \mathfrak{H}c_2=(24)(36),\ \mathfrak{H}c_3=(25)(36),\ \mathfrak{H}c_4=(26)(45),$$
$$\mathfrak{H}b=(456),\ \mathfrak{H}a_1=(34)(56),\ \mathfrak{H}a_2=(35)(46),\ \mathfrak{H}a_3=(36)(45).$$

Wir werden nun in §1 einige Hilfssätze bezüglich der Charaktere von Untergruppen von $\mathfrak{G}$ zusammenstellen und in §2 erläutern wie die in $\mathfrak{G}$ konjugierten Charaktere in bezug auf $\mathfrak{U}$ eingeteilt werden. Schliesslich in §3 soll die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ vornehmlich in die von $\mathfrak{U}$ genau angegeben werden.

Herrn Professor Z. Suetuna möchte ich für viele wertvolle Ratschläge und die Anregung zu dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank aussprechen.

§ 1.

Nunmehr sei $\psi(s)$ ein einfacher Charakter des Normalteilers $\mathfrak{H}$. Ferner seien

$$\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_2, \qquad \mathfrak{H}_3=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}b+\mathfrak{H}b^2, \qquad \mathfrak{H}_6=\mathfrak{H}_3+\mathfrak{H}_3c_1,$$
$$\mathfrak{H}_5=\sum_{i=0}^{4}{}'\mathfrak{H}e^i \quad \text{mit} \quad \mathfrak{H}e=(23456), \qquad \mathfrak{H}_{10}=\mathfrak{H}_5+\mathfrak{H}_5a_3.$$

Diejenige Gruppe, welche durch die Gesamtheit der Elemente t aus $\mathfrak{U}$ mit der Eigenschaft: $\psi(s)=\psi(tst^{-1})$, erzeugt wird, sei mit $\mathfrak{U}_\psi$ bezeichnet. Alsdann gilt der folgende ([3], [4])

Hilfssatz 1. 1) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}$ ist, gibt es einen einzigen einfachen Charakter χ von $\mathfrak{U}$, der ψ in sich enthält, nämlich

$$\chi(s)=\sum_{i,j,k}{}'\psi(c_kb^ja_isa_i^{-1}b^{-j}c_k^{-1}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}.$$

2) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_2$ ist, gibt es genau zwei einfache Charaktere χ_1, χ_2 von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\sum_{\substack{j\\ i=0,1}}{}'\psi(a_ib^jsb^{-j}a_i^{-1})+\sum_{\substack{i,j\\ k=1,2}}{}'\psi(c_kb^ja_isa_i^{-1}b^{-j}c_k^{-1}) \quad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq l\leqq 2).$$

Es gibt alsdann mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ mit $\chi_l(s)\neq 0$.

3) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_4$ ist, kommen zwei Fälle vor:

3.1) Es gibt 4 einfache Charaktere χ_l $(1\leqq l\leqq 4)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\sum_j{}'\psi(b^jsb^{-j})+\sum_{i,j}{}'(c_1b^ja_isa_i^{-1}b^{-j}c_1^{-1}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq l\leqq 4).$$

Es gibt dann mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ mit $\chi_l(s)\neq 0$.

3.2) Es gibt einen einzigen einfachen Charakter χ von $\mathfrak{U}$, der ψ in sich enthält, nämlich

$$\chi(s)=2\Big(\sum_j{}'\psi(b^jsb^{-j})+\sum_{i,j}{}'\psi(c_1b^ja_isa_i^{-1}b^{-j}c_1^{-1})\Big) \qquad \text{in } \mathfrak{H},$$

und in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ ist $\chi(s)=0$.

4) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_3$ ist, gibt es genau drei einfache Charaktere χ_l $(1\leqq l\leqq 3)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\sum_{\substack{i\\ k=0,1}}{}'\psi(c_ka_isa_i^{-1}c_k^{-1})+\sum_{i,j}{}'\psi(c_2b^ja_isa_i^{-1}b^{-j}c_2^{-1}) \quad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq l\leqq 3).$$

Es gibt dann mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_l(s)\neq 0$ $(1\leqq l\leqq 3)$ und zwar in $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ ist $\chi_1(s)+\chi_2(s)+\chi_3(s)=0$.

5) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_6$ ist, gibt es genau drei einfache Charaktere χ_l $(1\leqq l\leqq 3)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\sum_i \psi(a_i s a_i^{-1})+\sum_{\substack{j\\ i=0,1}} \psi(c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1}) \quad \text{in } \mathfrak{H}\ (1 \leqq l \leqq 2),$$

$$\chi_3(s)=2(\sum_i \psi(a_i s a_i^{-1})+\sum_{\substack{j\\ i=0,1}} (c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1})) \quad \text{in } \mathfrak{H}.$$

Es gibt dann mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_l(s) \neq 0$.

6) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_5$ ist, gibt es genau 5 einfache Charaktere χ_l $(1 \leqq l \leqq 5)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\sum_{i,j} \psi(b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j}) \quad \text{in } \mathfrak{H}\ (1 \leqq l \leqq 5).$$

7) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_{10}$ ist, gibt es genau 4 einfache Charaktere χ_l $(1 \leqq l \leqq 4)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\sum_{\substack{j\\ i=0,1}} \psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1}) \quad \text{in } \mathfrak{H}\ (1 \leqq l \leqq 2),$$

$$\chi_l(s)=2(\sum_{\substack{j\\ i=0,1}} \psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1})) \quad \text{in } \mathfrak{H}\ (3 \leqq l \leqq 4),$$

und in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ ist $\chi_l(s)=0$ $(3 \leqq l \leqq 4)$.

8) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_{12}$ ist, kommen zwei Fälle vor:

8.1) Es gibt genau 4 einfache Charaktere χ_l $(1 \leqq l \leqq 4)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\psi(s)+\sum_i \psi(c_1 a_i s a_i^{-1} c_1^{-1}) \quad \text{in } \mathfrak{H}\ (1 \leqq l \leqq 3),$$

$$\chi_4(s)=3(\psi(s)+\sum_i \psi(c_1 a_i s a_i^{-1} c_1^{-1})) \quad \text{in } \mathfrak{H}.$$

8.2) Es gibt genau drei einfache Charaktere χ_l $(1 \leqq l \leqq 3)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=2(\psi(s)+\sum_i \psi(c_1 a_i s a_i^{-1} c_1^{-1})) \quad \text{in } \mathfrak{H}\ (1 \leqq l \leqq 3).$$

Es gibt dann mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_l(s) \neq 0$.

9) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{U}$ ist, kommen zwei Fälle vor:

9.1) Es gibt genau 5 einfache Charaktere χ_l $(1 \leqq l \leqq 5)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_1(s)=\psi(s) \ \text{ in } \mathfrak{H}, \qquad \chi_l(s)=3\psi(s) \ \text{ in } \mathfrak{H}\ (2 \leqq l \leqq 3),$$
$$\chi_4(s)=4\psi(s) \ \text{ in } \mathfrak{H}, \qquad \chi_5(s)=5\psi(s) \ \text{ in } \mathfrak{H}.$$

9.2) Es gibt genau 4 einfache Charaktere χ_l $(1 \leqq l \leqq 4)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=2\psi(s) \ \text{ in } \mathfrak{H}\ (1 \leqq l \leqq 2), \quad \chi_3(s)=4\psi(s) \ \text{ in } \mathfrak{H}, \quad \chi_4(s)=6\psi(s) \ \text{ in } \mathfrak{H}.$$

In den Fällen 7) und 9) zerfallen die Charaktere von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{H}_5$ folgenderweise:

Hilfssatz 2. I) Im Falle 7) gelten in $\mathfrak{H}_5$

$$\chi_l=\xi+\xi' \quad (1\leqq l\leqq 2), \qquad \chi_3=\xi\hat{\xi}+\xi\hat{\xi}^4+2\xi', \qquad \chi_4=\xi\hat{\xi}^2+\xi\hat{\xi}^3+2\xi',$$

wobei ξ einen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_5$, der in $\mathfrak{H}$ $\xi=\psi$ ist, ξ' den einfachen Charakter $\xi'=\xi_{\psi(a_3b^{-1})}$ von $\mathfrak{H}_5$ und $\hat{\xi}$ einen erzeugenden Charakter von $\mathfrak{H}_5/\mathfrak{H}$ bedeutet.

II) Im Falle 9.1) gelten in $\mathfrak{H}_5$

$$\chi_1=\xi, \qquad \chi_2=\xi+\xi\hat{\xi}+\xi\hat{\xi}^4, \qquad \chi_3=\xi+\xi\hat{\xi}^2+\xi\hat{\xi}^3, \qquad \chi_4=\sum_{i=1}^{4}\xi\hat{\xi}^i, \qquad \chi_5=\sum_{i=0}^{4}\xi\hat{\xi}^i.$$

III) Im Falle 9.2) gelten in $\mathfrak{H}_5$

$$\chi_1=\xi\hat{\xi}+\xi\hat{\xi}^4, \qquad \chi_2=\xi\hat{\xi}^2+\xi\hat{\xi}^3, \qquad \chi_3=\sum_{i=1}^{4}\xi\hat{\xi}^i, \qquad \chi_4=2\xi+\sum_{i=1}^{4}\xi\hat{\xi}^i.$$

Beweis. Weil $\xi(a_3sa_3^{-1})=\psi(s)$ in $\mathfrak{H}$ ist, muss für ein μ zwischen 0 und 4

$$\xi(a_3sa_3^{-1})=\xi(s)\hat{\xi}(s)^{\mu}$$

sein. Dann ist

$$\xi(a_3sa_3^{-1})\hat{\xi}(a_3sa_3^{-1})^i=\xi(s)\hat{\xi}(s)^{\mu+4i}.$$

Ist μ nicht gleich 0, so ist die Kongruenz

$$\mu+3i\equiv 0 \qquad (\text{mod } 5)$$

stets lösbar. Wir denken uns deshalb ξ so gewählt, dass

$$\xi(a_3sa_3^{-1})=\xi(s)$$

ist. Der von $\xi\hat{\xi}$ induzierte Charakter von $\mathfrak{H}_{10}$ ist dann einfach und in $\mathfrak{H}_5$ gleich

$$\xi(s)\hat{\xi}(s)+\xi(s)\hat{\xi}(s)^4.$$

Also sind $\xi\hat{\xi}$ und $\xi\hat{\xi}^4$ zugleich in einem einfachen Charakter von $\mathfrak{U}$ enthalten, ebenso $\xi\hat{\xi}^2$ und $\xi\hat{\xi}^3$.

Ferner im Falle 7) sind die 5 Charaktere $\psi(b^jsb^{-j})$ $(1\leqq j\leqq 2)$, $\psi(a_1b^jsb^{-j}a_1^{-1})$ $(0\leqq j\leqq 2)$ in bezug auf $\mathfrak{H}_5$ zu $\xi(bsb^{-1})$ konjugiert. Daher ist $\xi_{\psi(bsb^{-1})}$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{H}_5$.

Deshalb ist sofort einzusehen, dass (I) und (II) richtig sind.

Im Falle 9.2) sei nun angenommen, dass in $\mathfrak{H}_5$

$$\chi_4=2\xi+2\xi\hat{\xi}+2\xi\hat{\xi}^4$$

oder

$$\chi_4=2\xi\hat{\xi}+\xi\hat{\xi}^2+\xi\hat{\xi}^3+2\xi\hat{\xi}^4$$

wäre. Dann könnte $\xi\hat{\xi}$ in χ_i $(1\leqq i\leqq 3)$ nicht enthalten sein; folglich wäre

$$\chi_{\xi\hat{\xi}}=2\chi_4.$$

Andererseits ist für ein $s\in\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$

$$\chi_{\xi\hat{\xi}}(s)=\xi(s)\hat{\xi}(s)+\xi(a_3sa_3^{-1})\hat{\xi}(a_3sa_3^{-1})=\xi(s)\hat{\xi}(s)+\xi(s)\hat{\xi}(s)^4.$$

Also müsste in $\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$

$$4\bar{\xi}+3\bar{\xi}\hat{\xi}+3\bar{\xi}\hat{\xi}^4=0$$

bzw.

$$3\bar{\xi}\hat{\xi}+2\bar{\xi}\hat{\xi}^2+2\bar{\xi}\hat{\xi}^3+3\bar{\xi}\hat{\xi}^4=0$$

sein, gegen unsre Annahme, dass es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$ mit $\xi(s)\neq 0$ gibt.

