Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires dans l'espace vectoriel topologique.

Par Masuo HUKUHARA

Soit $\mathfrak{R}$ un espace vectoriel topologique sur un corps de nombres réels. Nous considérerons l'équation différentielle ordinaire

$$\text{(a)} \qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

où t désigne une variable réelle, tandis que x représente un point variable dans l'espace $\mathfrak{R}$ que nous supposerons complet et localement convexe. Le but de notre présent mémoire est à voir comment peuvent s'étendre à une telle équation les théorèmes fondamentaux que nous avons établis dans le cas où $\mathfrak{R}$ est un espace à un nombre fini de dimensions.

I. Etudes préliminaires.

1. Notations.

Désingnons par α un nombre réel, par a un point de $\mathfrak{R}$ et par A, B et E des ensembles dans $\mathfrak{R}$. Les ensembles αE, $E(\alpha)$, $A \pm B$ seront définis par les relations:

$$\alpha E = \{\alpha x\,;\ x \in E\},$$
$$E(a) = \{x + a\,;\ x \in E\},$$
$$A \pm B = \{x \pm y\,;\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Soit $\mathfrak{B}$ un système fondamental de voisinages de o. Alors $\mathfrak{B}(a)$ désigne le système correspondant au point a:

$$\mathfrak{B}(a) = \{V(a)\,;\ V \in \mathfrak{B}\}.$$

Nous supposerons que les voisinages ($\in \mathfrak{B}$) sont ouverts, convexes et symétriques, c'est ce qui est évidemment possible d'après les hypothèses sur l'espace $\mathfrak{R}$. V étant un voisinage ($\in \mathfrak{B}$), nous désignerons par $|x|_V$ la pseudo-norme:

$$|x|_V = \inf\{\lambda > 0\,;\ x \in \lambda V\}.$$

Cette pseudo-norme satisfait aux conditions suivantes:

(i) $0 \leqq |x|_V < \infty$;

(ii) $|\lambda x|_V = |\lambda| . |x|_V$;

(iii) $|x \pm y|_V \leqq |x|_V + |y|_V$.

On en conclut que $|x|_V$ est une fonction continue de x dans $\mathfrak{V}$. La condition $a \in V$ est équivalente à $|a|_V < 1$.

2. Fonctions dérivables à droite.

Nous considérerons dans ce numéro des fonctions qui sont des applications d'un intervalle réel dans l'espace $\mathfrak{R}$.

Théorème 1. *Soit K un ensemble fermé et convexe. Si $f(t)$ est une fonction continue et admettant la dérivée à droite dans $[\alpha, \beta\rangle$ et si l'on a $D^+f(t) \in K$, on a*

$$f(t) - f(\alpha) \in (t-\alpha)K$$

pour $\alpha \leqq t < \beta$.

En effet, supposons le contraire. Il existe alors une valeur $\gamma \in [\alpha, \beta\rangle$ telle que $f(\gamma) - f(\alpha)$ n'appartienne pas à $(\gamma - \alpha)K$. On peut alors trouver un voisinage $V \in \mathfrak{V}$ tel que $(\gamma-\alpha)(K+V)$ ne contienne pas $f(\gamma) - f(\alpha)$. Soit α' la borne inférieure de l'ensemble

$$\left\{t\,;\ \alpha \leqq t \leqq \gamma,\ f(t)-f(\alpha) \notin (t-\alpha)\left(K+\frac{1}{2}V\right)\right\}.$$

On a nécesairement $\alpha \leqq \alpha' < \gamma$ et $D^+f(t)$ n'appartient pas à $(t-\alpha)K$ pour $t = \alpha'$.

Théorème 2. *Soient K un ensemble fermé et convexe et $f(t)$ une fonction continue et admenttant la dérivée à droite dans l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$. On a alors*

$$\inf\left\{\lambda\,;\ \frac{f(t')-f(t)}{t'-t} \in \lambda K\right\} = \inf\{\lambda\,;\ D^+f(t) \in \lambda K\},$$

où t et t' parcourent l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Il est clair que le second membre de l'égalité à démontrer ne dépasse pas le premier. Le théorème 1 montre inversement que le premier membre ne dépasse pas le second.

Théorème 3. *Si $f(t)$ est continue et admet la dérivée à droite bornée dans $\langle\alpha, \beta\rangle$, les limites*

$$a = \lim_{t \to \alpha+0} f(t), \quad b = \lim_{t \to \beta-0} f(t)$$

existent.

En effet, soit $V \in \mathfrak{V}$ un voisinage quelconque. On peut trouver un nombre positif λ tel que $D^+f(t) \in \lambda \bar{V}$ pour $\alpha < t < t' < \beta$. Si $\lambda' > \lambda$, on a, d'après le théorème 2,

$$\frac{f(t')-f(t)}{t'-t} \in \lambda' V.$$

Si donc $\delta < 1/\lambda'$, on a

$$f(t') - f(t) \in V$$

pour $\alpha < t < t' < \alpha + \delta$ ou pour $\beta - \delta < t < t' < \beta$. Grâce à la complétesse de l'espace $\mathfrak{R}$, on en déduit la conclusion du théorème.

On verra de même sans peine le

Théorème 4. *Soit $f(t)$ une fonction continue pour $[\alpha, \beta\rangle$ et admettant la dérivée à droite pour $\langle\alpha, \beta\rangle$. Si l'on a $D^+f(t) \to c$ pour $x \to \alpha + 0$, $f(t)$ admet la dérivée à droite égale à c pour $x = \alpha$.*

3. Fonctions continues convexes et positivement homogènes.

Nous appellerons ainsi les fonctions $S(x)$ continues dans l'espace $\mathfrak{R}$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) On a

$$S(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqq \lambda S(x) + (1-\lambda)S(y) \tag{1}$$

pour $x \in \mathfrak{R}$, $y \in \mathfrak{R}$ et $0 < \lambda < 1$;

(ii) On a

$$S(\lambda x) = \lambda S(x) \tag{2}$$

pour $0 < \lambda < \infty$.

