Über die Zerlegung der Gruppencharaktere.
(Dritte Mitteilung.)

Von Kaoru SEKINO.

Um die Zerlegung der Charaktere einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ in die ihres Normalteilers $\mathfrak{H}$ eingehends zu untersuchen, betrachtete Professor Z. Suetuna vielerlei interessante Fälle ([1], [2], [3], [4]). In meinen früheren Arbeiten betrachtete ich die speziellen Fälle, wo $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ eine lineare Gruppe mod 2^n ist, und auch wo $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ die alternierende Gruppe von sechs Symbolen ist ([5], [6]). In der vorliegenden dritten Mitteilung soll der Sonderfall, wo $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ die (einfache) *spezielle projective Gruppe* $PSL(2, 7)$ mit der Ordnung 168 ist, betrachtet werden. Damit werden natürlich alle diejenigen Fälle, wobei die Ordnung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}<504$ ist, erledigt werden.

Es sei also $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ die spezielle projective Gruppe $PSL(2, 7)$. Diese einfache Gruppe wird von zwei Permutationen (14)(56), (1234567) erzeugt; daher denken wir uns

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{U}+\mathfrak{U}d_1+\mathfrak{U}d_2+\mathfrak{U}d_3+\mathfrak{U}d_4+\mathfrak{U}d_5+\mathfrak{U}d_6 \qquad (d_0=1),$$
$$\mathfrak{U}=\mathfrak{H}_{12}+\mathfrak{H}_{12}c,$$
$$\mathfrak{H}_{12}=\mathfrak{H}_4+\mathfrak{H}_4 b+\mathfrak{H}_4 b^2,$$
$$\mathfrak{H}_4=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_1+\mathfrak{H}a_2+\mathfrak{H}a_3 \qquad (a_0=1)$$

mit

$$\mathfrak{H}d_1=(12)(35), \quad \mathfrak{H}d_2=(13)(25), \quad \mathfrak{H}d_3=(14)(56), \quad \mathfrak{H}d_4=(15)(23),$$
$$\mathfrak{H}d_5=(16)(45), \quad \mathfrak{H}d_6=(17)(24), \quad \mathfrak{H}c=(23)(46), \quad \mathfrak{H}b=(235)(476),$$
$$\mathfrak{H}a_1=(26)(34), \quad \mathfrak{H}a_2=(34)(57), \quad \mathfrak{H}a_3=(26)(57),$$

wobei $\mathfrak{U}/\mathfrak{H}$ isomorph mit der symmetrischen Gruppe von vier Symbolen ist.

Wir werden nun in §1 einige Hilfssätze bezüglich der Charaktere von Untergruppen von $\mathfrak{G}$ zusammenstellen und in §2 erläutern wie die in $\mathfrak{G}$ konjugierten Charaktere in bezug auf $\mathfrak{U}$ eingeteilt werden. In §3 wird die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ vornehmlich in die von $\mathfrak{U}$ genau angegeben werden und schliesslich werden wir in §4 die Charaktere von $\mathfrak{G}$ durch die Charaktere von Untergruppen von $\mathfrak{G}$ charakterisieren.

§ 1.

Nunmehr sei $\psi(s)$ ein einfacher Charakter des Normalteilers $\mathfrak{H}$. Ferner seien

$$\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_1, \qquad \mathfrak{H}_2^*=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}c, \qquad \mathfrak{H}_3=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}b+\mathfrak{H}b^2,$$

$$\mathfrak{H}_4^*=\mathfrak{H}_2+\mathfrak{H}_2c, \qquad \mathfrak{H}_4^\#=\sum_{i=0}^{3}\mathfrak{H}e^i \text{ mit } \mathfrak{H}e=(2463)(57),$$

$$\mathfrak{H}_6=\mathfrak{H}_3+\mathfrak{H}_3c, \qquad \mathfrak{H}_8=\mathfrak{H}_4+\mathfrak{H}_4c.$$

Diejenige Gruppe, welche durch die Gesamtheit der Elemente t aus $\mathfrak{U}$ mit der Eigenschaft: $\psi(s)=\psi(tst^{-1})$, erzeugt wird, sei mit $\mathfrak{U}_\psi$ bezeichnet.

Für einen einfachen Charakter $\chi(s)$ von $\mathfrak{U}$ ist in $\mathfrak{H}_{12}$

$$\chi(s)=\xi(s) \qquad \text{oder} \qquad =\xi(s)+\xi(csc^{-1}),$$

wobei $\xi(s)$ einen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_{12}$ bedeutet. Weil die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{H}_{12}$ in die von $\mathfrak{H}$ vollständig angegeben wird ([2]), können wir die ψ enthaltenden einfachen Charaktere von $\mathfrak{U}$ bestimmen. Alsdann gilt der folgende

Hilfssatz 1. 1) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}$ ist, gibt es einen einzigen einfachen Charakter χ von $\mathfrak{U}$, der ψ in sich enthält, nämlich

$$\chi(s)=\sum_{i,j,k}\psi(c^kb^ja_isa_i^{-1}b^{-j}c^{-k}) \qquad \text{in } \mathfrak{H},$$

und in $\mathfrak{U}-\mathfrak{H}$ ist $\chi(s)=0$.

2) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_2$ ist, gibt es genau zwei einfache Charaktere χ_1, χ_2 von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\sum_{\substack{j,k\\ i=0,2}}\psi(c^ka_lb^jsb^{-j}a_l^{-1}c^{-k}) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \ (1\leqq l\leqq 2).$$

3) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_2^*$ ist, gibt es genau zwei einfache Charaktere χ, $\chi\hat{\chi}$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi(s)\hat{\chi}(s)^l=\sum_{i,j}\psi(b^ja_isa_i^{-1}b^{-j}) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \ (0\leqq l\leqq 1),$$

wobei $\hat{\chi}$ den erzeugenden Charakter von $\mathfrak{U}/\mathfrak{H}_{12}$ bedeutet. Alsdann ist in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}e$ $\chi(s)\hat{\chi}(s)^l=0$, und zwar gibt es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}c$ mit $\chi(s)\hat{\chi}(s)^l\neq 0$.

4) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_3$ ist, gibt es genau drei einfache Charaktere χ_1, χ_2, χ_3 von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\sum_{i,k}\psi(c^ka_isa_i^{-1}c^{-k}) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \ (1\leqq l\leqq 3).$$

Es gibt dann mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_l(s)\neq 0$. Natürlich gilt für alle s in $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ $\chi_1(s)+\chi_2(s)+\chi_3(s)=0$.

5) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_4$ ist, kommen zwei Fälle vor:

5.1) Es gibt genau 4 einfache Charaktere χ_l $(1\leqq l\leqq 4)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\sum_{j,k}\psi(c^k b^j s b^{-j} c^{-k}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq l\leqq 4),$$

und in $\mathfrak{H}c$ ist $\chi_l(s)=0$.

5.2) Es gibt einen einzigen einfachen Charakter χ von $\mathfrak{U}$, der ψ in sich enthält, nämlich

$$\chi(s)=2\sum_{j,k}\psi(c^k b^j s b^{-j} c^{-k}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}.$$

6) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_4^*$ ist, kommen zwei Fälle vor:

6.1) Es gibt genau 4 einfache Charaktere χ_1, $\chi_1\hat{\chi}$, χ_2, $\chi_2\hat{\chi}$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)\hat{\chi}(s)^m=\sum_{\substack{j\\ i=0,2}}\psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq l\leqq 2,\ 0\leqq m\leqq 1).$$

In $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}e$ ist dann $\chi_l(s)\hat{\chi}(s)^m=0$. Es gibt mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ mit $\chi_1(s)(=\chi_1(s)\hat{\chi}(s))\neq 0$ und $\chi_2(s)(=\chi_2(s)\hat{\chi}(s))\neq 0$. Für alle s in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ ist natürlich $\chi_1(s)+\chi_2(s)=0$. Es gibt ferner mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}c$ mit $\chi_1(s)\neq 0$ bzw. $\chi_2(s)\neq 0$; dabei ist aber für alle s in $\mathfrak{H}c$ $\chi_1(s)+\chi_1(s)\hat{\chi}(s)=0$ bzw. $\chi_2(s)+\chi_2(s)\hat{\chi}(s)=0$.

6.2) Es gibt einen einzigen einfachen Charakter χ von $\mathfrak{U}$, der ψ in sich enthält, nämlich

$$\chi(s)=2\sum_{\substack{j\\ i=0,2}}\psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1}) \qquad \text{in } \mathfrak{H},$$

und in $\mathfrak{U}-\mathfrak{H}$ ist $\chi(s)=0$.

7) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_4^{\#}$ ist, gibt es genau 4 einfache Charaktere χ_1, $\chi_1\hat{\chi}$, χ_2, $\chi_2\hat{\chi}$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)\hat{\chi}(s)^m=\sum_{\substack{j\\ i=0,2}}\psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq l\leqq 2,\ 0\leqq m\leqq 1).$$

In $\mathfrak{H}c$ ist dann $\chi_l(s)\hat{\chi}(s)^m=0$. Es gibt ferner mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ mit $\chi_1(s)(=\chi_1(s)\hat{\chi}(s))\neq 0$ und $\chi_2(s)(=\chi_2(s)\hat{\chi}(s))\neq 0$; für alle s in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ ist natürlich $\chi_1(s)+\chi_2(s)=0$.

8) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_6$ ist, gibt es genau drei einfache Charaktere χ_1, $\chi_1\hat{\chi}$, χ_2 von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_1(s)\hat{\chi}(s)^l=\sum_i\psi(a_i s a_i^{-1}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (0\leqq l\leqq 1),$$

$$\chi_2(s)=2\sum_i\psi(a_i s a_i^{-1}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}.$$

In $\mathfrak{H}e$ sind dann $\chi_1(s)\hat{\chi}(s)^l=0$ und $\chi_2(s)=0$. Es gibt ferner mindestens ein Element

s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_1(s)(=\chi_1(s)\hat{\chi}(s))\neq 0$ und $\chi_2(s)\neq 0$; dabei ist für alle s in $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ $\chi_1(s)+\chi_2(s)=0$.

9) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_8$ ist, kommen zwei Fälle vor:

9.1) Es gibt genau 5 einfache Charaktere χ_1, $\chi_1\hat{\chi}$, χ_2, $\chi_2\hat{\chi}$, χ_3 von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)\hat{\chi}(s)^m=\sum_j \psi(b^j s b^{-j}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq l\leqq 2,\ 0\leqq m\leqq 1),$$

$$\chi_3(s)=2\sum_j \psi(b^j s b^{-j}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}.$$

In $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ sind dann $\chi_l(s)\hat{\chi}(s)^m=0$ und $\chi_3(s)=0$, und in $\mathfrak{H}c$ und $\mathfrak{H}e$ ist $\chi_3(s)=0$. Es gibt ferner mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}e$ mit $\chi_1(s)\hat{\chi}(s)^m\neq 0$ bzw. $\chi_2(s)\hat{\chi}(s)^m\neq 0$; dabei ist für alle s in $\mathfrak{H}e$ $\chi_1(s)+\chi_1(s)\hat{\chi}(s)=0$ bzw. $\chi_2(s)+\chi_2(s)\hat{\chi}(s)=0$.

9.2) Es gibt genau zwei einfache Charaktere χ, $\chi\hat{\chi}$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi(s)\hat{\chi}(s)^l=2\sum_j \psi(b^j s b^{-j}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (0\leqq l\leqq 1).$$

In $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ ist dann $\chi(s)\hat{\chi}(s)^l=0$. Es gibt ferner mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}e$ mit $\chi(s)\hat{\chi}(s)^l\neq 0$; für alle s in $\mathfrak{H}e$ ist $\chi(s)+\chi(s)\hat{\chi}(s)=0$.

10) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_{12}$ ist, kommen zwei Fälle vor:

10.1) Es gibt 4 einfache Charaktere χ_l $(1\leqq l\leqq 4)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=\psi(s)+\psi(csc^{-1}) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq l\leqq 3),$$

$$\chi_4(s)=3(\psi(s)+\psi(csc^{-1})) \qquad \text{in } \mathfrak{H}.$$

10.2) Es gibt drei einfache Charaktere χ_l $(1\leqq l\leqq 3)$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_l(s)=2(\psi(s)+\psi(csc^{-1})) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq l\leqq 3),$$

und in $\mathfrak{H}c$ ist $\chi_l(s)=0$.

11) Falls $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{U}$ ist, kommen zwei Fälle vor:

11.1) Es gibt 5 einfache Charaktere χ_1, $\chi_1\hat{\chi}$, χ_2, χ_3, $\chi_3\hat{\chi}$ von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_1(s)\hat{\chi}(s)^l=\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (0\leqq l\leqq 1),$$

$$\chi_2(s)=2\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H},$$

$$\chi_3(s)\hat{\chi}(s)^l=3\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (0\leqq l\leqq 1).$$

In $\mathfrak{H}c$ und $\mathfrak{H}e$ ist $\chi_2(s)=0$. In $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ ist $\chi_3(s)\hat{\chi}(s)^l=0$ und es gibt mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_1(s)(=\chi_1(s)\hat{\chi}(s))\neq 0$ und $\chi_2(s)\neq 0$; dabei ist für alle s in $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ $\chi_1(s)+\chi_2(s)=0$. Es gibt mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ mit $\chi_2(s)$ $(=2\chi_1(s)\hat{\chi}(s)^l)\neq 0$ und $\chi_3(s)(=\chi_3(s)\hat{\chi}(s))\neq 0$, wobei für alle s in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ $\chi_1(s)+\chi_3(s)=0$

ist. Es gibt ferner mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}e$ mit $\chi_i(s)\neq 0$ $(i=4, 5)$.

11.2) Es gibt drei einfache Charaktere χ_1, $\chi_1\hat{\chi}$, χ_2 von $\mathfrak{U}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\chi_1(s)\hat{\chi}(s)^l=2\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \ (0\leqq l\leqq 1), \qquad \chi_2(s)=4\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H}.$$

Es gibt dann mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_1(s)(=\chi_1(s)\hat{\chi}(s))\neq 0$ und $\chi_2(s)\neq 0$; dabei ist für alle s in $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ $\chi_1(s)+\chi_2(s)=0$. Ferner gibt es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}e$ mit $\chi_1(s)\hat{\chi}(s)^l\neq 0$; dabei sind für alle s in $\mathfrak{H}e$ $\chi_1(s)+\chi_1(s)\hat{\chi}(s)=0$ und $\chi_2(s)=0$.

Einfachheitshalber wird nur der Beweis für den Fall 3) hier angegeben.

Im Falle 3), unter den zu $\psi(s)$ (in bezug auf $\mathfrak{U}$) konjugierten Charakteren sind die folgenden voneinander verschieden:

$$\psi(b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j}) \qquad (0\leqq i\leqq 3, \ 0\leqq j\leqq 2).$$

Für einen ψ enthaltenden einfachen Charakter χ von $\mathfrak{U}$ ist deshalb in $\mathfrak{H}_{12}$

$$\chi(s)=\xi(s),$$

wobei ξ einen ψ enthaltenden einfachen Charakter von $\mathfrak{H}_{12}$ bedeutet. Also gibt es noch einen anderen einfachen Charakter $\chi\hat{\chi}$ von $\mathfrak{U}$, der ψ in sich enthält. Natürlich ist in $\mathfrak{H}_{12}$ $\chi(s)\hat{\chi}(s)=\xi(s)$. Ferner ist in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ $\xi(s)=0$ ([2], §1), d. h.

$$\chi(s)\hat{\chi}(s)^l=0 \qquad \text{in } \mathfrak{H}_4-\mathfrak{H} \ (0\leqq l\leqq 1).$$

Andererseits bilden die 12 Charaktere $\psi(b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j})$ drei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{H}_4^*$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_i s a_i^{-1})$ $\quad(0\leqq i\leqq 3)$;

b) $\psi(b a_i s a_i^{-1} b^{-1})$ $\quad(i=0, 1)$, $\quad\psi(b^2 a_i s a_i^{-1} b^{-2})$ $\quad(i=2, 3)$;

c) $\psi(b^2 a_i s a_i^{-1} b^{-2})$ $\quad(i=0, 1)$, $\quad\psi(b a_i s a_i^{-1} b^{-1})$ $\quad(i=2, 3)$.

Also sind in $\mathfrak{H}_4^*-\mathfrak{H}$ drei Charaktere η_ψ, $\eta_{\psi(bsb^{-1})}$, $\eta_{\psi(b^2sb^{-2})}$ von $\mathfrak{H}_4^*$ gleich 0. Ferner sollen zwei Charaktere $\chi\hat{\chi}^l$ $(0\leqq l\leqq 1)$ in $\mathfrak{H}_4^*$ gleich $\eta_\psi+\eta_{\psi(bsb^{-1})}+\eta_{\psi(b^2sb^{-2})}$ sein, d. h.

$$\chi(s)\hat{\chi}(s)^l=0 \qquad \text{in } \mathfrak{H}_4^*-\mathfrak{H} \ (0\leqq l\leqq 1).$$

Deshalb gibt es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}c$ mit $\chi(s)\hat{\chi}(s)^l\neq 0$.

Nun seien

$$\mathfrak{H}_7=\sum_{i=0}^{6}\mathfrak{H}f^i \quad \text{mit} \quad \mathfrak{H}f=(1234567), \qquad \mathfrak{H}_{21}=\mathfrak{H}_7+\mathfrak{H}_7 b+\mathfrak{H}_7 b^2.$$

Diejenige Gruppe, welche durch die Gesamtheit der Elemente t aus $\mathfrak{H}_{21}$ mit der Eigenschaft: $\psi(s)=\psi(tst^{-1})$, erzeugt wird, sei mit $\mathfrak{H}_{21\psi}$ bezeichnet. Alsdann ergibt sich sofort der folgende

Hilfssatz 2. 1) Falls $\mathfrak{H}_{21\varphi}=\mathfrak{H}$ ist, gibt es einen einzigen einfachen Charakter φ von $\mathfrak{H}_{21}$, für den in $\mathfrak{H}$

$$\varphi(s)=\sum_{i,j}{}^{\prime}\psi(b^j f^i s f^{-i} b^{-j})$$

ist.

2) Falls $\mathfrak{H}_{21\varphi}=\mathfrak{H}_3$ ist, gibt es drei einfache Charaktere $\varphi\hat{\varphi}^i$ $(0\leqq i\leqq 2)$ von $\mathfrak{H}_{21}$, die in $\mathfrak{H}$ gleich

$$\sum_i{}^{\prime}\psi(f^i s f^{-i})$$

sind, wobei $\hat{\varphi}$ den erzeugenden Charakter von $\mathfrak{H}_{21}/\mathfrak{H}_7$ bedeutet. Es gibt dann mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\varphi(s)\neq 0$. (In $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ ist $\varphi(s)+\varphi(s)\hat{\varphi}(s)+\varphi(s)\hat{\varphi}(s)^2=0$.)

3) Falls $\mathfrak{H}_{21\varphi}=\mathfrak{H}_7$ ist, gibt es 7 einfache Charaktere φ_i $(1\leqq i\leqq 7)$ von $\mathfrak{H}_{21}$, die in $\mathfrak{H}$ gleich

$$\sum_j{}^{\prime}\psi(b^j s b^{-j})$$

sind.

4) Ealls $\mathfrak{H}_{21\varphi}=\mathfrak{H}_{21}$ ist, gibt es 5 einfache Charaktere von $\mathfrak{H}_{21}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\varphi(s)\hat{\varphi}(s)^i=\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \ (0\leqq i\leqq 2), \qquad \varphi_i(s)=3\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \ (1\leqq i\leqq 2).$$

In $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ ist dann $\varphi_i(s)=0$ $(1\leqq i\leqq 2)$. Es gibt mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_7-\mathfrak{H}$ mit $\varphi_i(s)\neq 0$ $(1\leqq i\leqq 2)$ und $\varphi(s)(=\varphi(s)\hat{\varphi}(s)^i)\neq 0$. Ferner ist in $\mathfrak{H}_7-\mathfrak{H}$ $\varphi(s)+\varphi_1(s)+\varphi_2(s)=0$.

Ist nun $\chi(s)$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{U}$, so ist der von χ induzierte Charakter $\Xi_\chi(s)$ von $\mathfrak{G}$ gleich

$$\sum_l{}^{\prime\prime}\chi(d_l s d_l^{-1}), \qquad d_l s d_l^{-1}\in\mathfrak{U}.$$

Also gelten:

(1) $$\Xi_\chi(s)=\sum_{l=0}^{6}{}^{\prime}\chi(d_l s d_l^{-1}) \qquad \text{für } s\in\mathfrak{H},$$

(2) $$\Xi_\chi(s)=\chi(s)+\chi(d_4 s d_4^{-1})+\chi(d_6 s d_6^{-1}) \qquad \text{für } s\in\mathfrak{H}a_1,$$

wobei $d_4 s d_4^{-1}$, $d_6 s d_6^{-1}$ in $\mathfrak{H}a_1 c$ bzw. $\mathfrak{H}c$ ist,

(2′) $$\Xi_\chi(s)=\chi(s)+\chi(d_1 s d_1^{-1})+\chi(d_5 s d_5^{-1}) \qquad \text{für } s\in\mathfrak{H}a_2,$$

wobei $d_1 s d_1^{-1}$, $d_5 s d_5^{-1}$ in $\mathfrak{H}a_2 bc$ bzw. $\mathfrak{H}bc$ ist,

(2″) $$\Xi_\chi(s)=\chi(s)+\chi(d_2 s d_2^{-1})+\chi(d_3 s d_3^{-1}) \qquad \text{für } s\in\mathfrak{H}a_3,$$

wobei $d_2 s d_2^{-1}$, $d_3 s d_3^{-1}$ in $\mathfrak{H}a_3 b^2 c$ bzw. $\mathfrak{H}b^2 c$ ist,

(3) $$\Xi_\chi(s)=\chi(s) \qquad \text{für } s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H},$$

(4) $$\Xi_\chi(s)=\chi(s)+\chi(d_4 s d_4^{-1})+\chi(d_6 s d_6^{-1}) \qquad \text{für } s\in\mathfrak{H}c,$$

wobei $d_4sd_4^{-1}$, $d_6sd_6^{-1}$ in $\mathfrak{H}c$ bzw. $\mathfrak{H}a_1$ ist,

(5) $\quad \Xi_\chi(s)=\chi(s) \qquad$ für $s\in\mathfrak{H}c^i$ $(i=1, 3)$,

(6) $\quad \Xi_\chi(s)=0 \qquad$ für $s\in\mathfrak{H}_7-\mathfrak{H}$.