Nun seien

$$\mathfrak{H}_3^*=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}(d_1c_1)+\mathfrak{H}(d_1c_1)^2,\ ^{1)}$$
$$\mathfrak{H}_9=\mathfrak{H}_3^*+\mathfrak{H}_3^*b+\mathfrak{H}_3^*b^2,$$
$$\mathfrak{H}_{36}=\mathfrak{H}_9+\mathfrak{H}_9f+\mathfrak{H}_9f^2+\mathfrak{H}_9f^2 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{H}f=(1425)(36).$$

Dann ergibt sich sofort der folgende

Hilfssatz 3. 1) Unter den zu $\psi(s)$ (in bezug auf $\mathfrak{H}_{36}$) konjugierten Charakteren seien genau die folgenden voneinander verschieden:

$$\psi(s),\quad \psi(fsf^{-1}),\quad \psi(f^2sf^{-2}),\quad \psi(f^3sf^{-3}).$$

Wenn für einen einfachen Charakter ϑ von $\mathfrak{H}_9$ $\vartheta=\psi$ in $\mathfrak{H}$ ist, so gibt es genau 9 einfache Charaktere von $\mathfrak{H}_{36}$, die in $\mathfrak{H}$ gleich

$$\sum_{i=0}^{3}\psi(f^isf^{-i})$$

sind.

Wenn aber für einen einfachen Charakter ϑ von $\mathfrak{H}_9$ $\vartheta=3\psi$ in $\mathfrak{H}$ ist, so gibt es einen einzigen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_{36}$, der in $\mathfrak{H}$ gleich

$$3\sum_{i=0}^{3}\psi(f^isf^{-i})$$

ist.

2) Unter den zu $\psi(s)$ konjugierten seien genau die folgenden voneinander verschieden:

$$\psi(s),\qquad \psi(fsf^{-1}).$$

Wenn für einen einfachen Charakter ϑ von $\mathfrak{H}_9$ $\vartheta=\psi$ in $\mathfrak{H}$ ist, so gibt es genau 6 einfache Charaktere φ_i $(1\leqq i\leqq 6)$ von $\mathfrak{H}_{36}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\varphi_i(s)=\psi(s)+\psi(fsf^{-1}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\varphi_i(s)=2(\psi(s)+\psi(fsf^{-1})) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (3\leqq i\leqq 6).$$

Wenn aber für einen einfachen Charakter ϑ von $\mathfrak{H}_9$ $\vartheta=3\psi$ in $\mathfrak{H}$ ist, so gibt es genau zwei einfache Charaktere von $\mathfrak{H}_{36}$, die in $\mathfrak{H}$ gleich

1) $\mathfrak{H}d_1c_1=(132)(465)$.

$$3(\psi(s)+\psi(fsf^{-1}))$$

sind.

3) Alle zu $\psi(s)$ konjugierten seien einander gleich. Wenn für einen einfachen Charakter ϑ von $\mathfrak{H}_9$ $\vartheta=\psi$ in $\mathfrak{H}$ ist, so gibt es genau 6 einfache Charaktere φ_i $(1\leqq i\leqq 6)$ von $\mathfrak{H}_{36}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\varphi_i(s)=\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \ (1\leqq i\leqq 4),$$
$$\varphi_i(s)=4\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \ (5\leqq i\leqq 6).$$

Wenn aber für einen einfachen Charakter ϑ von $\mathfrak{H}_9$ $\vartheta=3\psi$ in $\mathfrak{H}$ ist, so gibt es genau 4 einfache Charaktere von $\mathfrak{H}_{36}$, die in $\mathfrak{H}$ gleich

$$3\psi(s)$$

sind.

Ist nun $\chi(s)$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{U}$, so ist der von χ induzierte Charakter $\Xi_\chi(s)$ von $\mathfrak{G}$ gleich

$$\sum_l{}' \chi(d_l s d_l^{-1}), \qquad d_l s d_l^{-1} \in \mathfrak{U}.$$

Deshalb gelten:

(1)	$\Xi_\chi(s)=\sum_{l=0}^{5}{}' \chi(d_l s d_l^{-1})$	für $s\in\mathfrak{H}$,
(2)	$\Xi_\chi(s)=\chi(s)+\chi(d_1 s d_1^{-1})$	für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$,
(3)	$\Xi_\chi(s)=\chi(s)+\chi(d_1 s d_1^{-1})+\chi(d_2 s d_2^{-1})$	für $s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$,
(4)	$\Xi_\chi(s)=\chi(s)$	für $s\in\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$,
(5)	$\Xi_\chi(s)=0$	für $s\in\mathfrak{H}f^i$ $(i=1,\ 3)$,
(6)	$\Xi_\chi(s)=0$	für $s\in\mathfrak{H}_3^*-\mathfrak{H}$.

Betreffs des von einem einfachen Charakter $\varphi(s)$ von $\mathfrak{H}_{36}$ induzierten Charakters $\Xi_\varphi(s)$ von $\mathfrak{G}$ gelten:

(7)	$\Xi_\varphi(s)=0$	für $s\in\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$,
(8)	$\Xi_\varphi(s)=\varphi(s)+\varphi(a_3 s a_3^{-1})$	für $s\in\mathfrak{H}f^i$ $(i=1,\ 3)$.

§ 2.

Für einen einfachen Charakter $\psi(s)$ von $\mathfrak{H}$ bildet die Gesamtheit $\mathfrak{G}_\psi$ der Elemente t aus $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft: $\psi(s)=\psi(tst^{-1})$, natürlich eine $\mathfrak{H}$ umfassende Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ist sonach

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_\psi+\mathfrak{G}_\psi g_1+\cdots+\mathfrak{G}_\psi g_{n-1},$$

so sind unter den zu $\psi(s)$ (in bezug auf $\mathfrak{G}$) konjugierten genau die folgenden voneinander verschieden:

$$\psi(s),\ \psi(g_1 s g_1^{-1}),\cdots\cdots,\ \psi(g_{n-1} s g_{n-1}^{-1}).$$

Bedeutet ferner $\psi'(s)$ einen zu $\psi(s)$ konjugierten Charakter $\psi(hsh^{-1})$, so ist $\mathfrak{G}_{\psi'}$ ersichtlich die zu $\mathfrak{G}_\psi$ konjugierte Gruppe $h^{-1}\mathfrak{G}_\psi h$. Also kommen als $\mathfrak{G}_\psi$ genau folgende 22 Gruppen in Betracht:

$$\mathfrak{H},\quad \mathfrak{H}_2,\quad \mathfrak{H}_3,\quad \mathfrak{H}_4,\quad \mathfrak{H}_5,\quad \mathfrak{H}_6,\quad \mathfrak{H}_{10},\quad \mathfrak{H}_{12},\quad \mathfrak{H}_{24},\quad \mathfrak{U},\quad \mathfrak{H}_3^*,\quad \mathfrak{H}_4^*,\quad \mathfrak{H}_6^*,$$
$$\mathfrak{H}_{12}^*,\quad \mathfrak{H}_{24}^*,\quad \mathfrak{U}^*,\quad \mathfrak{H}_4^\#,\quad \mathfrak{H}_8,\quad \mathfrak{H}_9,\quad \mathfrak{H}_{18},\quad \mathfrak{H}_{36},\quad \mathfrak{G},$$

wobei

$$\mathfrak{H}_{24}=\mathfrak{H}_{12}+\mathfrak{H}_{12}d_1,\qquad \mathfrak{H}_4^*=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}c_3+\mathfrak{H}d_3c_1ba_2+\mathfrak{H}d_3b^2a_2,\qquad \mathfrak{H}_6^*=\mathfrak{H}_3^*+\mathfrak{H}_3^*d_2,$$
$$\mathfrak{H}_{12}^*=\mathfrak{H}_4^*+\mathfrak{H}_4^*d_1c_1+\mathfrak{H}_4^*(d_1c_1)^2,\qquad \mathfrak{H}_{24}^*=\mathfrak{H}_{12}^*+\mathfrak{H}_{12}^*d_2,$$
$$\mathfrak{U}^*=\mathfrak{H}_{12}^*+\mathfrak{H}_{12}^*a_1+\mathfrak{H}_{12}^*d_4+\mathfrak{H}_{12}^*d_5+\mathfrak{H}_{12}^*d_2b^2,\qquad \mathfrak{H}_4^\#=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}d_1a_1+\mathfrak{H}(d_1a_1)^2+\mathfrak{H}(d_1a_1)^3,$$
$$\mathfrak{H}_8=\mathfrak{H}_4^\#+\mathfrak{H}_4^\#d_1$$

und

$$\mathfrak{H}_{18}=\mathfrak{H}_9+\mathfrak{H}_9f^2$$

sind.[2]

1) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}$. In diesem Falle sind die 360 zu $\psi(s)$ konjugierten Charaktere alle voneinander verschieden.

2) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_2$. In diesem Falle bilden die 180 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere 4 Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 1,\ 0\leqq j\leqq 2)$,
$\psi(c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 1\leqq k\leqq 2)$;
b) $\psi(d_1 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} d_1^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 1,\ 0\leqq j\leqq 2)$,
$\psi(d_1 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_1^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 1\leqq k\leqq 2)$;
c) $\psi(d_2 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_2^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 4)$;
d) $\psi(d_3 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_3^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 4)$.

3) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_3$. In diesem Falle bilden die 120 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere 4 Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c_k a_i s a_i^{-1} c_k^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq k\leqq 1)$,
$\psi(c_2 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_2^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;
b) $\psi(d_1 c_k a_i s a_i^{-1} c_k^{-1} d_1^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq k\leqq 1)$,
$\psi(d_1 c_2 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_2^{-1} d_1^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;
c) $\psi(d_2 c_k a_i s a_i^{-1} c_k^{-1} d_2^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq k\leqq 1)$,
$\psi(d_2 c_2 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_2^{-1} d_2^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;
d) $\psi(d_3 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_3^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 4)$.

4) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4$. In diesem Falle bilden die 90 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere drei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

---

2) $\mathfrak{H}d_3c_1ba_2=(14)(25)$, $\quad\mathfrak{H}d_3b^2a_2=(14)(36)$, $\quad\mathfrak{H}d_2b^2=(13)(45)$, $\quad\mathfrak{H}d_1a_1=(12)(3456)$.

a) $\psi(b^j s b^{-j})$ $(0 \leqq j \leqq 2)$, $\psi(c_1 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_1^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2)$;

b) $\psi(d_1 b^j s b^{-j} d_1^{-1})$ $(0 \leqq j \leqq 2)$,

$\psi(d_1 c_1 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_1^{-1} d_1^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2)$;

c) $\psi(d_2 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2,\ 0 \leqq k \leqq 4)$.

5) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_5$. In diesem Falle bilden die 72 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2)$;

b) $\psi(d_1 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_1^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2,\ 0 \leqq k \leqq 4)$.

6) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_6$. In diesem Falle bilden die 60 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere drei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c_k a_i s a_i^{-1} c_k^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq k \leqq 1)$,

$\psi(c_2 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2)$;

b) $\psi(d_2 a_i s a_i^{-1} d_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3)$,

$\psi(d_2 c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1} d_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 1,\ 0 \leqq j \leqq 2)$;

c) $\psi(d_3 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_3^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2,\ 0 \leqq k \leqq 1)$,

$\psi(d_3 c_3 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_3^{-1} d_3^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 1,\ 0 \leqq j \leqq 2)$.

7) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{10}$. In diesem Falle bilden die 36 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 1,\ 0 \leqq j \leqq 2)$;

b) $\psi(d_1 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} d_1^{-1})$ $(i=0, 2,\ 0 \leqq j \leqq 2)$,

$\psi(d_1 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_1^{-1})$, $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2,\ k=1, 3)$.

8) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{12}$. In diesem Falle bilden die 30 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere drei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(s)$, $\psi(c_1 a_i s a_i^{-1} c_1^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3)$;

b) $\psi(d_1 s d_1^{-1})$, $\psi(d_1 c_1 a_i s a_i^{-1} c_1^{-1} d_1^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3)$;

c) $\psi(d_2 c_k a_i s a_i^{-1} c_k^{-1} d_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq k \leqq 1)$,

$\psi(d_2 c_2 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_2^{-1} d_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2)$.

9) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{24}$. In diesem Falle bilden die 15 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(s)$, $\psi(c_1 a_i s a_i^{-1} c_1^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3)$;

b) $\psi(d_2 a_i s a_i^{-1} d_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3)$,

$\psi(d_2 c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1} d_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 1,\ 0 \leqq j \leqq 2)$.

10) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{U}$. In diesem Falle bilden die 6 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(s)$;

b) $\psi(d_1 s d_1^{-1})$, $\psi(d_1 c_1 a_i s a_i^{-1} c_1^{-1} d_1^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3)$,

11) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_3^*$. In diesem Falle bilden die 120 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 4)$;

b) $\psi(d_3 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_3^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 4)$.

12) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^*$. In diesem Falle bilden die 90 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere drei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$,
$\psi(c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 1,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

b) $\psi(d_1 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$,
$\psi(d_1 c_3 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_3^{-1} d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 1,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

c) $\psi(d_2 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_2^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$,
$\psi(d_2 c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1} d_2^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 1,\ 0\leqq j\leqq 2)$.

13) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_6^*$. In diesem Falle bilden die 60 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ k=0,3)$,
$\psi(c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 1,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

b) $\psi(d_3 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_3^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$,
$\psi(d_3 c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1} d_3^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 1,\ 0\leqq j\leqq 2)$.

14) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{12}^*$. In diesem Falle bilden die 30 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere eine einzige Klasse der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$,
$\psi(c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 1,\ 0\leqq j\leqq 2)$.

15) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{24}^*$. In diesem Falle bilden die 15 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere eine einzige Klasse der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$,
$\psi(c_2 b^j s b^{-j} c_2^{-1})$ $(0\leqq j\leqq 2)$.

16) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{U}^*$. In diesem Falle bilden die 6 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere eine einzige Klasse der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1})$ $(i=0, 2,\ 0\leqq j\leqq 2)$.

17) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^{\sharp}$. In diesem Falle bilden die 90 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 1,\ 0\leqq j\leqq 2)$,

$\psi(c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2,\ 1 \leqq k \leqq 2)$;

b) $\psi(d_2 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2,\ 0 \leqq k \leqq 4)$.

18) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_8$. In diesem Falle bilden die 45 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(b^j s b^{-j})$ $(0 \leqq j \leqq 2)$,

$\psi(c_1 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_1^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2)$;

b) $\psi(d_2 c_k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_k^{-1} d_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2,\ k=0, 2)$,

$\psi(d_2 c_3 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_3^{-1} d_2^{-1})$ $(i=0,\ 2,\ 0 \leqq j \leqq 2)$.

19) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_9$. In diesem Falle bilden die 40 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c_k a_i s a_i^{-1} c_k^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq k \leqq 1)$,

$\psi(c_2 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2)$;

b) $\psi(d_3 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} d_3^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2)$,

$\psi(d_3 c_k a_i s a_i^{-1} c_k^{-1} d_3^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3,\ k=1, 4)$.

20) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{18}$. In diesem Falle bilden die 20 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_i s a_i^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3)$,

$\psi(c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 1,\ 0 \leqq j \leqq 2)$;

b) $\psi(d_3 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} d_3^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 1,\ 0 \leqq j \leqq 2)$,

$\psi(d_3 c_1 a_i s a_i^{-1} c_1^{-1} d_3^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3)$.

21) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{36}$. In diesem Falle bilden die 10 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere eine einzige Klasse der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_i s a_i^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 3)$,

$\psi(c_2 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c_2^{-1})$ $(0 \leqq i \leqq 1,\ 0 \leqq j \leqq 2)$.

22) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{G}$. In diesem Falle sind die zu $\psi(s)$ in bezug auf $\mathfrak{G}$ konjugierten Charaktere alle einander gleich.

§ 3.

Nunmehr betrachten wir die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ vornehmlich in die von $\mathfrak{U}$.

1) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}$. In diesem Falle kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich $(0 \leqq l \leqq 5)$

$$\chi^{(l+1)}(s) = \chi_{\psi^{(l)}}(s) \quad \text{mit} \quad \psi^{(l)}(s) = \psi(d_l s d_l^{-1}).$$

Somit gibt es ersichtlich einen einzigen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, der ψ in sich enthält, und in $\mathfrak{U}$ ist

$$\Xi(s)=\Xi_\psi(s)=\chi^{(1)}(s)+\chi^{(2)}(s)+\cdots+\chi^{(6)}(s).$$

2) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_2$. In diesem Falle kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned} &\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots && \text{in } \mathfrak{H} && (i=1, 2),\\ &\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots && \text{in } \mathfrak{H} && (i=1, 2),\\ &\chi^{(l+1)}(s)=\chi_{\psi^{(l)}}(s) && && (l=2, 3). \end{aligned}$$

Ist der Grad $\mathrm{Gr}(\Xi)$ desjenigen einfachen Charakters Ξ von $\mathfrak{G}$, der ψ in sich enthält, ein Vielfaches von $180\,\mathrm{Gr}(\psi)$, so ist $\Xi_i(s)=\Xi_{\chi_i^{(1)}}(s)$, wegen $\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_i^{(1)}})=6\,\mathrm{Gr}(\chi_i^{(1)})=180\,\mathrm{Gr}(\psi)$, ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$. Folglich haben wir (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$
Ξ_1	1		1		1	1
Ξ_2		1		1	1	1

3) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_3$. In diesem Falle kommen 10 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned} &\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 3),\\ &\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 3),\\ &\chi_i^{(3)}(s)=\psi(d_2sd_2^{-1})+\cdots && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 3),\\ &\chi^{(4)}(s)=\chi_{\psi^{(3)}}(s). \end{aligned}$$

Alsdann sind alle drei Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 3)$ einfach, und sofort haben wir (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$	$\chi_3^{(3)}$	$\chi^{(4)}$
Ξ_1	1			1			1			1
Ξ_2		1			1			1		1
Ξ_3			1			1			1	1

4) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4$.

4.1) Falls $\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, sei nun angenommen, dass

$$\chi^{(2)}(s)=2(\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots) \qquad \text{in } \mathfrak{H}$$

wäre. Dann würde es mindestens einen einfachen Charakter Ξ geben derart, dass

$$\begin{aligned} \Xi(s)&=\chi_1^{(1)}(s)+\cdots+\chi^{(2)}(s)+\cdots && \text{in } \mathfrak{U}\\ &=2\alpha(\psi(s)+\cdots) \quad (\alpha\geqq 1) && \text{in } \mathfrak{H} \end{aligned}$$

wäre; folglich wäre

$$90\,\mathrm{Gr}(\psi)=6\,\mathrm{Gr}(\chi_1^{(1)})=\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_1^{(1)}})\geqq\mathrm{Gr}(\Xi)=180\,\alpha\,\mathrm{Gr}(\psi),$$

was ein Widerspruch ist.

Deshalb kommen 9 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 4),$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 4),$$
$$\chi^{(3)}(s)=\chi_{\psi^{(2)}}(s).$$

Alsdann sind alle 4 Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 4)$ einfach, und sofort sehen wir ein (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
Ξ_1	1				1				1
Ξ_2		1				1			1
Ξ_3			1				1		1
Ξ_4				1				1	1

4.2) Falls $\chi^{(1)}(s)=2(\psi(s)+\cdots)$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen drei Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi^{(1)}(s)=2(\psi(s)+\cdots) \quad \text{in } \mathfrak{H},$$
$$\chi^{(2)}(s)=2(\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots) \quad \text{in } \mathfrak{H},$$
$$\chi^{(3)}(s)=\chi_{\psi^{(2)}}(s).$$

Somit ist der Charakter $\Xi=\Xi_{\chi^{(1)}}$ einfach, und in $\mathfrak{U}$ ist

$$\Xi(s)=\chi^{(1)}(s)+\chi^{(2)}(s)+2\chi^{(3)}(s).$$

5) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_5$. In diesem Falle kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \ (1\leqq i\leqq 5),$$
$$\chi^{(2)}(s)=\chi_{\psi^{(1)}}(s).$$

Alsdann sind alle 5 Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 5)$ einfach, woraus sich ergibt:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_5^{(1)}$	$\chi^{(2)}$
Ξ_1	1					1
Ξ_2		1				1
Ξ_3			1			1
Ξ_4				1		1
Ξ_5					1	1

6) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_6$. In diesem Falle kommen 8 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_2sd_2^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi_3^{(2)}(s)=2(\psi(d_2sd_2^{-1})+\cdots) \quad \text{in } \mathfrak{H},$$
$$\chi_i^{(3)}(s)=\psi(d_3sd_3^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 2).$$

Für ein i $(1\leqq i\leqq 3)$ sei nun

$$\Xi=\alpha\chi_i^{(1)}+\cdots+\chi_3^{(2)}+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{U}.$$

Dann ist

$$120\,\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_i^{(1)}})\geqq\alpha\,\mathrm{Gr}(\Xi)\geqq 120\,\alpha\,\mathrm{Gr}(\psi)\,;$$

folglich muss $\alpha\leqq 1$ sein. Alsdann gibt es drei einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 3)$ von

$\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, woraus folgt (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$
Ξ_1	1			1			1	
Ξ_2	1				1			1
Ξ_3		1	1			1	1	1

7) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{10}$. In diesem Falle kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi_i^{(1)}(s)=2(\psi(s)+\cdots) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (3\leqq i\leqq 4),$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 2).$$

Alsdann sind alle 4 Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 4)$ einfach.

Wäre nun in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_3=\chi_3^{(1)}+2\chi_1^{(2)},$$

so müsste in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$, wegen $\chi_3^{(1)}(s)=0$ für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$,

$$\Xi_3(s)=\Xi_{\chi_3^{(1)}}(s)=\chi_3^{(1)}(s)+\chi_3^{(1)}(d_1sd_1^{-1})=0$$

sein, gegen die Annahme, dass es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ mit $\chi_1^{(2)}(s)$ $\neq 0$ gibt. Deshalb haben wir (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$
Ξ_1	1				1	
Ξ_2		1				1
Ξ_3			1		1	1
Ξ_4				1	1	1

8) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{12}$.

8.1) Falls $\chi_1^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, ist $\chi^{(2)}(s)=2(\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots)$ in $\mathfrak{H}$ unmöglich. Folglich kommon 11 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\chi_4^{(1)}(s)=3(\psi(s)+\cdots) \quad \text{in } \mathfrak{H},$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\chi_4^{(2)}(s)=3(\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots) \quad \text{in } \mathfrak{H},$$
$$\chi_i^{(3)}(s)=\psi(d_2sd_2^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 3).$$

Alsdann sind alle 4 Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 4)$ einfach, woraus sich ergibt (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$	$\chi_3^{(3)}$
Ξ_1	1				1				1		
Ξ_2		1				1				1	
Ξ_3			1				1				1
Ξ_4				1				1	1	1	1

8.2) Falls $\chi^{(1)}(s)=2(\psi(s)+\cdots)$ in $\mathfrak{H}$ ist, ist natürlich $\chi^{(2)}(s)=2(\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots)$ in $\mathfrak{H}$. Folglich kommen 9 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=2(\psi(s)+\cdots) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=2(\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\chi_i^{(3)}(s)=\psi(d_2sd_2^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 3).$$

Alsdann sind alle drei Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 3)$ einfach.