Si V est un voisinage $\in \mathfrak{V}$, $|x|_V$ est une fonction $S(x)$. D'une manière générale, soit D un ensemble convexe contenant o intérieurement. La fonction $S(x)$ définie par la relation

$$S(x) = \inf\{\lambda > 0\,;\ x \in \lambda D\} \tag{3}$$

est continue, convexe et positivement homogène.

Réciproquement, si $S(x)$ est une fonction continue convexe et positivement homogène, l'ensemble.

$$D = \{x\,;\ S(x) < 1\} \tag{4}$$

est un ouvert convexe contenant o et l'on a (3).

Théorème 1. *Si $S(x)$ est une fonction continue convexe et positivement homogène, on a $S(o) = 0$ et*

$$D^{\pm}S(f(t)) \leqq S(D^{\pm}(f)) \tag{5}$$

pour toute fonction $f(t)$ admettant la dérivée à droite ou à gauche.

Réciproquement, si $S(x)$ est continue et s'annule pour $x = 0$, et si l'on a (5) *pour toute fonction $f(t)$ admettant la dérivée à droite ou à gauche. $S(x)$ est une fonction continue convexe et positivement homogène.*

Démontrons d'abord la dérivabilité à droite de $S(f(t))$ en supposant celle de $f(t)$.

$$(6) \qquad F(t)=S(a+tb)$$

étant une fonction continue convexe de la variable réelle t, elle admet la dérivée à droite $D^+F(t)$. Pour démontrer que $S(f(t))$ est dérivable à droite pour $t=0$, par exemple, nous posons

$$f(0)=a, \ [D^+f(t)]_0=b$$

et

$$f(t)=a+t(b+g(t)).$$

On a, d'après (i) et (ii),

$$\pm(S(f(t))-F(t))\leqq S(\pm tg(t))=S(o(t))=o(t).$$

On en conclut que $D^\pm S((f(t))$ existe et est égale à la valeur de $D^+F(t)$ pour $t=0$.

Cela posé, on voit facilement que l'on a

$$\frac{S(f(t+h))-S(f(t))}{h}\leqq S\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right),$$

d'où l'on déduit (5).

Réciproquement, supposons (5) pour toute fonction continue $f(t)$ dérivable à droite ou à gauche. La fonction $F(t)$ définie par (6) satisfait à l'inégalité

$$D^+F(t)\leqq S(b)$$

pour $0\leqq t<1$. Par suite, on a pour $0\leqq t<1$

$$F(1)-F(t)\leqq(1-t)S(b),$$
$$F(t)-F(0)\leqq tS(b),$$

c'est-à-dire

$$S(a+b)-S(a+tb)\leqq(1-t)S(b),$$
$$S(a+tb)-S(a)\leqq tS(b).$$

On en déduit immédiatement

$$S(a+b)\leqq S(a)+S(b),$$
$$S(tb)=tS(b).$$

La dernière égalité est démontrée seulement pour $0\leqq t\leqq 1$. Mais, en remplaçant t par $1/t$, on voit qu'elle est encore valable pour $t>1$.

Puis on a

$$S(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqq S(\lambda x)+S((1-\lambda)y)=\lambda S(x)+(1-\lambda)S(y).$$

4. Sous-systèmes.

Un ensemble ordonné avec une relation d'ordre $\prec$ sera appelé filtrant, si tout couple d'éléments est majoré. Un système de voisinage est filtrant si l'on considère l'inclusion $\supset$ comme la relation d'ordre $\prec$.

Soient Λ et M des ensembles filtrants. Une application de M dans Λ sera dite propre si, à chaque partie co-finale de M, elle fait correspondre une partie co-finale de Λ. Nous appellerons système filtrant un élément de nature quelconque dépendat d'un paramètre variable dans un ensemble filtrant. Si φ est une application propre d'un ensemble filtrant M dans un ensemble filtant Λ, le système filtrant $a_{\varphi(\mu)}$ $(\mu\in M)$ sera dit *sous-système* du système filtrant a_λ $(\lambda\in\Lambda)$. Alors un sous-système de $a_{\varphi(\mu)}$ $(\mu\in M)$ est un sous-système de a_λ $(\lambda\in\Lambda)$.

Théorème 1. *Soit $P(\alpha)$ une propriété dépendant d'un paramètre α variable dans un ensemble A et telle que tout sous-système d'un système filtrant vérifiant cette propriété la vérifie aussi. Si, quel que soit $\alpha\in A$, on peut extraire de tout sous-système d'un système filtrant a_λ $(\lambda\in\Lambda)$ un sous-système jouissant de la propriété $P(\alpha)$, il existe un sous-système $a_{\chi(\mu)}$ $(\mu\in M)$ tel que le système filtrant $a_{\chi(\mu)}$ $(\mu\in M(\mu_\alpha))$ jouisse de la propriété $P(\alpha)$, où*

$$M(\mu_\alpha)=\{\mu\in M;\ \mu\in\mu_\alpha\}$$

α désignant un élément quelconque de A.