Ist in $\mathfrak{H}c$ $\chi(s)=0$, so ist mittels (2), (2′) und (2″)

(7) $\quad \Xi_\chi(s)=\chi(s) \qquad$ für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$,

denn $\mathfrak{H}a_1c$, $\mathfrak{H}a_2bc$, $\mathfrak{H}bc$, $\mathfrak{H}a_3b^2c$ und $\mathfrak{H}b^2c$[1] sind konjugiert zu $\mathfrak{H}c$.

Betreffs des von einem einfachen Charakter $\varphi(s)$ von $\mathfrak{H}_{21}$ induzierten Charakters $\Xi_\varphi(s)$ von $\mathfrak{G}$ gelten:

(8) $\quad \Xi_\varphi(s)=\varphi(s)+\varphi(csc^{-1}) \qquad$ für $s\in\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$,

(9) $\quad \Xi_\varphi(s)=\varphi(s) \qquad$ für $s\in\mathfrak{H}_7-\mathfrak{H}$.

§2.

Für einen einfachen Charakter $\psi(s)$ von $\mathfrak{H}$ bildet die Gesamtheit $\mathfrak{G}_\psi$ der Elemente t aus $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft: $\psi(s)=\psi(tst^{-1})$, ersichtlich eine $\mathfrak{H}$ umfassende Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ist sonach

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_\psi+\mathfrak{G}_\psi g_1+\cdots+\mathfrak{G}_\psi g_{n-1},$$

so sind unter den zn $\psi(s)$ (in bezug auf $\mathfrak{G}$) konjugierten genau die folgenden voneinander verschieden:

$$\psi(s),\ \psi(g_1sg_1^{-1}),\ \cdots\cdots,\ \psi(g_{n-1}sg_{n-1}^{-1}).$$

Bedeutet ferner $\psi'(s)$ einen zu $\psi(s)$ konjugierten Charakter $\psi(hsh^{-1})$, so ist $\mathfrak{G}_{\psi'}$ ersichtlich die zu $\mathfrak{G}_\psi$ konjugierte Gruppe $h^{-1}\mathfrak{G}_\psi h$. Also kommen als $\mathfrak{G}_\psi$ genau folgende 15 Gruppen in Betracht:

$$\mathfrak{H},\ \mathfrak{H}_2,\ \mathfrak{H}_3,\ \mathfrak{H}_4,\ \mathfrak{H}_4^*,\ \mathfrak{H}_4^{\sharp},\ \mathfrak{H}_6,\ \mathfrak{H}_7,\ \mathfrak{H}_8,\ \mathfrak{H}_{12},\ \mathfrak{H}_{12}^*,\ \mathfrak{H}_{21},\ \mathfrak{U},\ \mathfrak{U}^*,\ \mathfrak{G},$$

wobei

$$\mathfrak{H}_{12}^*=\mathfrak{H}_4^*+\mathfrak{H}_4^*a_2cd_4+\mathfrak{H}_4^*(a_2cd_4)^2, \qquad \mathfrak{H}_{24}^*=\mathfrak{H}_{12}^*+\mathfrak{H}_{12}^*a_2$$

sind.[2]

1) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}$. In diesem Falle sind die 168 zu $\psi(s)$ konjugierten Charaktere alle voneinander verschieden.

2) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_2$. In diesem Falle bilden die 84 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere 5 Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

---

1) $\mathfrak{H}a_1c=(24)(36)$, $\mathfrak{H}a_2bc=(37)(45)$, $\mathfrak{H}bc=(35)(47)$, $\mathfrak{H}a_3b^2c=(27)(56)$, $\mathfrak{H}b^2c=(25)(67)$.

2) $\mathfrak{H}a_2cd_4=(157)(364)$.

a) $\psi(c^k a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} c^{-k})$ $(i=0, 2,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

b) $\psi(d_1 c^k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c^{-k} d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

c) $\psi(d_2 c^k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c^{-k} d_2^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

d) $\psi(d_4 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} d_4^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

e) $\psi(d_6 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} d_6^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

wobei $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{U}_{\psi^{(4)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_1c$ und $\mathfrak{U}_{\psi^{(6)}}=\mathfrak{H}_2^*$ sind. Hierbei ist $\psi(d_l s d_l^{-1})=\psi^{(l)}(s)$. In der Tat ist $\mathfrak{H}a_1d_4=\mathfrak{H}d_4a_1c$ bzw. $\mathfrak{H}a_1d_6=\mathfrak{H}d_6c$, und daher ist $\mathfrak{U}_{\psi^{(4)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_1c$ bzw. $\mathfrak{U}_{\psi^{(6)}}=\mathfrak{H}_2^*$.

Es sei noch bemerkt, dass $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_1c$ in bezug auf $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{H}_2^*$ konjugiert ist.

3) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_3$. In diesem Falle bilden die 56 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere drei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c^k a_i s a_i^{-1} c^{-k})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

b) $\psi(d_1 c^k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c^{-k} d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

c) $\psi(d_3 c^k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c^{-k} d_3^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$.

4) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4$. In diesem Falle bilden die 42 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere 4 Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c^k b^j s b^{-j} c^{-k})$ $(0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

b) $\psi(d_1 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

c) $\psi(d_2 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} d_2^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

d) $\psi(d_4 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} d_4^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

wobei $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_4$, $\mathfrak{U}_{\psi^{(1)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_2bc$, $\mathfrak{U}_{\psi^{(2)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_3b^2c$ und $\mathfrak{U}_{\psi^{(4)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_1c$ sind, denn $\mathfrak{H}a_2d_1=\mathfrak{H}d_1a_2bc$ und $\mathfrak{H}a_3d_2=\mathfrak{H}d_2a_3b^2c$. Es sei noch bemerkt, dass $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_2bc$ und $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_3b^2c$ in bezug auf $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{H}_2^*$ konjugiert sind.

5) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^*$. In diesem Falle bilden die 42 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere 4 Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1})$ $(i=0, 2,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

b) $\psi(d_1 c^k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c^{-k} d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

c) $\psi(d_4 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} d_4^{-1})$ $(i=0, 2,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

d) $\psi(d_6 a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1} d_6^{-1})$ $(i=0, 2,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

wobei $\mathfrak{U}_\psi=\mathfrak{H}_4^*$ und $\mathfrak{U}_{\psi^{(l)}}=\mathfrak{H}_4^*$ $(l=4, 6)$ sind, denn $\mathfrak{H}a_1cd_4=\mathfrak{H}d_4a_1$ und $\mathfrak{H}cd_6=\mathfrak{H}d_6a_1$.

6) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^\#$. In diesem Falle bilden die 42 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere drei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_i b^j s b^{-j} a_i^{-1})$ $(i=0, 2,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

b) $\psi(d_1 c^k b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} c^{-k} d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

c) $\psi(d_4 b^j a_i s a_i^{-1} b^{-j} d_4^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

wobei $\mathfrak{U}_{\psi}=\mathfrak{H}_4^{\#}$ und $\mathfrak{U}_{\psi^{(4)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_1c$ sind.

7) $\mathfrak{G}_{\psi}=\mathfrak{H}_6$. In diesem Falle bilden die 28 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere drei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_isa_i^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3)$;
b) $\psi(d_1b^ja_isa_i^{-1}b^{-j}d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;
c) $\psi(d_3c^ka_ib^jsb^{-j}a_i^{-1}c^{-k}d_3^{-1})$ $(i=0, 1,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

wobei $\mathfrak{U}_{\psi^{(1)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}bc$ und $\mathfrak{U}_{\psi^{(3)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_3$, denn $\mathfrak{H}bcd_1=\mathfrak{H}d_1bc$ und $\mathfrak{H}b^2cd_3=\mathfrak{H}d_3a_3$. Es sei noch bemerkt, dass $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}bc$, $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_3$ in bezug auf $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{H}_2^*$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ konjugiert ist.

8) $\mathfrak{G}_{\psi}=\mathfrak{H}_7$. In diesem Falle bilden die 24 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere eine einzige Klasse der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c^kb^ja_isa_i^{-1}b^{-j}c^{-k})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$.

9) $\mathfrak{G}_{\psi}=\mathfrak{H}_8$. In diesem Falle bilden die 21 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere drei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(b^jsb^{-j})$ $(0\leqq j\leqq 2)$;
b) $\psi(d_1b^ja_isa_i^{-1}b^{-j}d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;
c) $\psi(d_4a_ib^jsb^{-j}a_i^{-1}d_4^{-1})$ $(i=0, 2,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

wobei $\mathfrak{U}_{\psi^{(1)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_2bc$ und $\mathfrak{U}_{\psi^{(4)}}=\mathfrak{H}_4^*$ sind.

10) $\mathfrak{G}_{\psi}=\mathfrak{H}_{12}$. In diesem Falle bilden die 14 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c^ksc^{-k})$ $(0\leqq k\leqq 1)$;
b) $\psi(d_1b^ja_isa_i^{-1}b^{-j}d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq j\leqq 2)$;

wobei $\mathfrak{U}_{\psi^{(1)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_2bc$ ist.

11) $\mathfrak{G}_{\psi}=\mathfrak{H}_{12}^*$. In diesem Falle bilden die 14 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(a_ib^jsb^{-j}a_i^{-1})$ $(i=0, 2,\ 0\leqq j\leqq 2)$;
b) $\psi(d_1c^ka_isa_i^{-1}c^{-k}d_1^{-1})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq k\leqq 1)$;

wobei $\mathfrak{U}_{\psi}=\mathfrak{H}_4^*$ ist.

12) $\mathfrak{G}_{\psi}=\mathfrak{H}_{21}$. In diesem Falle bilden die 8 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere eine einzige Klasse der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(c^ka_isa_i^{-1}c^{-k})$ $(0\leqq i\leqq 3,\ 0\leqq k\leqq 1)$.

13) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{24}$. In diesem Falle bilden die 7 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(s)$;

b) $\psi(d_1a_ib^jsb^{-j}a_i^{-1}d_1^{-1})$ $\qquad (i=0, 1, \quad 0\leqq j\leqq 2)$;

wobei $\mathfrak{U}_{\psi^{(1)}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_2+\mathfrak{H}bc+\mathfrak{H}a_2bc$ ist, denn $\mathfrak{H}a_2bcd_1=\mathfrak{H}d_1a_2$. Es sei noch bemerkt, dass $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}a_2+\mathfrak{H}bc+\mathfrak{H}a_2bc$ in bezug auf $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{H}_4^*$ konjugiert ist.

14) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{24}^*$. In diesem Falle bilden die 7 zu $\psi(s)$ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{U}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(b^jsb^{-j})$ $\qquad (0\leqq j\leqq 2)$;

b) $\psi(d_1a_isa_i^{-1}d_1^{-1})$ $\qquad (0\leqq i\leqq 3)$.

15) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{G}$. In diesem Falle sind die zu $\psi(s)$ in bezug auf $\mathfrak{G}$ konjugierten Charaktere alle einander gleich.

§3.

Nunmehr betrachten wir die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ vornehmlich in die von $\mathfrak{U}$.

1) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}$. In diesem Falle kommen 7 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich $(0\leqq l\leqq 6)$

$$\chi^{(l+1)}(s)=\chi_{\psi^{(l)}}(s) \quad \text{mit} \quad \psi^{(l)}(s)=\psi(d_lsd_l^{-1}).$$

Somit gibt es ersichtlich einen einzigen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, der ψ in sich enthält, und in $\mathfrak{H}$ ist

$$\Xi(s)=\Xi_\psi(s)=\chi^{(1)}(s)+\chi^{(2)}(s)+\cdots+\chi^{(7)}(s).$$

2) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_2$. In diesem Falle kommen 8 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots$ $\quad$ in $\mathfrak{H}$ $\quad (i=1, 2)$,

$\chi^{(l+1)}(s)=\chi_{\psi^{(l)}}(s)$ $\quad (l=1, 2)$,

$\chi_i^{(4)}(s)=\psi(d_4sd_4^{-1})+\cdots$ $\quad$ in $\mathfrak{H}$ $\quad (i=1, 2)$,

$\chi_i^{(5)}(s)=\psi(d_6sd_6^{-1})+\cdots$ $\quad$ in $\mathfrak{H}$ $\quad (i=1, 2)$.