Wäre nun

$$\Xi_1=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}+2\chi_1^{(3)} \quad \text{in } \mathfrak{U},$$

so existierte kein solcher einfacher Charakter ausser Ξ_1, der $\chi_1^{(1)}$, $\chi_1^{(2)}$ oder $\chi_1^{(3)}$ in sich enthielte, so dass

$$\Xi_{\chi_1^{(1)}}=\Xi_{\chi_1^{(2)}}=\Xi_1 \quad \text{und} \quad \Xi_{\chi_1^{(3)}}=2\Xi_1$$

wären. Also müsste, nach (3), für $s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(1)}(d_1sd_1^{-1})+\chi_1^{(1)}(d_2sd_2^{-1})=\chi_1^{(2)}(s)+2\chi_1^{(3)}(s)$$

sein, und entsprechend für $s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(2)}(d_1sd_1^{-1})+\chi_1^{(2)}(d_2sd_2^{-1})=\chi_1^{(1)}(s)+2\chi_1^{(3)}(s),$$
$$\chi_1^{(3)}(d_1sd_1^{-1})+\chi_1^{(3)}(d_2sd_2^{-1})=2\chi_1^{(1)}(s)+2\chi_1^{(2)}(s)+3\chi_1^{(3)}(s).$$

Andererseits sind für $s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$

$$\chi(d_1d_2sd_2^{-1}d_1^{-1})=\chi(c_1bd_1sd_1^{-1}b^{-1}c_1^{-1})=\chi(d_1sd_1^{-1}),$$
$$\chi(d_2d_1sd_1^{-1}d_2^{-1})=\chi(c_1bd_2sd_2^{-1}b^{-1}c_1^{-1})=\chi(d_2sd_2^{-1}).$$

Wegen $d_1sd_1^{-1}\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ und $d_1^2\in\mathfrak{H}$, wäre deshalb

$$\chi_1^{(1)}(s)+\chi_1^{(1)}(d_2sd_2^{-1})=\chi_1^{(2)}(d_1sd_1^{-1})+2\chi_1^{(3)}(d_1sd_1^{-1})$$

und entsprechend

$$\chi_1^{(1)}(d_1sd_1^{-1})+\chi_1^{(1)}(s)=\chi_1^{(2)}(d_2sd_2^{-1})+2\chi_1^{(3)}(d_2sd_2^{-1}),$$

und daher in $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ müsste

$$\chi_1^{(1)}(s)+\chi_1^{(2)}(s)+2\chi_1^{(3)}(s)=0$$

sein; folglich wäre

$$\begin{aligned}0&=\sum_{s\in\mathfrak{H}_3}\chi_1^{(1)}(s)\chi_1^{(2)}(s^{-1})\\&=\sum_{s\in\mathfrak{H}}\chi_1^{(1)}(s)\chi_1^{(2)}(s^{-1})+\sum_{s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}}\chi_1^{(1)}(s)\chi_1^{(2)}(s^{-1})\\&=-\sum_{s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}}\chi_1^{(1)}(s)(\chi_1^{(1)}(s^{-1})+2\chi_1^{(3)}(s^{-1}))\\&=-\sum_{s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}}|\chi_1^{(1)}(s)|^2,\end{aligned}$$

gegen die Annahme, dass es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_1^{(1)}(s)\neq 0$ gibt.

Deshalb sehen wir ein (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$	$\chi_3^{(3)}$
Ξ_1	1			1			1	1	
Ξ_2		1			1		1		1
Ξ_3			1			1		1	1

9) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{24}$.

9.1) Falls $\chi_1^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 7 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{lll}
\chi_i^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1 \leqq i \leqq 3), \\
\chi_4^{(1)}(s) = 3(\psi(s) + \cdots) & \text{in } \mathfrak{H}, & \\
\chi_i^{(2)}(s) = \psi(d_2 s d_2^{-1}) + \cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1 \leqq i \leqq 2), \\
\chi_3^{(2)}(s) = 2(\psi(d_2 s d_2^{-1}) + \cdots) & \text{in } \mathfrak{H}. &
\end{array}$$

Es sei nun $\Xi = \alpha\chi_4^{(1)} + \cdots$ in $\mathfrak{U}$, dann ist $\alpha \leqq 1$. Ist $\Xi = \chi_4^{(1)} + \beta\chi_i^{(2)} + \cdots$ in $\mathfrak{U}$ für ein i $(1 \leqq i \leqq 2)$, so ist $\beta \leqq 1$, und daher gibt es folgende zwei Charaktere von $\mathfrak{G}$;

$$\Xi_4 = \chi_4^{(1)} + \chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)} \quad \text{in } \mathfrak{U},$$
$$\Xi_5 = \chi_4^{(1)} + \chi_2^{(2)} + \chi_3^{(2)} \quad \text{in } \mathfrak{U}.$$

Wegen

$$120\,\mathrm{Gr}(\psi) = \mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_3^{(2)}}) \geqq \mathrm{Gr}(\Xi_4) + \mathrm{Gr}(\Xi_5) = 90\,\mathrm{Gr}(\psi)$$

existiert ein anderer einfacher Charakter Ξ_3 von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{U}$ gleich

$$\gamma\chi_i^{(1)} + \cdots + \chi_3^{(2)}$$

ist, wobei natürlich $\gamma \leqq 1$ ist.

Es gibt noch zwei andere einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2 von $\mathfrak{G}$, welche ψ in sich enthalten, und wir haben somit (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1				1		
Ξ_2	1					1	
Ξ_3		1	1				1
Ξ_4				1	1		1
Ξ_5				1		1	1

9.2) Falls $\chi^{(1)}(s) = 2(\psi(s) + \cdots)$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{lll}
\chi_i^{(1)}(s) = 2(\psi(s) + \cdots) & \text{in } \mathfrak{H} & (1 \leqq i \leqq 3), \\
\chi_i^{(2)}(s) = \psi(d_2 s d_2^{-1}) + \cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1 \leqq i \leqq 2), \\
\chi_3^{(2)}(s) = 2(\psi(d_2 s d_2^{-1}) + \cdots) & \text{in } \mathfrak{H}. &
\end{array}$$

Es sei nun $\Xi = \alpha\chi_i^{(1)} + \cdots$ in $\mathfrak{H}$, dann ist $\alpha \leqq 1$. Wegen $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{24}$ gibt es mindestens einen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_{24}$, der in $\mathfrak{H}$ gleich 3ψ oder 4ψ ist, folglich existiert ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$, welcher zwei von drei Charakteren $\chi_i^{(1)}$ in sich enthält. Bezeichnet man dies mit $\Xi_3 = \chi_2^{(1)} + \chi_3^{(1)} + \cdots$, so ist, genauso wie in 8.2),

$$\Xi_3 = \chi_2^{(1)} + \chi_3^{(1)} + 2\chi_3^{(2)} \quad \text{in } \mathfrak{U}$$

unmöglich, d. h.

$$\Xi_3 = \chi_2^{(1)} + \chi_3^{(1)} + \chi_1^{(2)} + \chi_2^{(2)} + \chi_3^{(2)} \quad \text{in } \mathfrak{U}.$$

Es gibt noch zwei andere einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2 von $\mathfrak{G}$, und wir haben:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1					1
Ξ_2	1					1
Ξ_3		1	1	1	1	1

10) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{U}$.

10.1) Falls $\chi_1^{(1)}(s)=\psi(s)$ in $\mathfrak{H}$ ist, ist $\chi^{(2)}(s)=2(\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots)$ in $\mathfrak{H}$ unmöglich. Folglich kommen 9 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{lll}
\chi_1^{(1)}(s)=\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H}, & \\
\chi_i^{(1)}(s)=3\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H} & (2\leqq i\leqq 3), \\
\chi_4^{(1)}(s)=4\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H}, & \\
\chi_5^{(1)}(s)=5\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H}, & \\
\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 3), \\
\chi_4^{(2)}(s)=3(\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots) & \text{in } \mathfrak{H}. &
\end{array}$$

Gäbe es einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$ derart, dass für ein i $(1\leqq i\leqq 3)$

$$\Xi=\chi_2^{(1)}+\alpha\chi_i^{(2)}+\cdots \qquad (\alpha\geqq 1)$$

wäre. Dann wäre

$$\begin{aligned}30\,\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_i^{(2)}})&=\mathrm{Gr}(\Xi)+\cdots\\ &=18\,\mathrm{Gr}(\psi)+\cdots.\end{aligned}$$

Andererseits gibt es nur einen einfachen Charakter, dessen Grad kleiner als $12\mathrm{Gr}(\psi)$ ist, was ein Widerspruch ist.

Folglich existieren folgende zwei Charaktere von $\mathfrak{G}$;

$$\begin{array}{ll}
\Xi_2=\chi_2^{(1)}+\chi_4^{(2)} & \text{in } \mathfrak{U}, \\
\Xi_3=\chi_3^{(1)}+\chi_4^{(2)} & \text{in } \mathfrak{U}.
\end{array}$$

Es ist klar, dass der Charakter $\Xi_1=\Xi_{\chi_1^{(1)}}$ einfach ist. Sei nun $\Xi_1=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}$ in $\mathfrak{U}$, so gibt es noch zwei andere einfache Charaktere Ξ_4, Ξ_5 von $\mathfrak{G}$, und wir haben:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_5^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$
Ξ_1	1					1			
Ξ_2		1							1
Ξ_3			1						1
Ξ_4				1		1			1
Ξ_5					1		1	1	1

10.2) Falls $\chi^{(1)}(s)=2\psi(s)$ in $\mathfrak{H}$ ist, sei angenommen, dass

$$\chi^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H}$$

wäre. Dann wäre $\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi^{(2)}})=30\,\mathrm{Gr}(\psi)$. Andererseits ist der Grad des Charakters von $\mathfrak{G}$ ein Vielfaches von $12\,\mathrm{Gr}(\psi)$, was ein Widerspruch ist.

Deshalb kommen 7 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{lll} \chi_i^{(1)}(s)=2\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2), \\ \chi_3^{(1)}(s)=4\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H}, & \\ \chi_4^{(1)}(s)=6\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H}, & \\ \chi_i^{(2)}(s)=2(\psi(d_1 s d_1^{-1})+\cdots) & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 3). \end{array}$$

Es ist klar, dass alle 4 Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 4)$ einfach sind. Es sei nun für ein i $(1\leqq i\leqq 3)$

$$\Xi_4=\chi_4^{(1)}+\alpha\chi_i^{(2)}+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H}.$$

Dann ist $\alpha\leqq 1$, und daher sehen wir ein (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1				1		
Ξ_2		1			1		
Ξ_3			1			1	1
Ξ_4				1	1	1	1

11) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_3^*$. In diesem Falle kommen zwei Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi^{(1)}(s)=\chi_\psi(s), \quad \chi^{(2)}(s)=\chi_{\psi^{(3)}}(s).$$

Es sei nun $\Xi=\alpha\chi^{(i)}+\cdots$ in $\mathfrak{U}$, dann ist $\alpha=1$. Also gibt es drei einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 3)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, woraus folgt:

	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$
Ξ_1	1	1
Ξ_2	1	1
Ξ_3	1	1

12) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^*$. In diesem Falle kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{lll} \chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2), \\ \chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1 s d_1^{-1})+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2), \\ \chi_i^{(3)}(s)=\psi(d_2 s d_2^{-1})+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2). \end{array}$$

Zieht man nun die Charaktere von $\mathfrak{U}^*$ in Betracht, so kommen zwei verschiedene Fälle vor:

12.1) Der erste Fall ist der, wo es einen einfachen Charakter χ^* von $\mathfrak{U}^*$ gibt, der in $\mathfrak{H}$ gleich

$$\psi(s)+\cdots$$

ist.

12.2) Der zweite Fall ist der, wo es einen einfachen Charakter χ^* von $\mathfrak{U}^*$ gibt, der in $\mathfrak{H}$ gleich

$$2(\psi(s)+\cdots)$$

ist.