Pour démontrer ce théorème, nous untilisons le

Lemme.[1] *Soient Λ et A des ensembles filtrants. Nous supposons* (i) *qu'à chaque élément $\alpha\in A$ correspondent un ensemble filtrant Λ_α et une application propre φ_α de Λ_α dans Λ;* (ii) *qu'à chaque couple α, $\alpha'\in A$ tel que $\alpha\prec\alpha'$ corresponde une application propre $\psi_{\alpha\alpha'}$ de*

$$\Lambda_{\alpha'}(\lambda_{\alpha\alpha'})=\{\lambda\in\Lambda_{\alpha'}\ ;\ \lambda\geqq\lambda_{\alpha\alpha'}\}$$

dans Λ_α, où $\lambda_{\alpha\alpha'}$ est un élément de $\Lambda_{\alpha'}$ et (iii) *que l'on ait*

$$\varphi_\alpha(\psi_{\alpha\alpha'}(\lambda))=\varphi_{\alpha'}(\lambda) \tag{1}$$

pour $\lambda\in\Lambda_{\alpha'}(\lambda_{\alpha\alpha'})$.

On peut alors déterminer un système filtrant M, une application propre χ de M dans Λ et des applications propres χ_α de $M(\mu_\alpha)$ dans Λ_α de manière que l'on ait

$$\varphi_\alpha(\chi_\alpha(\mu))=\chi(\mu) \tag{2}$$

pour $\mu\in M(\mu_\alpha)$, où μ_α est un élément de M.

Supposons que A soit bien ordonné. α_1 désignant le premier élément de A, nous prenons un sous-système $a_{\varphi_1(\lambda)}$ $(\lambda\in\Lambda_1)$ jouissant de la propriété $P(\alpha_1)$.

1) Pour la démonstration de ce lemme, voir mon article: Sur le procédé diagonal, F. E. **7** (1953) (en japonais).

Supposons d'une manière générale que, β désignant un élément quelconque de A, on ait défini pour $\alpha \prec \beta$, $\alpha \in A$ les ensembles filtrants Λ_α, les applications propres φ_α de Λ_α dans Λ et pour $\alpha \prec \alpha'$, $\alpha \in A$, $\alpha' \in A$ les applications propres $\psi_{\alpha\alpha'}$ de $\Lambda_{\alpha'}(\lambda_{\alpha\alpha'})$ dans Λ_α de manière que l'on ait (1) et que le système filtrant $a_{\varphi_\alpha(\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda_\alpha)$ jouisse de la propriété $P(\alpha)$. On peut alors appliquer le lemme, en prenant pour A l'ensemble des $\alpha \prec \beta$. On peut donc déterminer un système filtrant M, une application propre χ de M dans Λ et des applications propres χ_α de $M(\mu_\alpha)$ dans Λ_α de manière que les conditions du lemme soient remplies.

$a_{\chi(\mu)}$ $(\mu \in M)$ étant un sous-système de a_λ $(\lambda \in \Lambda)$, on peut en extraire un sous-système $a_{\varphi_\beta(\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda_\beta)$ jouissant de la propriété $P(\beta)$. Ce sous-système sera défini par une application propre Φ de Λ_β dans M et l'on a

$$\varphi_\beta(\lambda) = \chi(\Phi(\lambda)).$$

Définissons l'application propre $\psi_{\alpha\beta}$ de $\Lambda_\beta(\lambda_{\alpha\beta})$ dans Λ_α par la relation

$$\psi_{\alpha\beta}(\lambda) = \chi_\alpha(\Phi(\lambda)).$$

Pour que cette définition soit légitime, il suffit que $\lambda \geqq \lambda_{\alpha\beta}$ entraîne $\Phi(\lambda) \geqq \mu_\alpha$. On a alors

$$\varphi_\alpha(\psi_{\alpha\beta}(\lambda)) = \varphi_\alpha(\chi_\alpha(\Phi(\lambda))) = \chi(\Phi(\lambda)) = \varphi_\beta(\lambda),$$

de sorte que la relation (1) subsiste pour $\alpha \prec \alpha' = \beta$.

Par conséquent, les ensembles filtrants Λ_α, les applications propres φ_α et $\psi_{\alpha\alpha'}$ seront définies, d'après ce procédé transfini, pour tous les $\alpha, \alpha' \in A$ $(\alpha \prec \alpha')$. En appliquant de nouveau le lemme, on peut déterminer un ensemble filtrant M, l'application propre χ de M dans Λ et les applications propres χ_α de M dans Λ_α de manière que les conditions du lemme soient remplies. $a_{\chi(\mu)}$ $(\mu \in M)$ est un sous-système du système filtrant a_λ $(\lambda \in \Lambda)$. D'autre part, $a_{\chi(\mu)}$ $(\mu \in M(\mu_\alpha))$ est, d'après (2), un sous-système du système filtrant $a_{\varphi_\alpha(\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda_\alpha)$. Il vérifie donc la propriété $P(\alpha)$.

5. Systèmes filtrants compacts.

Considérons maintenant un système filtrant a_λ $(\lambda \in \Lambda)$ de points dans l'espace $\mathfrak{N}$. Par définition il *converge* vers un point a, si l'on peut faire correspondre à chaque voisinage $V \in \mathfrak{V}$ un élément $\lambda_V \in \Lambda$ tel que $a_\lambda - a \in V$ pour $\lambda \geqq \lambda_V$, $\lambda \in \Lambda$. Dans ce cas on peut faire correspondre à V un élément $\lambda_V \in \Lambda$ tel que $a_\lambda - a_{\lambda'} \in V$ pour $\lambda \geqq \lambda_V$, $\lambda \in \Lambda$ et $\lambda' \geqq \lambda_V$, $\lambda' \in \Lambda$, et réciproquement. Tout sous-système d'un système filtrant convergent est aussi convergent et le point limite reste le même.