Ist der Grad $\mathrm{Gr}(\Xi)$ desjenigen einfachen Charakters Ξ von $\mathfrak{G}$, der ψ in sich enthält, ein Vielfaches von $84\,\mathrm{Gr}(\psi)$, so ist $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$, wegen $\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_i^{(1)}})=7\,\mathrm{Gr}(\chi_i^{(1)})=84\,\mathrm{Gr}(\psi)$, ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$. Deshalb haben wir (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi_1^{(4)}$	$\chi_2^{(4)}$	$\chi_1^{(5)}$	$\chi_2^{(5)}$
Ξ_1	1		1	1	1		1	
Ξ_2		1	1	1		1		1

3) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_3$. In diesem Falle kommen 5 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\chi^{(2)}(s)=\chi_{\psi^{(1)}}(s),$$
$$\chi^{(3)}(s)=\chi_{\psi^{(3)}}(s).$$

Alsdann sind alle drei Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 3)$ einfach, woraus sich ergibt (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
Ξ_1	1			1	1
Ξ_2		1		1	1
Ξ_3			1	1	1

4) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4$.

4.1) Falls $\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 10 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 4),$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi_i^{(3)}(s)=\psi(d_2sd_2^{-1})+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi_i^{(4)}(s)=\psi(d_4sd_4^{-1})+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 2).$$

Alsdann sind alle 4 Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 4)$ einfach, und drei verschiedene Fälle kommen vor (in $\mathfrak{U}$):

A)
$$\Xi_i=\chi_i^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_1^{(3)}+\chi_1^{(4)} \qquad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\Xi_i=\chi_i^{(1)}+\chi_2^{(2)}+\chi_2^{(3)}+\chi_2^{(4)} \qquad (3\leqq i\leqq 4);$$

B)
$$\Xi_i=\chi_i^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_1^{(3)}+\chi_i^{(4)} \qquad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\Xi_i=\chi_i^{(1)}+\chi_2^{(2)}+\chi_2^{(3)}+\chi_{i-2}^{(4)} \qquad (3\leqq i\leqq 4);$$

C)
$$\Xi_i=\chi_i^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_i^{(3)}+\chi_i^{(4)} \qquad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\Xi_3=\chi_3^{(1)}+\chi_2^{(2)}+\chi_1^{(3)}+\chi_2^{(4)},$$
$$\Xi_4=\chi_4^{(1)}+\chi_2^{(2)}+\chi_2^{(3)}+\chi_1^{(4)}.$$

Aber A) und B) sind unmöglich, was man folgenderweise beweisen kann:

Im Falle A) ist $\Xi_{\chi_1^{(2)}}=\Xi_1+\Xi_2$. Ist s in $\mathfrak{H}c$, so ist $d_6sd_6^{-1}$ in $\mathfrak{H}a_1$ und daher ist $\chi_1^{(2)}(d_6sd_6^{-1})=0$. Deshalb ist, nach (4), für $s\in\mathfrak{H}c$

$$\chi_1^{(2)}(d_4sd_4^{-1})=\chi_1^{(2)}(s)+2\chi_1^{(3)}(s)+2\chi_1^{(4)}(s),$$

und entsprechend

$$\chi_1^{(3)}(d_4sd_4^{-1})=2\chi_1^{(2)}(s)+\chi_1^{(3)}(s)+2\chi_1^{(4)}(s),$$
$$\chi_1^{(4)}(d_4sd_4^{-1})=2\chi_1^{(2)}(s)+2\chi_1^{(3)}(s)+\chi_1^{(4)}(s);$$

daraus folgt, wegen $d_4sd_4^{-1}\in\mathfrak{H}c$ und $d_4^2\in\mathfrak{H}$, in $\mathfrak{H}c$

$$\chi_1^{(2)}(s)+\chi_1^{(3)}(s)+\chi_1^{(4)}(s)=0.$$

Folglich ist

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{\mathfrak{H}_2^*}{}' \chi_1^{(2)}(s)\chi_1^{(3)}(s^{-1}) \\
&= \sum_{\mathfrak{H}}{}' \chi_1^{(2)}(s)\chi_1^{(3)}(s^{-1}) + \sum_{\mathfrak{H}c}{}' \chi_1^{(2)}(s)\chi_1^{(3)}(s^{-1}) \\
&= -\sum_{\mathfrak{H}c}{}' \chi_1^{(2)}(s)\chi_1^{(2)}(s^{-1}) - \sum_{\mathfrak{H}c}{}' \chi_1^{(2)}(s)\chi_1^{(4)}(s^{-1}) \\
&= -\sum_{\mathfrak{H}c} |\chi_1^{(2)}(s)|^2,
\end{aligned}
$$

gegen die Annahme, dass es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}c$ mit $\chi_1^{(2)}(s) \neq 0$ gibt.

Im Falle B), genauso wie im Falle A), haben wir für $s \in \mathfrak{H}c$

$$
\begin{aligned}
\chi_1^{(2)}(d_4 s d_4^{-1}) &= \chi_1^{(2)}(s) + 2\chi_1^{(3)}(s), \\
\chi_1^{(3)}(d_4 s d_4^{-1}) &= 2\chi_1^{(2)}(s) + \chi_1^{(3)}(s),
\end{aligned}
$$

und daher ist in $\mathfrak{H}c$

$$\chi_1^{(2)}(s) + \chi_1^{(3)}(s) = 0,$$

was auch ein Widerspruch ist.

Deshalb sehen wir ein:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$	$\chi_1^{(4)}$	$\chi_2^{(4)}$
Ξ_1	1				1		1		1	
Ξ_2		1			1			1		1
Ξ_3			1			1	1			1
Ξ_4				1		1		1	1	

4.2) Falls $\chi^{(1)}(s) = 2\psi(s) + \cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 7 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$
\begin{aligned}
&\chi^{(1)}(s) = 2\psi(s) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H}, \\
&\chi_i^{(2)}(s) = \psi(d_1 s d_1^{-1}) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leq i \leq 2), \\
&\chi_i^{(3)}(s) = \psi(d_2 s d_2^{-1}) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leq i \leq 2), \\
&\chi_i^{(4)}(s) = \psi(d_4 s d_4^{-1}) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leq i \leq 2).
\end{aligned}
$$

Somit ist der Charakter $\Xi = \Xi_{\chi^{(1)}}$ einfach, und in $\mathfrak{U}$ ist

$$\Xi(s) = \chi^{(1)}(s) + \chi_1^{(2)}(s) + \chi_2^{(2)}(s) + \chi_1^{(3)}(s) + \chi_2^{(3)}(s) + \chi_1^{(4)}(s) + \chi_2^{(4)}(s).$$

5) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_4^*$.

5.1) Falls $\chi_i^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 13 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$
\begin{aligned}
&\chi_i^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leq i \leq 4), \\
&\chi^{(2)}(s) = \chi_{\varphi^{(1)}}(s), && \\
&\chi_i^{(3)}(s) = \psi(d_4 s d_4^{-1}) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leq i \leq 4), \\
&\chi_i^{(4)}(s) = \psi(d_6 s d_6^{-1}) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leq i \leq 4),
\end{aligned}
$$

dabei denken wir uns $\chi_2^{(j)}$, $\chi_4^{(j)}$ $(j = 1, 3, 4)$ so gewählt denken, dass

$$\chi_2^{(j)} = \chi_1^{(j)}\hat{\chi} \quad \text{bzw.} \quad \chi_4^{(j)} = \chi_3^{(j)}\hat{\chi}$$

ist, wobei $\hat{\chi}$ den erzeugenden Charakter von $\mathfrak{U}/\mathfrak{H}_{12}$ bedeutet.

Also sind alle 4 Charaktere $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ einfach, und drei verschiedene Fälle kommen vor (in $\mathfrak{U}$):

A) $\quad \Xi_i = \chi_i^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi_i^{(3)} + \chi_i^{(4)} \qquad (1 \leqq i \leqq 4);$

B) $\quad \Xi_i = \chi_i^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi_i^{(3)} + \chi_i^{(4)} \qquad (i = 1, 4),$

$\quad \Xi_2 = \chi_2^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi_2^{(3)} + \chi_3^{(4)},$

$\quad \Xi_3 = \chi_3^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi_3^{(3)} + \chi_2^{(4)};$

C) $\quad \Xi_1 = \chi_1^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi_1^{(3)} + \chi_1^{(4)},$

$\quad \Xi_2 = \chi_2^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi_3^{(3)} + \chi_3^{(4)},$

$\quad \Xi_3 = \chi_3^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi_2^{(3)} + \chi_4^{(4)},$

$\quad \Xi_4 = \chi_4^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi_4^{(3)} + \chi_2^{(4)}.$

Aber A) und B) sind unmöglich, was man folgenderweise beweisen kann:

Im Falle A), aus $\Xi_{\chi_i^{(1)}}$, wegen (2) und $\chi^{(2)}(s) = 0$ in $\mathfrak{H}_4 - \mathfrak{H}$, folgt

$$\chi_i^{(1)}(d_4 s d_4^{-1}) + \chi_i^{(1)}(d_6 s d_6^{-1}) = \chi_i^{(3)}(s) + \chi_i^{(4)}(s) \qquad \text{für } s \in \mathfrak{H}a_1.$$

Andererseits für $s \in \mathfrak{H}a_1$ haben wir

$$\chi_1^{(1)}(d_l s d_l^{-1}) + \chi_2^{(1)}(d_l s d_l^{-1}) = 0 \qquad (l = 4, 6),$$

und

$$\chi_1^{(j)}(s) = \chi_2^{(j)}(s) \qquad (j = 3, 4).$$

Folglich muss füs $s \in \mathfrak{H}a_1$

$$\chi_1^{(3)}(s) + \chi_1^{(4)}(s) = 0$$

sein. Aus $\Xi_{\chi_i^{(3)}}$ bzw. $\Xi_{\chi_i^{(4)}}$ folgt für $s \in \mathfrak{H}a_1$

$$\chi_1^{(1)}(s) + \chi_1^{(4)}(s) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \chi_1^{(1)}(s) + \chi_1^{(3)}(s) = 0,$$

damit ist in $\mathfrak{H}a_1$

$$\chi_1^{(j)}(s) = 0 \qquad (j = 1, 3, 4).$$

Genauso wie oben besteht diese Gleichung auch in $\mathfrak{H}a_2$ und $\mathfrak{H}a_3$, d.h. in $\mathfrak{H}_4 - \mathfrak{H}$, was ein Widerspruch ist.

Im Falle B), aus $\Xi_{\chi_1^{(1)}}$ bzw. $\Xi_{\chi_2^{(1)}}$ folgt für $s \in \mathfrak{H}a_1$

$$\chi_1^{(1)}(d_4 s d_4^{-1}) + \chi_1^{(1)}(d_6 s d_6^{-1}) = \chi_1^{(3)}(s) + \chi_1^{(4)}(s)$$

bzw.

$$\chi_2^{(1)}(d_4 s d_4^{-1}) + \chi_2^{(1)}(d_6 s d_6^{-1}) = \chi_2^{(3)}(s) + \chi_3^{(4)}(s).$$

Ferner gilt $\chi_1^{(4)}(s) + \chi_3^{(4)}(s) = 0$ für $s \in \mathfrak{H}a_1$, so muss in $\mathfrak{H}a_1$

$$\chi_1^{(3)}(s) = 0$$

sein. Dies besteht auch in $\mathfrak{H}a_2$ und $\mathfrak{H}a_3$, d.h. in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$, was ein Widerspruch ist.