12.1) In diesem Falle ist sofort zu zeigen, dass es nur zwei einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2 von $\mathfrak{G}$ gibt, die $\chi_1^{(1)}$ in sich enthalten. Sei in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_1=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_1^{(3)},$$

so ist in $\mathfrak{U}$

A) $$\Xi_2=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_1^{(3)},$$

B) $$\Xi_2=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_2^{(3)}$$

oder

C) $$\Xi_2=\chi_1^{(1)}+\chi_2^{(2)}+\chi_2^{(3)}.$$

Aber A) und B) sind unmöglich, was man folgenderweise nachweisen kann:

Im Falle A) ist in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_{\chi_1^{(i)}}(s)=2(\chi_1^{(1)}(s)+\chi_1^{(2)}(s)+\chi_1^{(3)}(s)).$$

Nach (2) ist deshalb für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(i)}(d_1sd_1^{-1})=2(\chi_1^{(1)}(s)+\chi_1^{(2)}(s)+\chi_1^{(3)}(s))-\chi_1^{(i)}(s);$$

folglich

$$\sum_{i=1}^{3}\chi_1^{(i)}(d_1sd_1^{-1})=5\sum_{i=1}^{3}\chi_1^{(i)}(s).$$

Wegen $d_1sd_1^{-1}\in\mathfrak{H}_4$ und $d_1^2\in\mathfrak{H}$ folgt somit

$$\sum_{i=1}^{3}\chi_1^{(i)}(s)=0 \qquad \text{in } \mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}.$$

Dann ist

$$0=\sum_{s\in\mathfrak{H}_4}\chi_1^{(1)}(s)\chi_1^{(2)}(s^{-1})=-\sum_{s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}}|\chi_1^{(1)}(s)|^2,$$

gegen die Annahme, dass es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ mit $\chi_1^{(1)}(s)\neq 0$ gibt.

Im Falle B) nach $\chi_1^{(3)}(s)+\chi_2^{(3)}(s)=0$ für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$, ist in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\Xi_{\chi_1^{(1)}}(s)=\Xi_{\chi_1^{(2)}}(s)=2(\chi_1^{(1)}(s)+\chi_1^{(2)}(s)).$$

Also muss in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ $\chi_1^{(1)}(s)+\chi_1^{(2)}(s)=0$ sein, was ein Widerspruch ist (vgl. den Fall A)).

Deshalb gibt es 4 einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 4)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$
Ξ_1	1		1		1	
Ξ_2	1			1		1
Ξ_3		1	1			1
Ξ_4		1		1	1	

12.2) In diesem Falle ist sofort zu zeigen, dass es einen einzigen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$ gibt, der ψ in sich enthält, und in $\mathfrak{U}$ gilt

$$\Xi(s)=\chi_1^{(1)}(s)+\chi_2^{(1)}(s)+\chi_1^{(2)}(s)+\chi_2^{(2)}(s)+\chi_1^{(3)}(s)+\chi_2^{(3)}(s).$$

13) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_6^*$. In diesem Falle kommen 4 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 2),$$
$$\chi_i^{(2)}(s) = \psi(d_3 s d_3^{-1}) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 2).$$

Es sei nun $\Xi = \alpha\chi_i^{(j)} + \cdots$ in $\mathfrak{U}$, dann ist $\alpha \leqq 1$. Es gibt, wegen $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_6^*$, einen einfachen Charakter von $\mathfrak{U}^*$, der in $\mathfrak{H}$ $2(\psi(s) + \cdots)$ ist; folglich muss ein einfacher Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$ existieren, welcher in $\mathfrak{H}$ gleich

$$2(\psi(s) + \cdots)$$

ist. Deshalb gibt es drei einfache Charaktere Ξ_i $(1 \leqq i \leqq 3)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, woraus sich ergibt (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$
Ξ_1	1		1	
Ξ_2		1		1
Ξ_3	1	1	1	1

14) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{12}^*$. In diesem Falle kommen zwei Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i(s) = \psi(s) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \ (1 \leqq i \leqq 2).$$

Es sei nun $\Xi = \alpha\chi_i + \cdots$ in $\mathfrak{U}$, dann ist natürlich $\alpha \leqq 2$. Zieht man zunächst die Charaktere von $\mathfrak{U}^*$ in Betracht, so kommen zwei verschiedene Fälle vor:

14.1) Falls ein einfacher Charakter χ^* von $\mathfrak{U}^*$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\chi^*(s) = 3(\psi(s) + \cdots)$$

ist, gibt es mindestens einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{H}$ $3\psi(s) + \cdots$ ist. Dann gibt es ersichtlich 4 einfache Charaktere Ξ_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und sofort haben wir (bei passender Wahl):

	χ_1	χ_2
Ξ_1	1	
Ξ_2	1	
Ξ_3	1	
Ξ_4	1	2

14.2) Falls ein einfacher Charakter χ^* von $\mathfrak{U}^*$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\chi^*(s) = 2(\psi(s) + \cdots)$$

ist, gibt es zunächst einen einfachen Charakter Ξ_1, der in $\mathfrak{U}$ $\chi_1 + \chi_2$ ist.

Ausser diesem Charakter existiert noch mindestens ein einfacher Charakter Ξ_2, der χ_1 in sich enthält. Wäre nun in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_2 = 2\chi_1,$$

dann wäre, wegen $\chi_1(s) + \chi_2(s) = 0$ für $s \in \mathfrak{H}_4 - \mathfrak{H}$, in $\mathfrak{H}_4 - \mathfrak{H}$

$$\Xi_{\chi_1}(s) = \Xi_1(s) + 2\Xi_2(s) = 4\chi_1(s).$$

Nach (2) folgte damit

$$\chi_1(d_1 s d_1^{-1}) = 3\chi_1(s) \quad \text{in } \mathfrak{H}_4 - \mathfrak{H},$$

und daher wäre

$$\chi_1(s) = \chi_1(d_1^2 s d_1^{-2}) = 3\chi_1(d_1 s d_1^{-1}) = 9\chi_1(s),$$

d.h.

$$\chi_1(s) = 0 \quad \text{in } \mathfrak{H}_4 - \mathfrak{H},$$

was ein Widerspruch ist.

Schliesslich gibt es drei einfache Charaktere Ξ_i $(1 \leqq i \leqq 3)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben:

	χ_1	χ_2
Ξ_1	1	1
Ξ_2	1	1
Ξ_3	1	1

15) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{24}^*$.

15.1) Falls $\chi_1(s) = \psi(s) + \cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 4 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i(s) = \psi(s) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \ (1 \leqq i \leqq 4).$$

Zunächst ist $\Xi_{\chi_i} = 6\chi_i$ in $\mathfrak{U}$ unmöglich. Denn sonst wäre für $s \in \mathfrak{H}_4 - \mathfrak{H}$ $\chi_i(d_1 s d_1^{-1}) = 5\chi_i(s)$, und daher müsste in $\mathfrak{H}_4 - \mathfrak{H}$

$$\chi_i(s) = 0$$

sein, was natürlich ein Widerspruch ist.

Zieht man nun die Charaktere von $\mathfrak{H}_{24}^*$ in Betracht, dann ist sofort zu zeigen, dass es mindestens einen einfachen Charakter Ξ derart gibt, dass in $\mathfrak{H}$

$$\Xi(s) = \alpha(\psi(s) + \cdots) \quad (\alpha \geqq 3)$$

ist. Aber es sei nun $\Xi = \beta\chi_i + \cdots$, dann ist natürlich $\beta \leqq 2$. Also ist in $\mathfrak{U}$ (bei passender Wahl)

A) $$\Xi = 2\chi_1 + \cdots,$$

B) $$\Xi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$$

oder

C) $$\Xi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4.$$

Aber A) und C) sind unmöglich, was man folgenderweise nachweisen kann:

Im Falle A) ist in $\mathfrak{U}$ weder $\Xi = 2\chi_1 + 2\chi_2$ noch $\Xi = 2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3$. Denn sonst wäre $6\mathrm{Gr}(\chi_1) = \mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_1}) \geqq 2\mathrm{Gr}(\Xi) = 8\mathrm{Gr}(\chi_1)$. Daher ist in $\mathfrak{U}$

$$\Xi = 2\chi_1 + \chi_2.$$

Andererseits gibt es zwei einfache Charaktere von $\mathfrak{H}_{24}^*$, die in $\mathfrak{H}$ gleich 3ψ sind, und einen einfachen Charakter, der in $\mathfrak{H}$ gleich 2ψ ist, so existieren 5 einfache

Charaktere von $\mathfrak{G}$. Folgende zwei verschiedene Fälle kommen damit vor (in $\mathfrak{U}$):

A.1) $\quad \Xi_1=2\chi_1+\chi_2, \quad \Xi_2=2\chi_3+\chi_4,$

$\qquad \Xi_3=\chi_2+\chi_4, \quad \Xi_4=\chi_2, \quad \Xi_5=\chi_4;$

A.2) $\quad \Xi_1=2\chi_1+\chi_2, \quad \Xi_2=\chi_2+\chi_3+\chi_4,$

$\qquad \Xi_3=\chi_3+\chi_4, \quad \Xi_4=\chi_3, \quad \Xi_5=\chi_4.$

Im Falle A.1) sind für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1(d_1sd_1^{-1})=3\chi_1(s)+2\chi_2(s),$$
$$\chi_2(d_1sd_1^{-1})=2\chi_1(s)+2\chi_2(s)+\chi_4(s),$$

und

$$\chi_3(d_1sd_1^{-1})=\chi_2(s)+2\chi_3(s)+2\chi_4(s);$$

daraus folgen in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$6\chi_1+5\chi_2+\chi_4=0 \quad \text{und} \quad 4\chi_1+3\chi_2+\chi_4=0.$$

Daher muss in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1(s)=-\chi_2(s)$$

sein, was ein Widerspruch ist.

Im Falle A.2) sind für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1(d_1sd_1^{-1})=3\chi_1(s)+2\chi_2(s) \quad \text{und} \quad \chi_2(d_1sd_1^{-1})=\chi_1(s);$$

daraus folgen in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$3\chi_1+\chi_2=0 \quad \text{und} \quad 5\chi_1+3\chi_2=0.$$

Daher muss in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1(s)=\chi_2(s)=0$$

sein, was ein Widerspruch ist.

Im Falle C) gibt es zunächst zwei andere einfache Charaktere Ξ_2, Ξ_3, die ψ in sich enthalten, und in $\mathfrak{U}$ seien

$$\Xi_2=\chi_1+\chi_3, \qquad \Xi_3=\chi_2+\chi_4.$$

Dann sind für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1(d_1sd_1^{-1})=\chi_3(s) \quad \text{und} \quad \chi_2(d_1sd_1^{-1})=\chi_4(s).$$

Ferner seien $\chi_1(s)=\chi_\eta(s)$ und $\chi_3(s)=\chi_{\eta\hat{\eta}^{(i)}}(s)$, wobei $\eta(s)$, $\hat{\eta}^{(i)}(s)$ einen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_4$ bzw. den Nicht-Hauptcharakter von $\mathfrak{H}_4/\mathfrak{H}$ mit der Bedingung: $\hat{\eta}^{(i)}(a_i)=1$ bezeichnet. Dann sind in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1(s)=\eta(s)+\eta(bsb^{-1})+\eta(b^2sb^{-2})$$

und

$$\chi_3(s)=\eta(s)\hat{\eta}^{(i)}(s)+\eta(bsb^{-1})\hat{\eta}^{(i+1)}(s)+\eta(b^2sb^{-2})\hat{\eta}^{(i+2)}(s);$$

daraus ergibt sich

$$\eta(d_1sd_1^{-1})=\eta(b^\mu sb^{-\mu})\hat{\eta}^{(\nu)}(s)$$

in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$. Und es ist

$$\eta(b^{2\mu}d_1sd_1^{-1}b^{-2\mu})=\eta(d_1b^\mu sb^{-\mu}d_1^{-1})=\eta(b^{2\mu}sb^{-2\mu})\hat{\eta}^{(\nu)}(b^\mu sb^{-\mu});$$

dabei denken wir uns $\eta(s)$ so gewählt, dass in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\eta(d_1 s d_1^{-1})=\eta(s)\hat{\eta}^{(i)}(s)$$

ist. Dann ist in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\eta(s)=\eta(d_1 s d_1^{-1})\hat{\eta}^{(i)}(d_1 s d_1^{-1})=\eta(s)\hat{\eta}^{(i)}(s)\hat{\eta}^{(i)}(d_1 s d_1^{-1})\,;$$

folglich muss $i=2$ sein. Setzt man daher $\chi_2=\chi_{\eta\hat{\eta}^{(1)}}$ und $\chi_4=\chi_{\eta\hat{\eta}^{(3)}}$, so ist für $s\in \mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\begin{aligned}\chi_2(d_1 s d_1^{-1})&=\eta(d_1 s d_1^{-1})\hat{\eta}^{(1)}(d_1 s d_1^{-1})+\cdots\\&=\eta(s)\hat{\eta}^{(1)}(s)+\cdots \qquad (\text{wegen } \hat{\eta}^{(1)}(d_1 s d_1^{-1})=\hat{\eta}^{(3)}(s))\\&=\chi_2(s),\end{aligned}$$

was auch ein Widerspruch ist.