Un système filtrant de points sera dit *compact* si de tout sous-système on peut extraire un sous-système convergent. On a alors le

Théorème 1. *Pour qu'un système filtrant a_λ $(\lambda \in \Lambda)$ de points dans l'espace*

$\mathfrak{R}$ soit compact, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie:

V désignant un voisinage quelconque $\in\mathfrak{V}$, on peut extraire de tout sous-système du système filtrant a_λ $(\lambda\in\Lambda)$ un sous-système tel que la différence de ses points appartienne à V.

Il est clair que la condition est nécessaire. Pour démontrer la suffisance de la condition, nous la supposons vérifiée.

Nous dirons qu'un système filtrant c_ν $(\nu\in N)$ de points dans $\mathfrak{R}$ jouit de la propriété $P(V)$, si l'on a $c_\nu - c_{\nu'}\in V$ pour $\nu\in N$, $\nu'\in N$. On peut appliquer le théorème démontré au n° 4, en prenant pour A le système fondamental de voisinages $\mathfrak{V}$. Il existe donc un sous-système $a_{\chi(\mu)}$ $(\mu\in M)$ tel que $a_{\chi(\mu)}$ $(\mu\in M(\mu_V))$ jouisse de la propriété $P(V)$. Le sous-système est alors convergent.

On voit de même l'existence d'un sous-système convergent d'un sous système quelconque du système filtrant a_λ $(\lambda\in\Lambda)$. Le théorème est donc établi.

6. Ensemble compact.

Théorème 1. *Pour qu'un ensemble E dans l'espace $\mathfrak{R}$ soit relativement compact, il faut et il suffit que tout système filtrant formé de points de E soit compact.*

Supposons qu'un système filtrant a_λ $(\lambda\in\Lambda)$ formé de points de E ne soit pas compact. Si V est un voisinage convenablement choisi, il existe, d'après le théorème du n° 5, un sous-système b_μ $(\mu\in M)$ tel que chaque sous-système contienne deux éléments dont la différence n'appartient pas à $2V$. x désignant un point quelconque de la fermeture $\bar{E}$, l'ensemble

$$\{\mu\in M\,;\ b_\mu - b\in V\}$$

ne peut être co-final dans M. Extrayons de $\bar{E}$ d'une manière quelconque un nombre fini de points $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Ancun des ensembles

$$M_k=\{\mu\in M\,;\ b_\mu - x_k\in V\}\qquad (k=1, 2, \cdots, n)$$

n'étant co-final dans M, leur réunion ne l'est pas non plus et les voisinages $V(x_1)$, $\cdots$, $V(x_n)$ ne couvrent pas $\bar{E}$. Par suite $\bar{E}$ n'est pas compact.

Réciproquement, supposons que $\bar{E}$ ne soit pas compact. Il existe alors une partie A telle que l'on puisse faire correspondre à chaque point $a\in\bar{E}$ un voisinage $V_a(a)$ dont l'intersection avec A est de nombre cardinal moindre que celui de A. Parmi les nombres cardinaux de ces ensembles A, il y a le plus petit, que nous désignerons par $\aleph_\alpha$, et nous pouvons supposer que $\aleph_\alpha$ soit celui de A. Soit donc

$$A=\{a_\varphi\,;\ \varphi\prec\omega_\alpha\}.$$

Si la condition du théorème était vérifiée, il existerait un sous-système convergent $a_{\varphi(\mu)}$ $(\mu\in M)$ du système filtrant a_λ $(\lambda<\omega_\alpha)$. Si $V\in\mathfrak{B}$ et si a était le point limite du système filtrant $a_{\varphi(\mu)}$ $(\mu\in M)$,

$$\Lambda_V=\{\varphi(\mu)\,;\ \mu\in M,\ a_{\varphi(\mu)}-a\in V\}$$

serait une partie co-finale de $\Lambda=\{\lambda\,;\lambda<\omega_\alpha\}$. Le nombre cardinal de Λ_V devrait être moindre que $\aleph_\alpha$ pour $V=V_\alpha$. Par suite $\omega_\alpha=\lim\limits_{\varphi<\alpha}\omega_\varphi$. D'après la définition de ω_α, l'ensemble

$$A_\beta=\{a_\varphi\,;\ \varphi<\omega_\beta\}$$

admettrait, si $\beta<\alpha$, un point d'accumulation b_β d'ordre $\aleph_\beta$. V étant un voisinage quelconque, nous désignons par $a_{\beta,V}$ un point a_φ tel que $a_\varphi-b_{\beta+1}\in V$, $\varphi>\omega_\beta$. L'ensemble

$$\mathfrak{B}=\{(\beta,\ V)\,;\ \beta<\alpha,\ V\in\mathfrak{B}\}$$

est filtrant si l'on définit la relation d'ordre $(\beta',V')\leqq(\beta,V)$ par $\beta'\leqq\beta$, $V'\supseteqq V$. On pourrait extraire du système filtrant $a_\mathfrak{b}$ $(\mathfrak{b}\in\mathfrak{B})$ un sous-système convergent. Le point limite de ce système filtrant serait un point d'accumulation d'ordre $\aleph_\alpha$ pour A, contrairement à notre hypothèse.