Folglich haben wir:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$	$\chi_3^{(3)}$	$\chi_4^{(3)}$	$\chi_1^{(4)}$	$\chi_2^{(4)}$	$\chi_3^{(4)}$	$\chi_4^{(4)}$
Ξ_1	1				1	1				1			
Ξ_2		1			1			1				1	
Ξ_3			1		1		1						1
Ξ_4				1	1				1		1		

5.2) Falls $\chi^{(1)}(s)=2\psi(s)+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 4 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned}
&\chi^{(1)}(s)=2\psi(s)+\cdots && \text{in } \mathfrak{H},\\
&\chi^{(2)}(s)=\chi_{\psi^{(1)}}(s), &&\\
&\chi^{(3)}(s)=2\psi(d_4sd_4^{-1})+\cdots && \text{in } \mathfrak{H},\\
&\chi^{(4)}(s)=2\psi(d_6sd_6^{-1})+\cdots && \text{in } \mathfrak{H}.
\end{aligned}$$

Somit ist der Charakter $\Xi=\Xi_{\chi^{(1)}}$ einfach, und in $\mathfrak{U}$ ist

$$\Xi(s)=\chi^{(1)}(s)+2\chi^{(2)}(s)+\chi^{(3)}(s)+\chi^{(4)}(s).$$

6) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_4^*$. In diesem Falle kommen 7 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned}
&\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots && \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq i\leqq 4),\\
&\chi^{(2)}(s)=\chi_{\psi^{(1)}}(s), &&\\
&\chi_i^{(3)}(s)=\psi(d_4sd_4^{-1})+\cdots && \text{in } \mathfrak{H}\ (1\leqq i\leqq 2),
\end{aligned}$$

wobei wir uns $\chi_2^{(1)}$, $\chi_4^{(1)}$ so gewählt denken, dass

$$\chi_2^{(1)}=\chi_1^{(1)}\hat{\chi}\quad\text{bzw.}\quad \chi_4^{(1)}=\chi_3^{(1)}\hat{\chi}$$

ist.

Es ist klar, dass alle 4 Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 4)$ einfach sind. Es sei nun in $\mathfrak{U}$ $\Xi_1=\chi_1^{(1)}+\chi^{(2)}+\chi_1^{(3)}$. Für $s\in\mathfrak{H}c$ ist $\chi_i^{(1)}(s)=0$, so ist mittels (4) für $s\in\mathfrak{H}c$

$$\Xi_{\chi_1^{(1)}}(s)=\chi_1^{(1)}(d_6sd_6^{-1}).$$

Andererseits ist $\chi^{(2)}(s)=0$ für $s\in\mathfrak{H}c$, so ist in $\mathfrak{H}c$ $\Xi_1(s)=\chi_1^{(3)}(s)$. Somit muss für $s\in\mathfrak{H}c$

$$\chi_1^{(1)}(d_6sd_6^{-1})=\chi_1^{(3)}(s)$$

sein. Wäre nun in $\mathfrak{U}$ $\Xi_3=\chi_3^{(1)}+\chi^{(2)}+\chi_1^{(3)}$, dann wäre für $s\in\mathfrak{H}c$ $\chi_3^{(1)}(d_6sd_6^{-1})=\chi_1^{(3)}(s)$, d. h.

$$\chi_1^{(1)}(d_6sd_6^{-1})=\chi_3^{(1)}(d_6sd_6^{-1}).$$

Alsdann gäbe es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}c$ mit $\chi_1^{(1)}(d_6sd_6^{-1})\neq 0$, was ein Widerspruch ist. Denn für $s\in\mathfrak{H}a_1$ ist $\chi_3^{(1)}(s)=-\chi_1^{(1)}(s)$.

Deshalb ist in $\mathfrak{U}$ $\Xi_3=\chi_3^{(1)}+\chi^{(2)}+\chi_2^{(3)}$, woraus folgt:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$
Ξ_1	1				1	1	
Ξ_2		1			1	1	
Ξ_3			1		1		1
Ξ_4				1	1		1

7) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_6$. In diesem Falle kommen 7 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{lll} \chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2), \\ \chi_3^{(1)}(s)=2\psi(s)+\cdots & \text{in } \mathfrak{H}, & \\ \chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2), \\ \chi_i^{(3)}(s)=\psi(d_3sd_3^{-1})+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2). \end{array}$$

Natürlich sind alle drei Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 3)$ einfach. Es sei nun in $\mathfrak{U}$ $\Xi_3=\chi_3^{(1)}+a\chi_j^{(2)}+b\chi_l^{(3)}+\cdots$, dann ist

$$84\,\mathrm{Gr}(\psi)=7\,\mathrm{Gr}(\chi_j^{(2)})=\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_j^{(2)}})\geqq a\,\mathrm{Gr}(\Xi_3)=56a\,\mathrm{Gr}(\psi)\,;$$

folglich muss $a\leqq 1$ sein, ebenso $b\leqq 1$. Also ist in $\mathfrak{U}$ $\Xi_3=\chi_3^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_2^{(2)}+\chi_1^{(3)}+\chi_2^{(3)}$, woraus sich ergibt (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$
Ξ_1	1			1		1	
Ξ_2		1			1		1
Ξ_3			1	1	1	1	1

8) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_7$. In diesem Falle kommt nur der folgende Charakter in Betracht, nämlich

$$\chi(s)=\chi_\psi(s).$$

Für einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$ ist

$$\begin{array}{rll} \Xi(s)=2\chi(s)+\cdots & & \text{in } \mathfrak{U} \\ =2\psi(s)+\cdots & & \text{in } \mathfrak{H} \end{array}$$

unmöglich. Denn sonst gäbe es noch drei andere einfache Charaktere, die ψ in sich enthielten. Folglich gäbe es höchstens 5 einfache Charaktere von $\mathfrak{H}_7$, die in $\mathfrak{H}$ gleich ψ wären. Aber es gibt sicherlich 7 solche Charaktere.

Deshalb gibt es 7 einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 7)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und in $\mathfrak{H}$ ist

$$\Xi_i(s)=\chi(s) \qquad (1\leqq i\leqq 7).$$

9) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_8$.

9.1) Falls $\chi_1^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, ist $\chi_1^{(3)}(s)=2\psi(d_4sd_4^{-1})+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ unmöglich, denn $\Xi_{\chi_1^{(1)}}$ ist einfach. Folglich kommen 11 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{lll} \chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 4), \\ \chi_5^{(1)}(s)=2\psi(s)+\cdots & \text{in } \mathfrak{H}, & \\ \chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 2), \\ \chi_i^{(3)}(s)=\psi(d_4sd_4^{-1})+\cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1\leqq i\leqq 4), \end{array}$$

wobei wir uns $\chi_2^{(j)}$, $\chi_4^{(j)}$ $(j=1, 3)$ so gewählt denken, dass

$$\chi_2^{(j)}=\chi_1^{(j)}\hat{\chi} \quad \text{bzw.} \quad \chi_4^{(j)}=\chi_3^{(j)}\hat{\chi}$$

ist.

Erstens sind alle 5 Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 5)$ einfach. Für $s\in\mathfrak{H}c$ ist $\chi_5^{(1)}(s)=0$, so ist, nach (7), in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$

$$\Xi_{\chi_5^{(1)}}=\chi_5^{(1)}.$$

Folglich sei nun in $\mathfrak{U}$ $\Xi_5=\chi_5^{(1)}+\cdots+\chi_j^{(3)}+\chi_k^{(3)}$, dann ist in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ $\chi_j^{(3)}(s)+\chi_k^{(3)}(s)=0$. Somit können wir uns Ξ_5 so gewählt denken, dass $j=1$ und $k=3$ ist.

Es sei ferner in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_l=\Xi_m=\chi_2^{(3)}+\cdots,$$

dann ist $\Xi_{\chi_2^{(3)}}=\Xi_l+\Xi_m$. Andererseits ist für $s\in\mathfrak{H}e$ $\chi_2^{(3)}(s)=0$, so ist mittels (5) für $s\in\mathfrak{H}e$

$$\chi_l^{(1)}(s)+\chi_m^{(1)}(s)=0.$$

Somit denken wir uns $l=1$ und $m=2$, und daher ist in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_3=\Xi_4=\chi_4^{(3)}+\cdots.$$

Es wäre zweitens

A) $$\Xi_{\chi_1^{(2)}}=\Xi_1+\Xi_3+\Xi_5$$

oder

B) $$\Xi_{\chi_1^{(2)}}=2\Xi_5.$$

Im Falle A) wäre für $s\in\mathfrak{H}e$, wegen (5) und $\chi_1^{(2)}(s)=0$,

$$\chi_1^{(1)}(s)+\chi_3^{(1)}(s)=0.$$

Es gibt aber ein Element s in $\mathfrak{H}e$, dass $\chi_1^{(1)}(s)+\chi_3^{(1)}(s)\neq 0$ ist.

Im Falle B) wäre für $s\in\mathfrak{H}c$, wegen (4) und $\chi_1^{(2)}(d_6sd_6^{-1})=0$,

$$\chi_1^{(2)}(d_4sd_4^{-1})=3\chi_1^{(2)}(s)+\chi_1^{(3)}(s)+\chi_3^{(3)}(s).$$

Andererseits ist $\Xi_{\chi_1^{(3)}}=\Xi_5$, so wäre für $s\in\mathfrak{H}c$

$$\chi_1^{(3)}(d_4sd_4^{-1})=2\chi_1^{(2)}(s)+\chi_3^{(3)}(s)-\chi_1^{(3)}(d_6sd_6^{-1}),$$

ebenso

$$\chi_3^{(3)}(d_4 s d_4^{-1}) = 2\chi_1^{(2)}(s) + \chi_1^{(3)}(s) - \chi_3^{(3)}(d_6 s d_6^{-1}).$$

Ferner ist $d_6 s d_6^{-1}$ in $\mathfrak{H}_4 - \mathfrak{H}$, so ist

$$\chi_1^{(3)}(d_6 s d_6^{-1}) + \chi_3^{(3)}(d_6 s d_6^{-1}) = 0.$$

Folglich müsste in $\mathfrak{H}c$

$$3\chi_1^{(2)}(s) + \chi_1^{(3)}(s) + \chi_3^{(3)}(s) = 0$$

sein. Dann wäre

$$0 = \sum_{\mathfrak{H}_2^*} \chi_1^{(2)}(s)\chi_1^{(3)}(s^{-1}) = -3\sum_{\mathfrak{H}_2^*} |\chi_1^{(2)}(s)|^2,$$

was ein Widerspruch ist.