Im Falle B) nehmen wir, genauso wie im Falle C), an:

$$\eta(d_1 s d_1^{-1})=\eta(s)\hat{\eta}^{(2)}(s) \quad \text{für} \quad s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \chi_{i+1}(s)=\chi_{\eta\hat{\eta}^{(i)}}(s).$$

Dann sind für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_3(d_1 s d_1^{-1})=\chi_1(s), \quad \chi_2(d_1 s d_1^{-1})=\chi_2(s) \quad \text{und} \quad \chi_4(d_1 s d_1^{-1})=\chi_4(s).$$

Daher gibt es 5 einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 5)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
Ξ_1		1		
Ξ_2				1
Ξ_3		1		1
Ξ_4	1	1	1	
Ξ_5	1		1	1

15.2) Falls $\chi(s)=2\psi(s)+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommt nur dieser Charakter χ in Betracht. Weil es mindestens einen einfachen Charakter Ξ derart gibt, dass in $\mathfrak{H}$

$$\Xi(s)=\alpha(\psi(s)+\cdots) \qquad (\alpha\geqq 3)$$

ist, so gibt es drei einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 3)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, woraus sich ergibt:

	χ
Ξ_1	1
Ξ_2	1
Ξ_3	2

16) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{U}^*$. In diesem Falle kommen 4 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned}&\chi_i(s)=\psi(s)+\cdots &&\text{in } \mathfrak{H} &&(1\leqq i\leqq 2),\\&\chi_i(s)=2(\psi(s)+\cdots) &&\text{in } \mathfrak{H} &&(3\leqq i\leqq 4).\end{aligned}$$

Zunächst sind in $\mathfrak{H}_5$

$$\chi_1=\chi_2=\xi+\xi', \quad \chi_3=\xi\hat{\xi}+\xi\hat{\xi}^4+2\xi' \quad \text{und} \quad \chi_4=\xi\hat{\xi}^2+\xi\hat{\xi}^3+2\xi',$$

wobei ξ einen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_5$, der in $\mathfrak{H}$ gleich ψ ist, ξ' den einfachen $\xi'=\xi_{\psi(bsb^{-1})}$ von $\mathfrak{H}_5$ und $\hat{\xi}$ einen erzeugenden von $\mathfrak{H}_5/\mathfrak{H}$ bedeutet. Dann gibt es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$ mit $\chi_i(s)\neq 0$, so ist, wegen (4), in $\mathfrak{U}$

A) $$\Xi_{\chi_1}=\chi_1+\chi_2+\chi_3+\chi_4$$

oder

B) $$\Xi_{\chi_1}=2\chi_1+\chi_3+\chi_4.$$

Im Falle A) ist $\Xi_4=\Xi_{\chi_1}$ ersichtlich ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$ und es gibt drei andere einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 3)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten.

Im Falle B) ist ersichtlich in $\mathfrak{U}$ $\Xi_{\chi_2}=2\chi_2+\chi_3+\chi_4$.

Gäbe es erstens zwei einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2 von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_1=\chi_1+\chi_3+\chi_4 \quad \text{und} \quad \Xi_2=\chi_2+\chi_3+\chi_4$$

wären, dann existierten vier andere einfache Charaktere Ξ_3, Ξ_4, Ξ_5, Ξ_6 derart, dass in $\mathfrak{U}$ $\Xi_i=\chi_{i-2}$ $(3\leqq i\leqq 6)$ wäre. Zieht man aber die Zerlegung dieser Charaktere in $\mathfrak{U}^*$ in Betracht, so können nicht alle diejenigen einfachen Charaktere von $\mathfrak{U}^*$ erscheinen, die ψ in sich enthalten, was ein Widerspruch ist.

Gäbe es zweitens zwei einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2 von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_1=\chi_1+\chi_3 \quad \text{und} \quad \Xi_2=\chi_2+\chi_3$$

wären, dann existierten drei andere einfache Charaktere Ξ_3, Ξ_4, Ξ_5 derart, dass in $\mathfrak{U}$ $\Xi_3=\chi_1+\chi_4$, $\Xi_4=\chi_2+\chi_4$, $\Xi_5=\chi_3+2\chi_4$ wären, was ein Widerspruch gegen $\Xi_{\chi_4}(s)=\chi_4(s)$ für $s\in\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$ ist.

Deshalb gibt es zwei einfache Charaktere Ξ_2, Ξ_5 von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_2=\chi_2+\chi_3 \quad \text{und} \quad \Xi_5=\chi_1+\chi_3+\chi_4$$

sind, und es gibt noch drei andere einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_3, Ξ_4 von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten.

Schliesslich kommen zwei verschiedene Fälle vor:

16.1) Falls ein einfacher Charakter χ^* von $\mathfrak{U}^*$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\chi^*(s)=\psi(s)$$

ist, gibt es 5 einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
Ξ_1	1			
Ξ_2		1	1	
Ξ_3		1		1
Ξ_4			1	1
Ξ_5	1		1	1

16.2) Falls ein einfacher Charakter χ^* von $\mathfrak{U}^*$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\chi^*(s)=2\psi(s)$$

ist, gibt es 4 einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
Ξ_1			1	
Ξ_2				1
Ξ_3			1	1
Ξ_4	1	1	1	1

17) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^\sharp$. In diesem Falle kommen drei Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi^{(2)}(s)=\chi_{\psi^{(2)}}(s).$$

Es sei nun $\Xi=\alpha\chi_i^{(1)}+\cdots$ in $\mathfrak{U}$, dann ist $\alpha\leqq 1$.

Wäre $\Xi=\chi_1^{(1)}+\chi_2^{(1)}+2\chi^{(2)}$ in $\mathfrak{U}$, dann wäre nur dieser Charakter Ξ derjenige, welcher ψ in sich enthielte. Aber dieser Charakter Ξ zerfiele in höchstens zwei einfache Charaktere in $\mathfrak{H}_4^\sharp$, die in $\mathfrak{H}$ gleich ψ wären, gegen die Annahme, dass es vier solche Charaktere gibt.

Deshalb gibt es 4 einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 4)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, woraus folgt:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi^{(2)}$
Ξ_1	1		1
Ξ_2	1		1
Ξ_3		1	1
Ξ_4		1	1

18) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_8$.

18.1) Falls $\chi_1^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 4),$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_2sd_2^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 2).$$

Es sei nun $\Xi=\alpha\chi_i^{(1)}+\cdots$ in $\mathfrak{U}$, so ist $\alpha\leqq 1$. Ausserdem sind die ψ enthaltenden einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}_8$ die folgenden fünf:

$$\vartheta_i(s)=\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 4),$$
$$\vartheta'(s)=2\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H}.$$

Folglich gibt es nur einen einfachen Charakter von $\mathfrak{G}$, der zwei von $\chi_i^{(1)}$ $(1\leqq i\leqq 4)$ in sich enthält. Also gibt es 5 einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 5)$, die ψ in sich enthalten. Es seien in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_i=\chi_1^{(1)}+\cdots \ (1\leqq i\leqq 2), \qquad \Xi_i=\chi_3^{(1)}+\cdots \ (3\leqq i\leqq 4), \qquad \Xi_5=\chi_2^{(1)}+\chi_4^{(1)}+\cdots.$$

Dann kommen drei verschiedene Fälle vor (in $\mathfrak{U}$):

A) $\Xi_i=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}\quad(1\leqq i\leqq 2),\qquad \Xi_i=\chi_3^{(1)}+\chi_1^{(2)}\quad(3\leqq i\leqq 4),$
$\Xi_5=\chi_2^{(1)}+\chi_4^{(1)}+2\chi_2^{(2)}$;

B) $\Xi_i=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}\quad(1\leqq i\leqq 2),\qquad \Xi_i=\chi_3^{(1)}+\chi_2^{(2)}\quad(3\leqq i\leqq 4),$
$\Xi_5=\chi_2^{(1)}+\chi_4^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_2^{(2)}$;

C) $\Xi_1=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)},\qquad \Xi_2=\chi_1^{(1)}+\chi_2^{(2)},\qquad \Xi_3=\chi_3^{(1)}+\chi_1^{(2)},$
$\Xi_4=\chi_3^{(1)}+\chi_2^{(2)},\qquad \Xi_5=\chi_2^{(1)}+\chi_4^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_2^{(2)}.$

Aber A) und B) sind unmöglich, was man folgenderweise nachweisen kann:

Im Falle A) sind für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(1)}(d_1sd_1^{-1})=\chi_1^{(1)}(s)+2\chi_1^{(2)}(s),$$
$$\chi_1^{(2)}(d_1sd_1^{-1})=2\chi_1^{(1)}(s)+2\chi_3^{(1)}(s)+3\chi_1^{(2)}(s)\,;$$

daraus folgt in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(1)}+\chi_3^{(1)}+2\chi_1^{(2)}=0,$$

was ein Widerspruch ist (vgl. 8.2) und 11.2)).

Im Falle B) sind für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(1)}(d_1sd_1^{-1})=\chi_1^{(1)}(s)+2\chi_1^{(2)}(s),$$
$$\chi_1^{(2)}(d_1sd_1^{-1})=2\chi_1^{(1)}(s)+\chi_2^{(1)}(s)+\chi_4^{(1)}(s)+\chi_1^{(2)}(s)\,;$$

daraus folgt in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$2\chi_1^{(1)}+\chi_2^{(1)}+\chi_4^{(1)}+2\chi_1^{(2)}=0,$$

was auch ein Widerspruch ist.

Im Falle C) sind, bei passender Numerierung (vgl. 15.1)), für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(1)}(d_1sd_1^{-1})=\chi_1^{(1)}(s),\qquad \chi_3^{(1)}(d_1sd_1^{-1})=\chi_3^{(1)}(s),\qquad \chi_4^{(1)}(d_1sd_1^{-1})=\chi_2^{(1)}(s).$$

Daher sehen wir ein:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$
Ξ_1	1				1	
Ξ_2	1					1
Ξ_3			1		1	
Ξ_4			1			1
Ξ_5		1		1	1	1

18.2) Falls $\chi^{(1)}(s)=2(\psi(s)+\cdots)$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen drei Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi^{(1)}(s)=2(\psi(s)+\cdots)\qquad \text{in } \mathfrak{H},$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_2sd_2^{-1})+\cdots\qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq i\leqq 2).$$

Dann gibt es ersichtlich zwei einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2 von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten.