7. Système filtrant de fonctions.

Nous dirons que f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ est un système filtrant de fonctions sur E, si l'on peut faire correspondre à chaque $x\in E$ un élément $\lambda_x\in\Lambda$ de manière que $f_\lambda(x)$ soit défini pour $\lambda\geqq\lambda_x$, $\lambda\in\Lambda$. Dans ce numéro la variable indépendante est supposée qu'elle représente un point dans l'espace $\mathfrak{R}$, tandis que la valeur que prend la fonction appartient à un autre espace $\mathfrak{R}'$ de nature analogue. Un système fondamental de voisinages de o' dans l'espace $\mathfrak{R}'$ sera désigné par $\mathfrak{B}'$

Nous dirons que le système filtrant de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ est convergent ou compact au point $x=a$, suivant que le système filtrant de points $f_\lambda(a)$ $(\lambda\in\Lambda)$ est convergent ou compact, et que le système filtrant de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ est convergent sur E s'il est convergent en chaque point de E. Si l'on peut extraire de tout sous-système du système de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ un sous-système convergent sur E, nous dirons que le système filtrant de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ est compact sur E dans l'espace produit $\prod\limits_{x\in E}\mathfrak{R}$.

Théorème 1. *Pour qu'un système filtrant de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ soit compact sur E, dans l'espace produit $\prod\limits_{x\in E}\mathfrak{R}$, il faut et il suffit qu'il soit compact en chaque point de E.*

La nécessité de la condition est évidente. Pour démontrer la suffisance, nous supposons que le système filtrant de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ soit compact en chaque point de E.

Disons qu'un système filtrant de fonctions sur E jouit de la propriété $P(x)$

s'il est convergent au point x. A l'aide du théorème 1 du n° 4, on peut dire que, quel que soit un sous-système g_μ ($\mu \in M$) du système f_λ ($\lambda \in \Lambda$), il existe un sous-système convergent en chaque point de E. C. Q. E. D.

8. Convergence uniforme.

Soit f_λ ($\lambda \in \Lambda$) un système filtrant de fonctions sur E. Nous dirons qu'il est uniformément convergent au point $a \in E$, si l'on peut faire correspondre à chaque $V' \in \mathfrak{V}'$ un élément $\lambda_{V'} \in \Lambda$ et un voisinage $U \in \mathfrak{V}$ de manière que l'on ait

$$(1) \qquad f_\lambda(x) - f_{\lambda'}(x) \in V'$$

pour

$$(2) \qquad x \in U(x) \cap E\,;\ \lambda,\ \lambda' \in \Lambda(\lambda_{V'}).$$

Dans ce cas, il est convergent au point a, parce que nous supposons l'espace $\mathfrak{R}'$ complet. Nous dirons qu'il est uniformément convergent sur E s'il est uniformément convergent en chaque point de E.

Le théorème suivant peut se démontrer d'après le procédé bien connu et il serait inutile de le démontrer.

Théorème 1. *Si un système filtrant formé de fonctions continues est uniformément convergent sur E, la fonction limite est aussi continue sur E.*

Nous dirons qu'un système filtrant f_λ ($\lambda \in \Lambda$) de fonctions sur E est *équicontinu* au point $a \in E$, si l'on peut faire correspondre à chaque $V' \in \mathfrak{V}'$ un élément $\lambda_{V'} \in \Lambda$ et un voisinage $U \in \mathfrak{V}$ de manière que l'on ait

$$(3) \qquad f_\lambda(x) - f_\lambda(a) \in V'$$

pour

$$(4) \qquad x \in U(a) \cap E,\ \lambda \in \Lambda(\lambda_{V'}).$$

Nous dirons qu'il est équicontinu sur E, s'il est équicontinu en chaque point de E.

Il est à remarquer que l'équicontinuité du système filtrant f_λ ($\lambda \in \Lambda$) n'entraîne pas la continuité de chaque fonction f_λ. Mais on a le

Théorème 2. *Si un système filtrant de fonctions f_λ ($\lambda \in \Lambda$) est équicontinu et convergent sur E, il est uniformément convergent sur E et la fonction limite est continue sur E.*

Soit $f(x)$ la fonction limite du système filtrant f_λ ($\lambda \in \Lambda$). Un voisinage $V' \in \mathfrak{V}'$ étant donné, on peut supposer que l'on ait (3) et

$$(5) \qquad f_\lambda(a) - f(a) \in V'$$

pour (4). On a alors

$$f_\lambda(x) - f(a) \in 2V',$$

d'où l'on déduit

$$(6) \qquad |f(x)-f(a)|_{V'} \leqq 2$$

pour $x \in U(a) \cap E$, ce qui prouve la continuité de f au point a.

(3), (5) et (6) entraînent ensuite

$$|f_\lambda(x)-f(x)|_{V'} < 4,$$

ce qui prouve la convergence uniforme au point a.

Théorème 3. *Si un système filtrant de fonctions f_λ ($\lambda \in \Lambda$) sur E converge uniformément vers une fonction f continue sur E, il est équicontinu sur E.*

On a dans ce cas (1) pour (2) et

$$(7) \qquad f(x)-f(a) \in V'$$

pour $x \in U(a) \cap E$. (1) entraîne

$$(8) \qquad |f_\lambda(x)-f(x)|_{V'} \leqq 1,$$

qui est valable aussi pour $x=a$. On a donc

$$|f_\lambda(x)-f_\lambda(a)|_{V'} < 3,$$

ce qui prouve l'équicontinuité du système filtrant f_λ ($\lambda \in \Lambda$).

Théorème 4. *Si un système filtrant de fonctions f_λ ($\lambda \in \Lambda$) est équicontinu sur E et convergent sur un ensemble D dense dans E, il converge uniformément sur E.*

Ce théorème est aussi facile à démontrer et il serait inutile de le démontrer.