Deshalb haben wir, bei passender Wahl,

$$\Xi_{\chi_1^{(2)}} = \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_5 \qquad \text{und} \qquad \Xi_{\chi_2^{(2)}} = \Xi_3 + \Xi_4 + \Xi_5,$$

woraus folgt:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_5^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$	$\chi_3^{(3)}$	$\chi_4^{(3)}$
Ξ_1	1					1			1		
Ξ_2		1				1			1		
Ξ_3			1				1				1
Ξ_4				1			1				1
Ξ_5					1	1	1	1		1	

9.2) Falls $\chi_1^{(1)}(s) = 2\psi(s) + \cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, sei nun angenommen, dass

$$\chi_1^{(3)}(s) = \psi(d_4 s d_4^{-1}) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H}$$

wäre. Es wäre ferner $\Xi_1 = \chi_1^{(1)} + \cdots + \chi_1^{(3)}$ in $\mathfrak{U}$. Dann würde es keinen einfachen Charakter ausser Ξ_1 geben, der $\chi_1^{(3)}$ in sich enthielte. Deshalb müsste für $s \in \mathfrak{H}e$

$$\Xi_1(s) = \Xi_{\chi_1^{(3)}}(s) = \chi_1^{(3)}(s)$$

sein. In $\mathfrak{H}e$ wäre $\chi_1^{(3)}(s) = 0$ und $\chi_i^{(2)}(s) = 0$, so wäre in $\mathfrak{H}e$ $\chi_1^{(1)}(s) = 0$, was ein Widerspruch ist. Denn es gibt mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}e$ mit $\chi_1^{(1)}(s) \neq 0$. Deshalb kommen 5 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned} \chi_i^{(1)}(s) &= 2\psi(s) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 2), \\ \chi_i^{(2)}(s) &= \psi(d_1 s d_1^{-1}) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 2), \\ \chi^{(3)}(s) &= 2\psi(d_4 s d_4^{-1}) + \cdots && \text{in } \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Natürlich sind zwei Charaktere $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1 \leqq i \leqq 2)$ einfach. Wäre nun

$$\Xi_{\chi_1^{(2)}} = 2\Xi_1,$$

so müsste in $\mathfrak{H}e$, wegen (5) und $\chi_1^{(2)}(s) = \chi^{(3)}(s) = 0$, $\Xi_1(s) = 0$ sein, und daher wäre $\chi_1^{(1)}(s) = 0$, was auch ein Widerspruch ist. Deshalb haben wir:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
Ξ_1	1		1	1	1
Ξ_2		1	1	1	1

10) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{12}$.

10.1) Falls $\chi_1^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 6 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 3),$$
$$\chi_4^{(1)}(s) = 3\psi(s) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H},$$
$$\chi_i^{(2)}(s) = \psi(d_1 s d_1^{-1}) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 2).$$

Alsdann sind alle 4 Charaktere $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ einfach. Es sei nun $\Xi_4 = \chi_4^{(1)} + a\chi_i^{(2)} + \cdots$ in $\mathfrak{U}$, dann ist $a \leqq 2$, woraus sich ergibt (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$
Ξ_1	1				1	
Ξ_2		1			1	
Ξ_3			1		1	
Ξ_4				1	1	2

10.2) Falls $\chi_1^{(1)}(s) = 2\psi(s) + \cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 5 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s) = 2\psi(s) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 3),$$
$$\chi_i^{(2)}(s) = \psi(d_1 s d_1^{-1}) + \cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 2).$$

Ersichtlich sind alle drei Charaktere $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ einfach. Es sei nun angenommen, dass

$$\Xi_{\chi_1^{(2)}} = 2\Xi_1 + \Xi_2$$

wäre. Dann müsste für $s \in \mathfrak{H}c$, wegen (4) und $\chi_i^{(1)}(s) = 0$,

$$\chi_1^{(2)}(d_4 s d_4^{-1}) = 4\chi_1^{(2)}(s)$$

sein, und daher wäre in $\mathfrak{H}c$ $\chi_1^{(2)}(s) = 0$, was ein Widerspruch ist. Deshalb sehen wir ein:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$
Ξ_1	1			1	1
Ξ_2		1		1	1
Ξ_3			1	1	1

11) $\mathfrak{G}_\psi = \mathfrak{H}_{12}^*$.

11.1) Falls $\chi_1^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 7 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 4),$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 3).$$

In $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ ist $\chi_i^{(1)}(s)=0$. Es gibt ferner mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_i^{(2)}(s)\neq 0$ $(1\leqq i\leqq 3)$; in $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ ist natürlich $\chi_1^{(2)}(s)+\chi_2^{(2)}(s)+\chi_3^{(2)}(s)=0$. Folglich ist mittels (3) in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_{\chi_i^{(2)}}=2\chi_i^{(2)}+\chi_j^{(2)}+\chi_k^{(2)}+\chi_l^{(1)}+\cdots.$$

Es sei nun angenommen, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_1=\chi_1^{(2)}+\chi_2^{(2)}+\cdots,$$
$$\Xi_2=\chi_1^{(2)}+\chi_3^{(2)}+\cdots$$

und

$$\Xi_3=\chi_2^{(2)}+\chi_3^{(2)}+\cdots$$

wäre. Dann wäre $\mathrm{Gr}(\Xi_i)=28\,\mathrm{Gr}(\psi)$ $(1\leqq i\leqq 3)$. Andererseits ist $\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_i^{(1)}})=42\mathrm{Gr}(\psi)$, was nicht ein Vielfaches von $28\,\mathrm{Gr}(\psi)$ sein kann.

Deshalb gibt es 4 einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1				1		
Ξ_2	1					1	
Ξ_3	1						1
Ξ_4		1	1	1	1	1	1

11.2) Falls $\chi^{(1)}(s)=2\psi(s)+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 4 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi^{(1)}(s)=2\psi(s)+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H},$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 3).$$

Dann gibt es keinen einfachen Charakter von $\mathfrak{G}$, der nur einen von drei Charakteren $\chi_i^{(2)}$ $(1\leqq i\leqq 3)$ in sich enthält, und daher gibt es drei einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten. Deshalb haben wir (bei passender Wahl):

	$\chi^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1		1	1
Ξ_2	1	1		1
Ξ_3	1	1	1	

12) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{21}$. In diesem Falle kommen drei Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i(s)=\psi(s)+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \ (1\leqq i\leqq 3).$$

Alsdann gibt es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ mit $\chi_i(s)\neq 0$; dabei ist doch in $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ $\chi_1(s)+\chi_2(s)+\chi_3(s)=0$. Ferner ist $\mathrm{Gr}(\Xi_\chi)=7\,\mathrm{Gr}(\chi)$, so ist wegen (3)

$$\Xi_{\chi_i}=3\chi_i+2\chi_j+2\chi_k \quad \text{in } \mathfrak{U}.$$

Andererseits gibt es drei einfache Charaktere von $\mathfrak{H}_{21}$, die in $\mathfrak{H}$ ψ sind, und zwei, die in $\mathfrak{H}$ 3ψ sind. Also gibt es 5 einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten und sofort sehen wir ein (bei passender Wahl):

	χ_1	χ_2	χ_3
Ξ_1	1		
Ξ_2		1	
Ξ_3			1
Ξ_4	1	1	1
Ξ_5	1	1	1

13) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{24}$.

13.1) Falls $\chi_1^{(1)}(s)=\psi(s)$ in $\mathfrak{H}$ ist, ist $\chi_1^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots$ in $\mathfrak{H}$. Also kommen 9 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned}
&\chi_i^{(1)}(s)=\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 2),\\
&\chi_3^{(1)}(s)=2\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H}, && \\
&\chi_i^{(1)}(s)=3\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H} && (4\leqq i\leqq 5),\\
&\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 4),
\end{aligned}$$

wobei wir uns $\chi_2^{(2)}$, $\chi_4^{(2)}$ so gewählt denken, dass

$$\chi_2^{(2)}=\chi_1^{(2)}\hat{\chi} \quad \text{bzw.} \quad \chi_4^{(2)}=\chi_3^{(2)}\hat{\chi}$$

ist.

Es ist klar, dass alle 5 Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 5)$ einfach sind. Für $s\in\mathfrak{H}c$ ist $\chi_3^{(1)}(s)=0$, so ist mittels (7) in $\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ $\Xi_3(s)=\chi_3^{(1)}(s)$. Deshalb dürfen wir uns Ξ_3 so gewählt denken, dass

$$\Xi_3=\chi_3^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_3^{(2)} \quad \text{in } \mathfrak{U}$$

ist, wobei $\mathrm{Gr}(\Xi_3)=14\,\mathrm{Gr}(\psi)$ ist. Ferner ist $\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_1^{(2)}})$ gleich $42\,\mathrm{Gr}(\psi)$, somit haben wir, bei passender Wahl,

$$\Xi_1=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)} \quad \text{und} \quad \Xi_2=\chi_2^{(1)}+\chi_3^{(2)}.$$

Es sei nun in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_4=\chi_4^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\cdots.$$

Für $s\in\mathfrak{H}e$ sind $\chi_i^{(2)}(s)=0$ und $\chi_3^{(1)}(s)=0$, so ist, wegen (5) und $\Xi_{\chi_1^{(2)}}=\Xi_1+\Xi_3+\Xi_4$,

$$\chi_1^{(1)}(s)+\chi_4^{(1)}(s)=0 \quad \text{in } \mathfrak{H}e.$$

Also ist $\chi_2^{(1)}(s)+\chi_5^{(1)}(s)=0$ in $\mathfrak{H}e$, d. h.

$$\Xi_5=\chi_5^{(1)}+\chi_3^{(2)}+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{U}.$$

Zunächst ist $\Xi_{\chi_2^{(2)}}(s)=0$ für $s\in\mathfrak{H}e$; dabei gibt es mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}e$ mit $\chi_i^{(1)}(s)\neq 0$ $(i=4,5)$. Also ist $\Xi_{\chi_2^{(2)}}$ gleich weder $2\Xi_4$ noch $2\Xi_5$. Folglich haben wir:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_5^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$
Ξ_1	1					1			
Ξ_2		1						1	
Ξ_3			1			1		1	
Ξ_4				1		1	1		1
Ξ_5					1		1	1	1

13.2) Falls $\chi_1^{(1)}(s)=2\psi(s)$ in $\mathfrak{H}$ ist, sei nun angenommen, dass

$$\chi_1^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H}$$

wäre. Dann kämen folgende 7 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned} &\chi_i^{(1)}(s)=2\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 2),\\ &\chi_3^{(1)}(s)=4\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H}, &&\\ &\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 4). \end{aligned}$$

Alsdann wären drei Charaktere $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $(1\leqq i\leqq 3)$ einfach. Es wäre ferner $\Xi_1=\chi_1^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\cdots$ in $\mathfrak{U}$. Wegen $\mathrm{Gr}(\Xi_3)=28\,\mathrm{Gr}(\psi)$ und $\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_1^{(2)}})=42\,\mathrm{Gr}(\psi)$, folgte dann

$$\Xi_3=\chi_3^{(1)}+\chi_1^{(2)}+\chi_2^{(2)}+\chi_3^{(2)}+\chi_4^{(2)} \quad \text{in } \mathfrak{U}.$$

Also wäre $\Xi_{\chi_1^{(2)}}=\Xi_1+\Xi_3$, und daher wäre, wegen (5) und $\chi_i^{(2)}(s)=\chi_3^{(1)}(s)=0$ in $\mathfrak{H}e$,

$$\chi_1^{(1)}(s)=0 \quad \text{in } \mathfrak{H}e,$$

was ein Widerspruch ist.