Wegen $\chi^{(1)}(s)=0$ für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ ist $\Xi_1=\chi^{(1)}+2\chi_i^{(2)}$ unmöglich (vgl. 14.2)), woraus sich ergibt:

	$\chi^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$
Ξ_1	1	1	1
Ξ_2	1	1	1

19) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_9$. In diesem Falle kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_3sd_3^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 3).$$

Zieht man die Charaktere von $\mathfrak{H}_{36}$ in Betracht, so kommen zwei verschiedene Fälle vor:

19.1) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\varphi(s)=\psi(s)+\cdots$$

ist, ist für einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$

$$\Xi(s)=\chi_i^{(1)}(s)+\chi_j^{(1)}(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{U},$$
$$=2(\psi(s)+\cdots) \quad \text{in } \mathfrak{H}$$

unmöglich. Denn sonst gäbe es noch 5 andere einfache Charaktere, die in $\mathfrak{H}$ gleich

$$\psi(s)+\cdots$$

wären. Folglich gäbe es höchstens 7 einfache Charaktere von $\mathfrak{H}_{36}$, die ψ in sich enthielten, was ein Widerspruch gegen Hilfssatz 3 ist. Also gibt es 9 einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 9)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\Xi_i=\chi_1^{(1)}+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{U} \quad (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\Xi_i=\chi_2^{(1)}+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{U} \quad (4\leqq i\leqq 6),$$
$$\Xi_i=\chi_3^{(1)}+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{U} \quad (7\leqq i\leqq 9).$$

Aber für $\chi_i^{(2)}$ gelten die gleichartigen Relationen. Also kommen 5 verschiedene Fälle vor (in $\mathfrak{U}$):

A) $\Xi_i=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}$ $(1\leqq i\leqq 3)$, $\Xi_i=\chi_2^{(1)}+\chi_2^{(2)}$ $(4\leqq i\leqq 6)$,
$\Xi_i=\chi_3^{(1)}+\chi_3^{(2)}$ $(7\leqq i\leqq 9)$;

B) $\Xi_i=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}$ $(1\leqq i\leqq 3)$, $\Xi_i=\chi_2^{(1)}+\chi_2^{(2)}$ $(4\leqq i\leqq 5)$,
$\Xi_6=\chi_2^{(1)}+\chi_3^{(2)}$, $\Xi_7=\chi_3^{(1)}+\chi_2^{(2)}$,
$\Xi_i=\chi_3^{(1)}+\chi_3^{(2)}$ $(8\leqq i\leqq 9)$;

C) $\Xi_i=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}$ $(1\leqq i\leqq 2)$, $\Xi_3=\chi_1^{(1)}+\chi_2^{(2)}$,
$\Xi_i=\chi_2^{(1)}+\chi_2^{(2)}$ $(4\leqq i\leqq 5)$, $\Xi_6=\chi_2^{(1)}+\chi_3^{(2)}$,
$\Xi_7=\chi_3^{(1)}+\chi_1^{(2)}$, $\Xi_i=\chi_3^{(1)}+\chi_3^{(2)}$ $(8\leqq i\leqq 9)$;

D) $\Xi_i=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}$ $(1\leqq i\leqq 2)$, $\Xi_3=\chi_1^{(1)}+\chi_2^{(2)}$,
$\Xi_4=\chi_2^{(1)}+\chi_2^{(2)}$, $\Xi_i=\chi_2^{(1)}+\chi_3^{(2)}$ $(5\leqq i\leqq 6)$,
$\Xi_i=\chi_3^{(1)}+\chi_{i-6}^{(2)}$ $(7\leqq i\leqq 9)$;

E) $\Xi_i=\chi_1^{(1)}+\chi_i^{(2)}$ $(1\leqq i\leqq 3)$, $\Xi_i=\chi_2^{(1)}+\chi_{i-3}^{(2)}$ $(4\leqq i\leqq 6)$,
$\Xi_i=\chi_3^{(1)}+\chi_{i-6}^{(2)}$ $(7\leqq i\leqq 9)$.

Aber A), B), C) und D) sind unmöglich, was man folgenderweise beweisen kann (vgl. 8.2)):

In den Fällen A) und B) sind für $s \in \mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(1)}(d_1 s d_1^{-1}) + \chi_1^{(1)}(d_2 s d_2^{-1}) = 2\chi_1^{(1)}(s) + 3\chi_1^{(2)}(s),$$
$$\chi_1^{(2)}(d_1 s d_1^{-1}) + \chi_1^{(2)}(d_2 s d_2^{-1}) = 3\chi_1^{(1)}(s) + 2\chi_1^{(2)}(s),$$

und daher muss in $\mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(1)}(s) + \chi_1^{(2)}(s) = 0$$

sein, was ein Widerspruch ist.

Im Falle C) muss in $\mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$, genauso wie in den Fällen A) und B),

$$\chi_1^{(1)}(s) + 2\chi_1^{(2)}(s) + \chi_2^{(2)}(s) = 0$$

sein, was ein Widerspruch ist.

Im Falle D) sind für $s \in \mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$

a) $\qquad \chi_1^{(1)}(d_1 s d_1^{-1}) + \chi_1^{(1)}(d_2 s d_2^{-1}) = 2\chi_1^{(1)}(s) + 2\chi_1^{(2)}(s) + \chi_2^{(2)}(s),$

b) $\qquad \chi_3^{(1)}(d_1 s d_1^{-1}) + \chi_3^{(1)}(d_2 s d_2^{-1}) = 2\chi_3^{(1)}(s),$

c) $\qquad \chi_1^{(2)}(d_1 s d_1^{-1}) + \chi_1^{(2)}(d_2 s d_2^{-1}) = 2\chi_1^{(1)}(s) + \chi_3^{(1)}(s) + 2\chi_1^{(2)}(s),$

d) $\qquad \chi_2^{(2)}(d_1 s d_1^{-1}) + \chi_2^{(2)}(d_2 s d_2^{-1}) = 2\chi_2^{(2)}(s).$

Aus a) folgt, wegen c) und d),

$$2(2\chi_1^{(1)} + \chi_3^{(1)}) + 3(2\chi_1^{(2)} + \chi_2^{(2)}) = 0 \qquad \text{in } \mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H},$$

und aus c) folgt, wegen a) und b),

$$3(2\chi_1^{(1)} + \chi_3^{(1)}) + 2(2\chi_1^{(2)} + \chi_2^{(2)}) = 0 \qquad \text{in } \mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H};$$

folglich muss in $\mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$

$$2\chi_1^{(1)} + \chi_3^{(1)} = 0$$

sein. Andererseits ist in $\mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$ $\chi_1^{(1)} + \chi_2^{(1)} + \chi_3^{(1)} = 0$. Also muss in $\mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$

$$\chi_1^{(1)}(s) = \chi_2^{(1)}(s)$$

sein, was auch ein Widerspruch ist.

Deshalb sehen wir ein:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1			1		
Ξ_2	1				1	
Ξ_3	1					1
Ξ_4		1		1		
Ξ_5		1			1	
Ξ_6		1				1
Ξ_7			1	1		
Ξ_8			1		1	
Ξ_9			1			1

19.2) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\varphi(s) = 3\psi(s) + \cdots$$

ist, muss ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$ existieren, der in $\mathfrak{H}$ gleich $\alpha\psi+\cdots$ $(\alpha\geqq 3)$ ist. Also gibt es einen einzigen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, der ψ in sich enthält, und in $\mathfrak{U}$ ist

$$\Xi(s)=\chi_1^{(1)}(s)+\chi_2^{(1)}(s)+\chi_3^{(1)}(s)+\chi_1^{(2)}(s)+\chi_2^{(2)}(s)+\chi_3^{(2)}(s).$$

20) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{18}$. In diesem Falle kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{lll} \chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2),\\ \chi_3^{(1)}(s)=2(\psi(s)+\cdots) & \text{in } \mathfrak{H}, & \\ \chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_3sd_3^{-1})+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2),\\ \chi_3^{(2)}(s)=2(\psi(d_3sd_3^{-1})+\cdots) & \text{in } \mathfrak{H}. & \end{array}$$

20.1) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\varphi(s)=\psi(s)+\cdots$$

ist, ist ersichtlich für einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$

$$\Xi=\chi_i^{(1)}+\chi_3^{(1)}+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{U}\ (i=1 \text{ oder } 2)$$

unmöglich.

Wäre nun

$$\begin{aligned} \Xi_{\chi_3^{(1)}}&=\Xi_{\chi_3^{(2)}} && \text{in } \mathfrak{G}\\ &=6(\chi_3^{(1)}+\chi_3^{(2)}) && \text{in } \mathfrak{U}, \end{aligned}$$

dann wären für $s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$

$$\chi_3^{(1)}(d_1sd_1^{-1})+\chi_3^{(1)}(d_2sd_2^{-1})=5\chi_3^{(1)}(s)+6\chi_3^{(2)}(s),$$
$$\chi_3^{(2)}(d_1sd_1^{-1})+\chi_3^{(2)}(d_2sd_2^{-1})=6\chi_3^{(1)}(s)+5\chi_3^{(2)}(s)\ ;$$

und daher in $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ müsste

$$\chi_3^{(1)}(s)+\chi_3^{(2)}(s)=0$$

sein, was ein Widerspruch ist.

Also gibt es zwei einfache Charaktere Ξ_3, Ξ_4 von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_3=\chi_1^{(1)}+\chi_2^{(1)}+\chi_3^{(2)} \quad \text{und} \quad \Xi_4=\chi_3^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_2^{(2)}$$

sind. Es gibt noch 4 andere einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2, Ξ_5, Ξ_6 von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1			1		
Ξ_2		1			1	
Ξ_3	1	1				1
Ξ_4			1	1	1	
Ξ_5			1			1
Ξ_6			1			1

20.2) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\varphi(s)=3\psi(s)+\cdots$$

ist, gibt es ersichtlich zwei einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2 von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und sofort sehen wir ein (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1		1	1		1
Ξ_2		1	1		1	1

21) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_{36}$. In diesem Falle kommen drei Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i(s) = \psi(s) + \cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \ (1 \leqq i \leqq 2),$$
$$\chi_3(s) = 2(\psi(s) + \cdots) \qquad \text{in } \mathfrak{H}.$$

21.1) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ existiert, der in $\mathfrak{H}$ gleich

$$\psi(s)$$

ist, müssen zwei einfache Charaktere Ξ_5, Ξ_6 von $\mathfrak{G}$ existieren, die in $\mathfrak{H}$ gleich $4\psi + \cdots$ sind. Es sei nun $\Xi_j = \alpha\chi_i + \cdots$ ($i=1$ oder 2; $j=5$ oder 6) in $\mathfrak{U}$. Dann ist

$$60\,\mathrm{Gr}(\psi) = \mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_i}) \geqq \alpha\,\mathrm{Gr}(\Xi_j) = 40\,\alpha\,\mathrm{Gr}(\psi);$$

folglich muss $\alpha \leqq 1$ sein. Wäre es in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_5 = \Xi_6 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3,$$

dann wäre

$$60\,\mathrm{Gr}(\psi) \geqq \mathrm{Gr}(\Xi_5) + \mathrm{Gr}(\Xi_6) = 80\,\mathrm{Gr}(\psi).$$

Es gibt noch 4 andere einfache Charaktere Ξ_i ($1 \leqq i \leqq 4$) von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, woraus sich ergibt:

	χ_1	χ_2	χ_3
Ξ_1	1		
Ξ_2	1		
Ξ_3		1	
Ξ_4		1	
Ξ_5	1	1	1
Ξ_6			2

21.2) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ existiert, der in $\mathfrak{H}$ gleich

$$3\psi(s)$$

ist, ist natürlich für einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$

$$\Xi = \chi_1 + \chi_2 + \cdots \qquad \text{in } \mathfrak{U}$$

unmöglich. Also gibt es 4 einfache Charaktere Ξ_i ($1 \leqq i \leqq 4$) von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, woraus folgt:

	χ_1	χ_2	χ_3
Ξ_1	1		1
Ξ_2	1		1
Ξ_3		1	1
Ξ_4		1	1

22) $\mathfrak{G}_\varphi=\mathfrak{G}$.