Théorème 5. *Si un système filtrant de fonctions f_λ sur E converge uniformément en un point $a \in E$ vers une fonction f continue en a, et si $a_\lambda \in E$, $a_\lambda \to a$ ($\lambda \in \Lambda$), le système filtrant de points $f_\lambda(a_\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) converge vers $f(a)$.*

Soit $V' \in \mathfrak{V}'$ un voisinage quelconque. On aura (7) pour $x \in V(a) \cap E$ et (8) pour (4). Ces relations entraînent

$$f_\lambda(x)-f(a) \in 2V'.$$

On peut supposer $a_\lambda - a \in V$ pour $\lambda \in \Lambda(\lambda_{V'})$. On a donc

$$f_\lambda(a_\lambda)-f(a) \in 2V'$$

pour $\lambda \in \Lambda(\lambda_{V'})$, ce qui prouve le théorème.

9. Systèmes filtrants bornés.

Un ensemble borné est un ensemble E tel que l'ensemble $\{|x|_V;\ x \in E\}$ soit borné pour chaque $V \in \mathfrak{V}$. Nous dirons qu'un système filtrant de points a_λ ($\lambda \in \Lambda$) est *borné* si l'on peut faire correspondre à chaque $V \in \mathfrak{V}$ un élément λ_V tel que l'ensemble $\{|a_\lambda|_V;\ \lambda \in \Lambda(\lambda_V)\}$ soit borné. Il est clair qu'un système filtrant de points d'un ensemble borné E est borné.

Supposons maintenant que E ne soit pas borné. Il existe alors un voisinage $V\in\mathfrak{V}$ tel que l'ensemble $\{|x|_V;\ x\in E\}$ ne soit pas borné. On peut donc extraire de E une suite de points a_n $(n=1, 2, \cdots)$ telle que $|a_n|_V\to\infty$. Par suite, on peut énoncer le

Théorème 1. *Si E est un ensemble borné, tout système filtrant de points de E est borné. Si toute suite de points de E est bornée, E est un ensemble borné.*

10. Fonctions bornées.

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un ensemble E. Nous dirons qu'elle est *bornée* au point $a\in E$, s'il existe un voisinage $V\in\mathfrak{V}$ tel que l'image de $E\cap V(a)$ soit bornée. Nous dirons qu'un système filtrant de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ sur E est *équiborné* au point $a\in E$, s'il existe un voisinage $V\in\mathfrak{V}$ et un élément $\lambda_0\in\Lambda$ tel que les images de $E\cap V(a)$ par $f_\lambda(x)$ soient contenues pour $\lambda\in\Lambda(\lambda_0)$ dans un ensemble borné.

Théorème 1. *Si une fonction f définie sur E est bornée en un point $a\in E$, le système filtrant de points $b_\lambda=f(a_\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$, où $a_\lambda\to a$, est borné, et réciproquement.*

Il est clair que si $f(x)$ est bornée en a, le système filtrant de points b_λ $(\lambda\in\Lambda)$ est borné. Démontrons la réciproque.

Supposons que $f(x)$ ne soit pas bornée. On peut faire correspondre à un entier positif n et à deux voisinages $V\in\mathfrak{V}$ et $V'\in\mathfrak{V}'$ un point $a_{n,V}$ tel que l'on ait $a_{n,V}\in E\cap V(a)$ et

$$|f(a_{n,V})|_{V'}>n.$$

En désignant par N l'ensemble des entiers positifs, le système filtrant de points $a_{n,V}$ $((n, V)\in N\times\mathfrak{V})$[1] converge vers a. $\lambda_0=(n_0, V_0)$ désignant un élément quelconque de $\Lambda=N\times\mathfrak{V}$, $\Lambda(\lambda_0)$ contient une suite d'éléments (n, V) $(n=n_0, n_0+1,\cdots)$ à laquelle correspond une suite de points $f(a_{n,V})$ $(n=n_0, n_0+1, \cdots)$ telle que $|f(a_{n,V})|_{V'}\to\infty$. Le système filtrant de points $f(a_{n,V})$ ne peut être borné.

Théorème 2. *Si une fonction f définie sur E est continue en un point $a\in E$, elle est bornée en a.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

Théorème 3. *Soit f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ un système filtrant de fonctions sur E équiborné en un point a. Si l'on a $a_\mu\in E$, $a_\mu\to a$ $(\mu\in M)$ et si φ est une application propre de M dans Λ, le système filtrant de points $f_{\varphi(\mu)}(a_\mu)$ $(\mu\in M)$ est borné.*

1) Λ et M étant deux ensembles filtrants, nous désignons par $\Lambda\times M$ l'ensemble filtrant formé des couples (λ, μ) où l'on a $(\lambda,\mu)\leqq(\lambda', \mu')$ si et seulement si l'on a $\lambda\leqq\lambda'$ dans Λ et $\mu\leqq\mu'$ dans M.

La réciproque est aussi vraie.

La première partie du théorème étant évidente, démontrons seulement la réciproque. Pour cela nous supposons que le système filtrant de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ ne soit pas borné au point a.

Nous désignons par V et V' des voisinages quelconques appartenant respectivement à $\mathfrak{V}$ et à $\mathfrak{V}'$ et par λ un élément quelconque de Λ. La réunion des images de $E\cap V(a)$ par $f_{\lambda'}$ $(\lambda'\in\Lambda(\lambda))$ n'étant pas bornée, on peut faire correspondre à chaque entier positif n un point $a_{n\lambda VV'}\in E\cap V(a)$ tel que

$$|f_\varphi(a_{n\lambda VV'})-f_\varphi(a)|_{V'}>n,$$

où $\varphi=\varphi(n, \lambda, V, V')\in\Lambda(\lambda)$. Soit $M=N\times\Lambda\times\mathfrak{V}\times\mathfrak{V}'$ et désignons par μ un élément quelconque de M. Le système filtrant de points a_μ $(\mu\in M)$ converge vers a et le système filtrant de points $f_{\varphi(\mu)}$ $(\mu\in M)$ n'est pas borné. Or φ est une application propre de M dans Λ. La réciproque est donc démontrée.