Deshalb ist in $\mathfrak{H}$ $\chi^{(2)}(s)=2\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots$, und daher kommen 4 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{aligned} &\chi_i^{(1)}(s)=2\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H} && (1\leqq i\leqq 2),\\ &\chi_3^{(1)}(s)=4\psi(s) && \text{in } \mathfrak{H}, &&\\ &\chi^{(2)}(s)=2\psi(d_1sd_1^{-1})+\cdots && \text{in } \mathfrak{H}. && \end{aligned}$$

Also gibt es drei einfache Charaktere Ξ_i $(1\leqq i\leqq 3)$ von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und wir haben sofort:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi^{(2)}$
Ξ_1	1			1
Ξ_2		1		1
Ξ_3			1	2

14) $\mathfrak{G}_5 = \mathfrak{H}_{24}^*$.

14.1) Falls $\chi_1^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 8 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\begin{array}{lll} \chi_i^{(1)}(s) = \psi(s) + \cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1 \leqq i \leqq 4), \\ \chi_5^{(1)}(s) = 2\psi(s) + \cdots & \text{in } \mathfrak{H}, & \\ \chi_i^{(2)}(s) = \psi(d_1 s d_1^{-1}) + \cdots & \text{in } \mathfrak{H} & (1 \leqq i \leqq 2), \\ \chi_3^{(2)}(s) = 2\psi(d_1 s d_1^{-1}) + \cdots & \text{in } \mathfrak{H}, & \end{array}$$

wobei wir uns $\chi_2^{(1)}$, $\chi_4^{(1)}$ so gewählt denken, dass

$$\chi_2^{(1)} = \chi_1^{(1)} \hat{\chi} \quad \text{bzw.} \quad \chi_4^{(1)} = \chi_3^{(1)} \hat{\chi}$$

ist.

Es gibt mindestens ein Element s aus $\mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$ mit $\chi_i^{(2)}(s) \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq 3)$; dabei ist in $\mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$ $\chi_i^{(2)}(s) + \chi_3^{(2)}(s) = 0$ $(i = 1, 2)$ und $\chi_i^{(1)}(s) = 0$ $(1 \leqq i \leqq 5)$. Ferner ist $\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_i^{(2)}}) = 28\,\mathrm{Gr}(\psi)$ $(i = 1, 2)$, so ist in $\mathfrak{U}$

A) $$\Xi_{\chi_1^{(2)}} = 2\chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \cdots$$

oder

B) $$\Xi_{\chi_1^{(2)}} = \chi_1^{(2)} + \chi_2^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \cdots.$$

Im Falle B) wäre $\Xi_{\chi_1^{(2)}}$ einfach und es gäbe drei einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_1 = \chi_3^{(2)} + \cdots, \qquad \Xi_2 = \chi_3^{(2)} + \cdots,$$
$$\Xi_3 = \chi_1^{(2)} + \chi_2^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \cdots$$

mit $\mathrm{Gr}(\Xi_3) = 28\,\mathrm{Gr}(\psi)$ und $\mathrm{Gr}(\Xi_1) = \mathrm{Gr}(\Xi_2) = 14\,\mathrm{Gr}(\psi)$ wäre, was ein Widerspruch gegen $\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_1^{(1)}}) = 21\,\mathrm{Gr}(\psi)$ ist.

Im Falle A) sei nun $\Xi = a\chi_1^{(2)} + \cdots$ in $\mathfrak{U}$, dann ist $a \leqq 1$. Also gibt es 5 einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_1 = \chi_1^{(2)} + \cdots, \qquad \Xi_2 = \chi_2^{(2)} + \cdots, \qquad \Xi_3 = \chi_3^{(2)} + \cdots,$$
$$\Xi_4 = \chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \cdots, \qquad \Xi_5 = \chi_2^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \cdots$$

sind.

Es sei zunächst $\Xi_1 = \chi_1^{(1)} + \chi_1^{(2)}$, dann ist $\Xi_3 = \chi_1^{(1)} + \chi_3^{(2)}$. Ferner sei

$$\Xi_4 = \chi_i^{(1)} + \chi_5^{(1)} + \chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)}.$$

Andererseits sind für $s \in \mathfrak{H}e$ $\chi_j^{(2)}(s) = 0$ und $\chi_5^{(1)}(s) = 0$, somit ist mittels (5)

$$\chi_1^{(1)}(s) + \chi_i^{(1)}(s) = 0 \quad \text{in } \mathfrak{H}e,$$

d. h. $i = 2$, und wir haben:

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$	$\chi_5^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1					1		
Ξ_2			1				1	
Ξ_3	1		1					1
Ξ_4		1			1	1		1
Ξ_5				1	1		1	1

14.2) Falls $\chi_1^{(1)}(s)=2\psi(s)+\cdots$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 5 Charaktere von $\mathfrak{U}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i^{(1)}(s)=2\psi(s)+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi_i^{(2)}(s)=\psi(d_1 s d_1^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi_3^{(2)}(s)=2\psi(d_1 s d_1^{-1})+\cdots \quad \text{in } \mathfrak{H},$$

In $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ ist $\chi_i^{(1)}(s)=0$, so ist, genauso wie im Falle 14.1), in $\mathfrak{U}$

A) $$\Xi_{\chi_1^{(2)}}=2\chi_1^{(2)}+\chi_3^{(2)}+\cdots$$

oder

B) $$\Xi_{\chi_1^{(2)}}=\chi_1^{(2)}+\chi_2^{(2)}+\chi_3^{(2)}+\cdots.$$

Im Falle A) gäbe es einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{H}$ $\psi+\cdots$ wäre. Aber ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$ soll in $\mathfrak{H}$ ein Vielfaches von $2\psi+\cdots$ sein.

Im Falle B) gibt es drei einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, die ψ in sich enthalten, und sofort haben wir (bei passender Wahl):

	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$
Ξ_1	1				1
Ξ_2		1			1
Ξ_3	1	1	1	1	1

15) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{G}$.

15.1) Falls $\chi_1(s)=\psi(s)$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen 5 Charaktere von $\mathfrak{G}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i(s)=\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi_3(s)=2\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H},$$
$$\chi_i(s)=3\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (4\leqq i\leqq 5).$$

Für diese Charaktere gelten zunächst die Relationen im Falle 11.1) vom Hilfssatz 1, und daher ist für $s\in\mathfrak{H}_4-\mathfrak{H}$ mittels (7) $\Xi_{\chi_3}(s)=\chi_3(s)$. Deshalb ist wegen (3) in $\mathfrak{U}$

A) $$\Xi_{\chi_3}=\chi_1+2\chi_3+3\chi_4$$

oder

B) $$\Xi_{\chi_3}=\chi_1+2\chi_3+2\chi_4+\chi_5.$$

Weil es keinen Charakter von $\mathfrak{G}$ gibt, der in $\mathfrak{U}$ $\chi_1+\chi_3+2\chi_4$ ist, so sei angenommen, dass es im Falle A) zwei Charaktere Ξ_1 und Ξ_2 von $\mathfrak{G}$ mit

$$\Xi_1=\chi_1+\chi_3+\chi_4 \quad \text{und} \quad \Xi_2=\chi_3+2\chi_4 \qquad \text{in } \mathfrak{U}$$

gäbe. Dann wäre

$$21\,\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_4})\geqq 22\,\mathrm{Gr}(\psi).$$

Im Falle B) ist, für einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$, Ξ in $\mathfrak{U}$ gleich weder $\chi_1+\chi_3+2\chi_4$ noch $\chi_1+\chi_3+\chi_4+\chi_5$, denn sonst wäre

$$7\,\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_1})\geqq 9\,\mathrm{Gr}(\psi).$$

Ebenso gibt es keinen einfachen Charakter von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{U}$ $\chi_3+2\chi_4+\chi_5$ ist. Es gäbe ferner zwei Charaktere von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi=\chi_1+\chi_3+\chi_5 \quad \text{und} \quad \Xi'=\chi_3+2\chi_4$$

wäre. Dann existierte ein einfacher Charakter Ξ^* von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{U}$ $2\chi_2+\chi_4$ wäre, woraus folgte:

$$7\,\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_2})\geqq 10\,\mathrm{Gr}(\psi).$$

Also existieren zwei einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_4=\chi_1+\chi_3+\chi_4 \quad \text{und} \quad \Xi_6=\chi_3+\chi_4+\chi_5$$

ist. Es gibt noch 4 einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$ und wir haben (bei passender Wahl):

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
Ξ_1	1				
Ξ_2					1
Ξ_3					1
Ξ_4	1		1	1	
Ξ_5		1		1	1
Ξ_6			1	1	1

15.2) Falls $\chi_1(s)=2\psi(s)$ in $\mathfrak{H}$ ist, kommen drei Charaktere von $\mathfrak{G}$ in Betracht, nämlich

$$\chi_i(s)=2\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi_3(s)=4\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H}.$$

Für diese Charaktere gelten zunächst die Relationen im Falle 11.2) vom Hilfssatz 1, so sind wegen (3), (5) in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_{\chi_1}=2\chi_1+\chi_2+2\chi_3, \qquad \Xi_{\chi_2}=\chi_1+2\chi_2+2\chi_3.$$

Es wäre nun in $\mathfrak{U}$

$$\Xi=\chi_1+2\chi_3 \quad \text{und} \quad \Xi'=\chi_2+2\chi_3.$$

Dann wäre

$$28\,\mathrm{Gr}(\psi)=\mathrm{Gr}(\Xi_{\chi_3})\geqq 40\,\mathrm{Gr}(\psi).$$

Also gibt es einen einfachen Charakter von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$ entweder

A) $$\Xi=\chi_1+\chi_2+\chi_3$$

oder

B) $$\Xi=\chi_1+\chi_2+2\chi_3$$

ist.

Im Falle B) gibt es noch drei andere einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$ derart, dass in $\mathfrak{U}$

$$\Xi_1'=\chi_1, \qquad \Xi_2'=\chi_2 \quad \text{und} \quad \Xi_3'=\chi_3$$

ist.

Andererseits gibt es folgende 5 einfache Charaktere φ_i $(1\leqq i\leqq 5)$ von $\mathfrak{H}_{21}$, die ψ in sich enthalten, nämlich

$$\varphi_i(s)=\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\varphi_i(s)=3\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (4\leqq i\leqq 5).$$

Weil $\mathrm{Gr}(\Xi_{\varphi_i})=24\,\mathrm{Gr}(\psi)$ $(4\leqq i\leqq 5)$ und $\mathrm{Gr}(\Xi_3')=4\,\mathrm{Gr}(\psi)$ ist, so kann Ξ_3' nicht gleich $\varphi_4+\cdots$ noch $\varphi_5+\cdots$ in $\mathfrak{H}_{21}$ sein, denn es gibt keinen Charakter von $\mathfrak{G}$, dessen Grad gleich $20\,\mathrm{Gr}(\psi)$ ist. Also ist in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi=2\varphi_4+2\varphi_5,$$

und es gibt keinen einfachen Charakter ausser Ξ, der φ_4 oder φ_5 in sich enthält. Für $s\in\mathfrak{H}_7-\mathfrak{H}$ ist $\Xi_{\varphi_4}(s)=\varphi_4(s)$, so ist

$$3\varphi_4(s)+4\varphi_5(s)=0,$$

was ein Widerspruch ist.

Im Falle A) gibt es noch 4 einfache Charaktere von $\mathfrak{G}$, und sofort sehen wir ein (bei passender Wahl):

	χ_1	χ_2	χ_3
Ξ_1			1
Ξ_2			1
Ξ_3	1		1
Ξ_4		1	1
Ξ_5	1	1	1

§4.

Nunmehr betrachten wir die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ in die von $\mathfrak{H}_{21}$ in den wirklich interessanten Fällen 8), 12) und 15) von §3. Auch in übrigen Fällen wird natürlich die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ auf ähnliche Weise angegeben werden.

8) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_7$. In diesem Falle bilden die 24 zu ψ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{H}_{21}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(s)$, $\psi(bsb^{-1})$, $\psi(b^2sb^{-2})$;

b) $\psi(a_1sa_1^{-1}),\cdots\cdots$.

Folglich kommen 8 Charaktere von $\mathfrak{H}_{21}$ in Betracht, nämlich

$$\varphi_i^{(1)}(s)=\psi(s)+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 7),$$
$$\varphi^{(2)}(s)=\varphi_{\psi(a_1sa_1^{-1})}(s),$$

und sofort sehen wir ein (bei passender Wahl):

	$\varphi_1^{(1)}$	$\varphi_2^{(1)}$	$\varphi_3^{(1)}$	$\varphi_4^{(1)}$	$\varphi_5^{(1)}$	$\varphi_6^{(1)}$	$\varphi_7^{(1)}$	$\varphi^{(2)}$
Ξ_1	1							1
Ξ_2		1						1
Ξ_3			1					1
Ξ_4				1				1
Ξ_5					1			1
Ξ_6						1		1
Ξ_7							1	1

12) $\mathfrak{G}_\psi=\mathfrak{H}_{21}$. In diesem Falle bilden die 8 zu ψ konjugierten, voneinander verschiedenen Charaktere zwei Klassen der in bezug auf $\mathfrak{H}_{21}$ konjugierten, nämlich

a) $\psi(s)$;

b) $\psi(a_1sa_1^{-1}),\ \cdots\cdots$.

Deshalb kommen 8 Charaktere von $\mathfrak{H}_{21}$ in Betracht, nämlich

$$\varphi_i^{(1)}(s)=\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 3),$$
$$\varphi_i^{(1)}(s)=3\psi(s) \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (4\leqq i\leqq 5),$$
$$\varphi_i^{(2)}(s)=\psi(a_1sa_1^{-1})+\cdots \qquad \text{in } \mathfrak{H} \qquad (1\leqq i\leqq 3),$$

wobei wir $\varphi_2^{(j)}=\varphi_1^{(j)}\hat{\varphi}$ und $\varphi_3^{(j)}=\varphi_1^{(j)}\hat{\varphi}^2$ $(1\leqq j\leqq 2)$ annehmen.

In $\mathfrak{H}_3-\mathfrak{H}$ ist $\Xi_i(s)=0$ $(4\leqq i\leqq 5)$, und daher ist in $\mathfrak{H}_{21}$ $\Xi_i=\varphi_1^{(2)}+\varphi_2^{(2)}+\varphi_3^{(2)}+\cdots$ $(4\leqq i\leqq 5)$. Es sei nun in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi_1=\varphi_1^{(1)}+\varphi_1^{(2)},$$

und ferner sei

$$\Xi_2=\varphi_2^{(1)}+\varphi_k^{(2)}.$$

Dann ist, wegen (8) und $\Xi_1 = \Xi_{\varphi_1^{(1)}}$, für $s \in \mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$

$$\varphi_1^{(1)}(csc^{-1}) = \varphi_1^{(2)}(s).$$

Ebenso haben wir für $s \in \mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$

$$\varphi_2^{(1)}(csc^{-1}) = \varphi_k^{(2)}(s).$$

Also muss

$$\varphi_k^{(2)}(s) = \varphi_1^{(1)}(csc^{-1})\hat{\varphi}(csc^{-1}) = \varphi_1^{(2)}(s)\hat{\varphi}(s)^2$$

sein, d.h. $k=3$.

Deshalb haben wir (bei passender Wahl):

	$\varphi_1^{(1)}$	$\varphi_2^{(1)}$	$\varphi_3^{(1)}$	$\varphi_4^{(1)}$	$\varphi_5^{(1)}$	$\varphi_1^{(2)}$	$\varphi_2^{(2)}$	$\varphi_3^{(2)}$
Ξ_1	1					1		
Ξ_2		1						1
Ξ_3			1				1	
Ξ_4				1		1	1	1
Ξ_5					1	1	1	1

15) $\mathfrak{G}_{\hat{\varphi}} = \mathfrak{G}$. In diesem Falle kommen 5 Charaktere von $\mathfrak{H}_{21}$ in Betracht, nämlich

$$\varphi_i(s) = \psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (1 \leqq i \leqq 3),$$
$$\varphi_i(s) = 3\psi(s) \quad \text{in } \mathfrak{H} \quad (4 \leqq i \leqq 5).$$

15.1) Es sei zunächst in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi_1 = \varphi_1,$$

dann sind, wegen $\mathrm{Gr}(\Xi_{\varphi_i}) = 8\,\mathrm{Gr}(\varphi_i)$, in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi_5 = \varphi_1 + \cdots, \qquad \Xi_6 = \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots.$$

Es wäre ferner in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi_5 = \varphi_1 + 2\varphi_4.$$

Ist nun $s \in \mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$, so ist $csc^{-1} \in \mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$, und daher ist $\varphi_4(csc^{-1}) = 0$. Also ist wegen (8) für $s \in \mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$

$$\Xi_{\varphi_4}(s) = 0.$$

Ferner gibt es ein Element s aus $\mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$ $\varphi_i(s) = 0$ $(1 \leqq i \leqq 3)$; dabei ist doch in $\mathfrak{H}_3 - \mathfrak{H}$ $\varphi_1(s) + \varphi_2(s) + \varphi_3(s) = 0$. Deshalb müsste in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi_6 = \varphi_2 + \varphi_3 + 2\varphi_4$$

sein. Dann wäre

$$24\,\mathrm{Gr}(\psi) = \mathrm{Gr}(\Xi_{\varphi_4}) \geqq 2(\mathrm{Gr}(\Xi_5) + \mathrm{Gr}(\Xi_6)) = 30\,\mathrm{Gr}(\psi).$$

Deshalb sind in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi_5 = \varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_5, \qquad \Xi_6 = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5,$$

woraus folgt (bei passender Wahl):

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
Ξ_1	1				
Ξ_2				1	
Ξ_3					1
Ξ_4				1	1
Ξ_5	1			1	1
Ξ_6		1	1	1	1

15.2) Es sei in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi_1=\varphi_1+\cdots,$$

dann sind ersichtlich in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi_2=\varphi_1+\cdots, \qquad \Xi_5=\varphi_2+\varphi_3+\cdots.$$

Ferner ist für $s\in\mathfrak{H}f$ $\Xi_{\varphi_i}(s)=\varphi_i(s)$ $(i=4, 5)$, so kann Ξ_3 in $\mathfrak{H}_{21}$ gleich weder $2\varphi_4$ noch $2\varphi_5$ sein. Also ist in $\mathfrak{H}_{21}$

$$\Xi_3=\varphi_4+\varphi_5,$$

woraus sich ergibt (bei passender Wahl):

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
Ξ_1	1			1	
Ξ_2	1				1
Ξ_3				1	1
Ξ_4				1	1
Ξ_5		1	1	1	1

Alsdann werden die ψ enthaltenden einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$ durch die Charaktere der Untergruppen von $\mathfrak{G}$ folgenderweise bestimmt:

1) $\mathfrak{G}_\varphi=\mathfrak{H}$.

$$\Xi=\Xi_\varphi=\Xi_{\chi^{(1)}}.$$

2) $\mathfrak{G}_\varphi=\mathfrak{H}_2$.

$$\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}} \qquad i=1, 2.$$

3) $\mathfrak{G}_\varphi=\mathfrak{H}_3$.

$$\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}} \qquad i=1, 2, 3.$$

4) $\mathfrak{G}_\varphi=\mathfrak{H}_4$.

4.1) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}} \qquad i=1, 2, 3, 4.$

4.2) $\Xi=\Xi_{\chi^{(1)}}.$

5) $\mathfrak{G}_\varphi=\mathfrak{H}_4^*$.

5.1) $\Xi_i=\Xi_{\chi_i^{(1)}} \qquad i=1, 2, 3, 4.$

5.2) $\Xi=\Xi_{\chi^{(1)}}.$

6) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_4^2$.

$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4.$

7) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_6$.

$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3.$

8) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_7$.

$\Xi_i = \Xi_{\varphi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, \cdots, 7.$

9) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_8$.

9.1) $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4, 5.$

9.2) $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2.$

10) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_{12}$.

10.1) $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4.$

10.2) $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3.$

11) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_{12}^*$.

11.1) $\Xi_4 = \Xi_{\chi_2^{(1)}}$,

$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(2)}} - \Xi_4$ $i=1, 2, 3.$

11.2) $\Xi_i = \Xi_{\chi^{(1)}} - \Xi_{\chi_i^{(2)}}$ $i=1, 2, 3.$

12) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_{21}$.

$\Xi_i = \Xi_{\varphi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4, 5.$

13) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_{24}$.

13.1) $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3, 4, 5.$

13.2) $\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}}$ $i=1, 2, 3.$

14) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_{24}^*$.

14.1) $\Xi_4 = \Xi_{\chi_2^{(1)}}$,

$\Xi_5 = \Xi_{\chi_4^{(1)}}$,

$\Xi_3 = \Xi_{\chi_3^{(2)}} - \Xi_4 - \Xi_5$,

$\Xi_1 = \Xi_{\chi_1^{(1)}} - \Xi_3$, $\Xi_2 = \Xi_{\chi_3^{(1)}} - \Xi_3$.

14.2) $\Xi_3 = \Xi_{\chi_1^{(2)}}$,

$\Xi_i = \Xi_{\chi_i^{(1)}} - \Xi_3$ $i=1, 2.$

15) $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{G}$.

15.1) $\Xi_5 = \Xi_{\chi_2}$,

$\Xi_6 = \Xi_{\varphi_2}$,

$\Xi_4 = \Xi_{\chi_3} - \Xi_6$, $\Xi_1 = \Xi_{\chi_1} - \Xi_4$,

$\Xi_2 = \Xi_{\varphi_4} - \Xi_4 - \Xi_5 - \Xi_6$,

$\Xi_3 = \Xi_{\varphi_3} - \Xi_4 - \Xi_5 - \Xi_6$.

15.2) $\Xi_5 = \Xi_{\varphi_2}$,

$\Xi_i = \Xi_{\chi_{i-2}} - \Xi_5$ $i=3, 4.$

$\Xi_i = \Xi_{\varphi_{i+3}} - \Xi_3 - \Xi_4 - \Xi_5$ $i=1, 2.$

Schliesslich ist also klar, dass alle Charaktere von $\mathfrak{G}$ durch die Charaktere beider Untergruppen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{H}_{21}$ mittels Induzieren hergestellt werden.

Mathematisches Institut, Universität zu Tokyo,
den 11. Januar 1960.

Literatur.

[1] Z. Suetuna, Zerlegung der Charaktere einer Gruppe in die ihres Normalteilers, Jap. J. Math., **12** (1935), 95-98.
[2] ———, Abhängigkeit der L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern (Zweite Mitteilung), J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Sec. I, **3**, 4 (1937), 223-252.
[3] ———, Über die Zerlegung der Gruppencharaktere (Zweite Mitteilung), Jap. J. Math., **16** (1940), 79-91.
[4] ———, Zur Theorie der Gruppencharaktere, ebd., **18** (1943), 729-744.
[5] K. Sekino, Über die Zerlegung der Gruppencharaktere, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **7**, 2 (1954), 255-263.
[6] ———, Über die Zerlegung der Gruppencharaktere (Zweite Mitteilung), ebd., **8**, 2 (1960), 195-228.