22.1) Falls $\chi_1(s)=\psi(s)$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 5 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{ll}
\chi_1(s)=\xi(s) & \text{in } \mathfrak{H}_5 \\
\quad =\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H}, \\
\chi_2(s)=\xi(s)+\xi(s)\hat{\xi}(s)+\xi(s)\hat{\xi}(s)^4 & \text{in } \mathfrak{H}_5 \\
\quad =3\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H}, \\
\chi_3(s)=\xi(s)+\xi(s)\hat{\xi}(s)^2+\xi(s)\hat{\xi}(s)^3 & \text{in } \mathfrak{H}_5 \\
\quad =3\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H}, \\
\chi_4(s)=\sum_{i=1}^{4}\xi(s)\hat{\xi}(s)^i & \text{in } \mathfrak{H}_5 \\
\quad =4\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H}, \\
\chi_5(s)=\sum_{i=0}^{4}\xi(s)\hat{\xi}(s)^i & \text{in } \mathfrak{H}_5 \\
\quad =5\psi(s) & \text{in } \mathfrak{H},
\end{array}$$

wobei ξ einen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_5$, der in $\mathfrak{H}$ gleich ψ ist und $\hat{\xi}$ einen erzeugenden Charakter von $\mathfrak{H}_5/\mathfrak{H}$ bedeutet. Es sei hierbei bemerkt, dass für mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$ $\xi(s)\neq 0$ und zwar $\sum_{i=0}^{4}\xi(s)\hat{\xi}(s)^i=0$ ist.

Wegen $\Xi_{\chi_1}(s)=\chi_1(s)=\xi(s)$ für $s\in\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$, ist in $\mathfrak{U}$

A) $$\Xi_{\chi_1}=2\chi_1+\chi_4$$

oder

B) $$\Xi_{\chi_1}=\chi_1+\chi_5.$$

Im Falle A) sind für zwei einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2 von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_1=\chi_1, \qquad \Xi_2=\chi_1+\chi_4.$$

Weil kein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$ existiert, der in $\mathfrak{U}$ gleich $\chi_4+3\chi_5$ ist, ist in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_{\chi_4}=\chi_1+\chi_2+\chi_3+3\chi_4+\chi_5.$$

Gäbe es nun einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{U}$ gleich $\chi_2+\chi_3+\chi_4+\chi_5$ wäre, dann wäre für einen einfachen Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$, der in $\mathfrak{H}$ gleich ψ ist, in $\mathfrak{H}_{36}$

$$\Xi=\alpha\varphi+\cdots \quad (\alpha\geqq 1)\,;$$

folglich müsste

$$10\,\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_\varphi)\geqq\alpha\,\mathrm{Gr}(\Xi)=15\,\alpha\mathrm{Gr}(\psi)$$

sein. Also gibt es zwei andere einfache Charaktere Ξ_6, Ξ_7, die χ_4 in sich enthalten, nämlich in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_6=\chi_4+\chi_5, \qquad \Xi_7=\chi_2+\chi_3+\chi_4,$$

und daher gibt es noch drei einfache Charaktere Ξ_3, Ξ_4, Ξ_5, nämlich in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_3=\chi_5, \qquad \Xi_4=\chi_2+\chi_5, \qquad \Xi_5=\chi_3+\chi_5.$$

Im Falle B) ist natürlich $\Xi_3=\Xi_{\chi_1}$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$. In $\mathfrak{U}$ ist weder $\Xi_{\chi_4}=\chi_4+4\chi_5$ noch $\Xi_{\chi_4}=2\chi_2+2\chi_3+3\chi_4$; folglich ist in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_{\chi_4}=\chi_2+\chi_3+2\chi_4+2\chi_5.$$

Ferner existiert kein einfacher Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{U}$ gleich $\chi_4+2\chi_5+\cdots$ ist. Denn sonst wäre

$$30\,\mathrm{Gr}(\psi)\geqq \mathrm{Gr}(\Xi_1)+2\,\mathrm{Gr}(\Xi)\geqq 34\,\mathrm{Gr}(\psi).$$

Also gibt es zwei einfache Charaktere Ξ_4, Ξ_5 von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

B.1) $$\Xi_4=\chi_2+\chi_4+\chi_5, \qquad \Xi_5=\chi_3+\chi_4+\chi_5,$$

oder

B.2) $$\Xi_4=\chi_4+\chi_5, \qquad \Xi_5=\chi_2+\chi_3+\chi_4+\chi_5$$

sind. Aber B.1) ist unmöglich, was man folgenderweise beweisen kann:

Im Falle B.1) gibt es noch einen einfachen Charakter Ξ_2 von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{U}$ gleich

$$\chi_2+\chi_3$$

ist, und in $\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$ sind

$$\Xi_2=\xi, \qquad \Xi_3=\xi, \qquad \Xi_4=\xi\hat{\xi}+\xi\hat{\xi}^4, \qquad \Xi_5=\xi\hat{\xi}^2+\xi\hat{\xi}^3.$$

Andererseits müssen ersichtlich 4 einfache Charaktere φ_i $(1\leqq i\leqq 4)$ von $\mathfrak{H}_{36}$ existieren, die in $\mathfrak{H}$ gleich 3ψ sind.

Wäre nun für ein i $(1\leqq i\leqq 4)$

$$\Xi_4=2\varphi_i+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H}_{36},$$

dann wäre in $\mathfrak{U}$ $\Xi_j=\varphi_i+\cdots$ $(j=2$ oder $3)$; folglich müsste in $\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$

$$\Xi_{\varphi_i}=\Xi_j+2\Xi_4=\xi+2\xi\hat{\xi}+2\xi\hat{\xi}^4$$

sein, was ein Widerspruch genen $\Xi_{\varphi_i}(s)=0$ für $s\in\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$ ist.

Deshalb sind in $\mathfrak{H}_{36}$

$$\Xi_2=\varphi_2+\varphi_4, \qquad \Xi_3=\varphi_1+\varphi_3,$$
$$\Xi_i=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4 \qquad (4\leqq i\leqq 5).$$

Wegen (8) und $\Xi_{\varphi_1}=\Xi_3+\Xi_4+\Xi_5$ ist für $s\in\mathfrak{H}f$

$$\varphi_1(a_3sa_3^{-1})=\varphi_3(s),$$

und entsprechend

$$\varphi_2(a_3sa_3^{-1})=\varphi_4(s).$$

Andererseits ist für $s\in\mathfrak{H}f$, wegen $\Xi_3=\Xi_{\chi_1}$,

$$\Xi_3(s)=\varphi_1(s)+\varphi_3(s)=0\,;$$

folglich muss $\varphi_3(s)=\varphi_1(s)\hat{\varphi}(s)^2$, d. h.

$$\varphi_1(a_3sa_3^{-1})=\varphi_1(s)\hat{\varphi}(s)^2$$

sein. Daher muss

$$\varphi_1(a_3sa_3^{-1})\hat{\varphi}(a_3sa_3^{-1})=\varphi_1(s)\hat{\varphi}(s)^2\hat{\varphi}(s)^3=\varphi_1(s)\hat{\varphi}(s)$$

sein, d. h.

$$\varphi_2(a_3sa_3^{-1})=\varphi_2(s), \qquad \varphi_4(a_3sa_3^{-1})=\varphi_4(s).$$

Daher ist für $s\in\mathfrak{H}f$ $\varphi_2(s)=\varphi_4(s)$, was ein Widerspruch ist.

Im Falle B.2) gibt es noch zwei einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_2 von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, nämlich in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_1=\chi_2, \qquad \Xi_2=\chi_3.$$

Schliesslich haben wir folgende Resultate:

22.1.1) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\varphi(s)=\psi(s)$$

ist, gibt es 7 einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
Ξ_1	1				
Ξ_2	1			1	
Ξ_3					1
Ξ_4		1			1
Ξ_5			1		1
Ξ_6				1	1
Ξ_7		1	1	1	

22.1.2) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\varphi(s)=3\psi(s)$$

ist, gibt es 5 einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
Ξ_1		1			
Ξ_2			1		
Ξ_3	1				1
Ξ_4				1	1
Ξ_5		1	1	1	1

22.2) Falls $\chi_1(s)=2\psi(s)$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 4 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned}
\chi_1(s)&=\xi(s)\hat{\xi}(s)+\xi(s)\hat{\xi}(s)^4 && \text{in } \mathfrak{H}_5\\
&=2\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H},\\
\chi_2(s)&=\xi(s)\hat{\xi}(s)^2+\xi(s)\hat{\xi}(s)^3 && \text{in } \mathfrak{H}_5\\
&=2\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H},\\
\chi_3(s)&=\sum_{i=1}^{4}\xi(s)\hat{\xi}(s)^i && \text{in } \mathfrak{H}_5\\
&=4\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H},\\
\chi_4(s)&=2\xi(s)+\sum_{i=1}^{4}\xi(s)\hat{\xi}(s)^i && \text{in } \mathfrak{H}_5\\
&=6\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H}.
\end{aligned}$$

Wegen $\Xi_{\chi_1}(s)=\chi_1(s)=\xi(s)\hat{\xi}(s)+\xi(s)\hat{\xi}(s)^4$ für $s\in\mathfrak{H}_5-\mathfrak{H}$, ist in $\mathfrak{U}$

A) $$\Xi_{\chi_1}=\chi_1+\chi_3+\chi_4$$

oder

B) $$\Xi_{\chi_1}=2\chi_1+\chi_2+\chi_4.$$

Im Falle A) ist Ξ_{χ_1} natürlich ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$, ebenso der Charakter Ξ_{χ_2}. Also gibt es noch zwei andere einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}$ gleich χ_4 sind.

Im Falle B) gibt es zwei einfache Charaktere Ξ_1, Ξ_3 von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

B.1) $$\Xi_1=\chi_1, \qquad \Xi_3=\chi_1+\chi_2+\chi_4,$$

oder

B.2) $$\Xi_1=\chi_1+\chi_2, \qquad \Xi_3=\chi_1+\chi_4$$

sind. Aber B.1) ist unmöglich.

Im Falle B.1) gibt es zunächst keinen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{U}$ gleich $\chi_3+2\chi_4$ ist. Denn sonst wäre

$$36\,\mathrm{Gr}(\psi)\geqq \mathrm{Gr}(\Xi_1)+2\,\mathrm{Gr}(\Xi)=42\,\mathrm{Gr}(\psi).$$

Also gibt es zwei einfache Charaktere Ξ', Ξ'' von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}$ gleich $\chi_3+\chi_4$ sind. Weil die Grade von Ξ_1, Ξ', Ξ'' gleich $10\mathrm{Gr}(\psi)$ sind, gibt es mindestens 6 einfache Charaktere von $\mathfrak{H}_{36}$, die in $\mathfrak{H}$ gleich ψ sind, was ein Widerspruch ist.

Im Falle B.2) existiert ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{U}$ gleich $\chi_2+\chi_4$ ist. Genauso wie im Falle B.1) gibt es keinen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{U}$ gleich $\chi_3+2\chi_4$ ist, so gibt es drei andere einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die χ_3 in sich enthalten.

Schliesslich haben wir die folgenden Resultate:

22.2.1) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\varphi(s)=\psi(s)$$

ist, gibt es 6 einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 6)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir sehen ein:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
Ξ_1	1	1		
Ξ_2			1	
Ξ_3	1			1
Ξ_4		1		1
Ξ_5			1	1
Ξ_6			1	1

22.2.2) Falls ein einfacher Charakter φ von $\mathfrak{H}_{36}$ derart existiert, dass in $\mathfrak{H}$

$$\varphi(s)=3\psi(s)$$

ist, gibt es 4 einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 4)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir sehen ein:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
Ξ_1				1
Ξ_2				1
Ξ_3	1		1	1
Ξ_4		1	1	1

Mathematisches Institut, Universität zu Tokyo,
den 27. Februar 1959.

Literatur.

[1] Z. Suetuna, Zerlegung der Charaktere einer Gruppe in die ihres Normalteilers, Jap. J. Math., **12** (1935), 95-98.

[2] ——: Abhängigkeit der L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern (Zweite Mitteilung), J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Sec. I, **3**, 4 (1937), 223-252.

[3] ——: Über die Zerlegung der Gruppencharaktere (Zweite Mitteilung), Jap. J. Math., **16** (1940), 79-91.

[4] ——: Zur Theorie der Gruppencharaktere, ebd., **18** (1943), 729-744.

[5] K. Sekino, Über die Zerlegung der Gruppencharaktere, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **7**, 2 (1954), 255-263.