Théorème 4. *Si un système filtrant de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ sur E est borné et équicontinu en un point $a\in E$, il est équiborné en a.*

Considérons un système filtrant de points a_μ $(\mu\in M)$ tel que $a_\mu\in E$, $a_\mu\to a$, et une application propre φ de M dans Λ. D'après l'équicontinuité, on a (8.3) pour (8.4), $V'\in\mathfrak{V}$ désignant un voisinage quelconque. On aura $a_\mu\in U(a)\cap E$, $\varphi(\mu)\geqq\lambda_{V'}$ pour $\mu\in M(\mu_{V'})$, $\mu_{V'}$ désignant un élément convenablement choisi de M. On a alors

$$f_{\varphi(\mu)}(a_\mu)-f_{\varphi(\mu)}(a)\in V'.$$

Le système filtrant $f_{\varphi(\mu)}(a)$ $(\mu\in M)$ étant borné, le système filtrant $|f_{\varphi(\mu)}(a)|_{V'}$ $(\mu\in M)$ l'est aussi. Par suite le système filtrant $|f_{\varphi(\mu)}(a_\mu)|_{V'}$ $(\mu\in M)$ est borné. V' étant un voisinage quelconque, le système filtrant $f_{\varphi(\mu)}(a_\mu)$ $(\mu\in M)$ est borné et la condition du théorème 3 est donc vérifiée.

Théorème 5. *Soit f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ un système filtrant de fonctions équicontinu sur un ensemble E. Alors l'ensemble des points B où il est borné est ouvert et en même temps fermé dans E.*

Il est facile de voir que B est ouvert dans E.

Soit $a\in E$ un point d'accumulation de B. D'après l'équicontinuité, on a (8.3) pour (8.4), $V'\in\mathfrak{V}'$ désignant un voisinage quelconque. $U(a)$ contient un point b de B, et le système filtrant $f_\lambda(b)$ $(\lambda\in\Lambda)$ est borné. On peut donc supposer que l'on a $|f_\lambda(b)|_{V'}<\alpha$ pour $\lambda\in\Lambda(\lambda_{V'})$. On a alors

$$|f_\lambda(a)|_{V'}\leqq|f_\lambda(a)-f_\lambda(b)|_{V'}+|f_\lambda(a)|_{V'}<1+\alpha.$$

Le système filtrant f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ est donc borné en a.

11. Fonctions complètement continues.

Une fonction $f(x)$ sera dite *compacte* sur E si elle est définie sur E et si l'image de E par f est relativement compacte. Une fonction continue et compacte sera dite *complètement continue.* $f(x)$ étant une fonction définie sur E, elle sera dite compacte en $a\in E$ s'il existe un voisinage V tel que f soit compacte sur $E\cap V(a)$. Elle sera dite complètement continue en $a\in E$ si elle est continue et compacte en a.

Considérons un système filtrant de fonctions f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ sur E. Nous dirons qu'il est *équicompact* en a si l'on peut trouver un élément $\lambda_0\in\Lambda$ et un voisinage V tels que l'ensemble

$$\{f_\lambda(x)\,;\ x\in E\cap V(x),\ \lambda\in\Lambda(\lambda_0)\}$$

est relativement compact et qu'il est complètment équicontinu en $a\in E$, s'il est équicontinu et équicompact en a.

12. Système filtrant de fonctions dérivables à droite.

Soit f_λ $(\lambda\in\Lambda)$ un système filtrant de fonctions continues sur un intervalle réel I; les valeurs que prennent les fonctions f_λ sont supposées des points dans l'espace $\mathfrak{R}$. Nous supposons de plus que l'on a $f_\lambda(\alpha)=b$, α désignant une valeur de I et que $D^+f_\lambda(t)$ $(\lambda\in\Lambda)$ converge uniformément dans I vers une fonction $g(t)$ continue dans I. Nous voulons montrer que $f_\lambda(t)$ $(\lambda\in\Lambda)$ converge uniformément dans I vers la fonction continue

$$f(t)=b+\int_\alpha^t g(t)dt. \tag{1}$$

En remplaçant f_λ par

$$f_\lambda(t)-b-\int_\alpha^t g(t)dt$$

nous pouvons supposer que $g(t)=o$. Soit α' une valeur quelconque de I, que nous supposons, par exemple, plus grande que α. A chaque $t\in[\alpha,\alpha']$ et à chaque $V\in\mathfrak{V}$ on peut faire correspondre un $\lambda_{tV}\in\Lambda$ et un $\delta_{t,V}>0$ tels que l'on ait $D^+f_\lambda(t+h)\in V$ pour $\lambda\geqq\Lambda$ (λ_{tV}), $t+h\in I$, $|h|<\delta_{tV}$. On peut extraire de $[\alpha,\alpha']$ un nombre fini de valeurs $t_1,t_2,\cdots,t_n$ de manière que la réunion des intervalles $<t-\delta_{tV},t+\delta_{tV}>$ $(t=t_1,t_2,\cdots,t_n)$ couvre $[\alpha,\alpha']$. On peut ensuite déterminer λ_V de manière que l'on ait $\lambda_V\geqq\lambda_{tV}$ pour $t=t_1,t_2,\cdots,t_n$. On a alors $D^+f_\lambda(t)\in V$ pour $\alpha\leqq t\leqq\alpha'$, $\lambda\in\Lambda(\lambda_V)$. Le théorème 1 du n° 2 montre que l'on a

$$f_\lambda(t)\in(t-\alpha)\overline{\overline{V}}$$

pour $\alpha\leqq t<\alpha'$, et la continuité de f_λ entraîne que cette relation subsiste pour $t=\alpha'$. V étant un voisinage quelconque, on a $f_\lambda(t)\to 0$ uniformément dans $[\alpha,\alpha']$.

α' étant une valeur quelconque de I, nous obtenons le

Théorème 1. *Soit f_λ ($\lambda \in \Lambda$) un système filtrant de fonctions sur un intervalle réel I; les fonctions f_λ sont supposées continues et dérivables à droite et les valeurs qu'elles prennent sont des points dans l'espace $\mathfrak{R}$. Si l'on a $f_\lambda(a) \to b$, a étant une certaine valeur $\in I$ et si $D^+ f_\lambda(t)$ ($\lambda \in \Lambda$) converge uniformément dans I vers une fonction continue $g(t)$, le système filtrant de fonctions f_λ ($\lambda \in \Lambda$) converge uniformément dans I vers une fonction continue définie par* (1).

II. Théorèmes de comparaison.

13. Solutions.

Une fonction continue est une solution de (a) dans un intervalle ouvert $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ si elle admet une dérivée φ' et si l'on a de plus

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi'(t)) ; \tag{1}$$

elle est une solution de (a) dans un intervalle $[\alpha, \alpha' \rangle$ ou $\langle \alpha, \alpha']$ suivant qu'elle admet en outre pour $t = \alpha$ une dérivée à droite $\varphi'(\alpha)$ satisfaisant à (1) ou pour $t = \alpha'$ une dérivée à gauche $\varphi'(\alpha')$ satisfaisant à (1).

Si $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont des solutions de (a) respectivement dans $\langle \alpha, \alpha']$ et $[\alpha', \alpha'' \rangle$ et si $\varphi_1(\alpha') = \varphi_2(\alpha')$, la fonction $\varphi(t)$ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{pour} \quad \alpha < t \leqq \alpha', \\ \varphi_2(t) & \text{pour} \quad \alpha' \leqq t < \alpha'' \end{cases}$$

est une solution dans $\langle \alpha, \alpha'' \rangle$. Dans ce cas l'une des solutions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ et un *prolongement* de l'autre ; nous dirons que la solution $\varphi_1(t)$ est *prolongeable vers droite* au delà de α' et $\varphi_2(t)$ est *prolongeable vers gauche* au delà de α'.

Si $\varphi(t)$ est une solution de (a), l'équation $x = \varphi(t)$ représente dans l'espace $R_1 \times \mathfrak{R}$ une courbe que nous appellerons *courbe solution* de (a).

Théorème 1. *Soient $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ des solutions de* (a) *dans un intervalle I. Si une fonction continue $\varphi(t)$ dans I coïncide avec l'une des solutions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ pour chaque $t \in I$, elle est une solution de* (a) *dans I.*

Ce théorème est évident, et je ne reproduis pas ici la démonstration.

Théorème 2. *Si un système filtrant de solutions $\varphi_\lambda(t)$ ($\lambda \in \Lambda$) de* (a) *converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction continue $\varphi(t)$ et si l'ensemble des points, où $f(t, x)$ est continue, contient la courbe $x = \varphi(t)$, la fonction limite $\varphi(t)$ est une solution de* (a) *dans I.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 1 du n° 12, car le système filtrant formé des dérivées $\varphi'_\lambda(t)$ converge uniformément vers $f(t, \varphi(t))$ dans l'intervalle I.

14. Fonctions majorantes, fonctions minorantes.

Soit D un ensemble dans $R_1 \times \mathfrak{R}$. Un ensemble E de D s'appelle *région majorante à droite* de (a) dans D si la condition suivante est remplie :

Soit $\varphi(t)$ une solution quelconque de (a) dans un intervalle $[\alpha, \alpha')$[1]. Si $(\alpha, \varphi(\alpha))$ appartient à E et si la courbe solution $x = \varphi(t)$ se trouve dans D, elle se trouve dans E.

On définit de même une *région majorante à gauche*.

Soit $S(x)$ une fonction convexe et positivement homogène. Prenons pour D l'ensemble $I \times \mathfrak{R}$, I désignant un intervalle réel, et pour E l'ensemble défini par

$$t \in I, \quad S(x) \leqq \chi(t), \tag{1}$$

où $\chi(t)$ désigne une fonction continue dans I et admettant la dérivée à droite (gauche). Si E est une région majorante à droite (gauche) de (a) dans D, la fonction $\varphi(t)$ est appelée *fonction majorante à droite* (*gauche*) de (a) dans l'intervalle I par rapport à S.

Si l'ensemble E, défini par

$$t \in I, \quad S(x) \geqq \chi(t) \tag{2}$$

au lieu de (1), est une région majorante à droite (gauche) de (a) dans D, la fonction $\chi(t)$ est appelée *fonction minorante à droite* (*gauche*) de (a) dans l'intervalle I par rapport à S. Dans le cas particulier où $\mathfrak{R} = R_1$, nous prenons toujours $S(x) = x$ sans mention expresse.

Le but de ce présent chapitre est à donner des théorèmes utiles pour trouver des fonctions majorantes ou minorantes.

On a évidemment le

Théorème 1. *Soit E_λ $(\lambda \in \Lambda)$ une famille de régions majorantes à droite* (*gauche*) *de* (a) *dans un ensemble D. La réunion $\bigcup_\lambda E_\lambda$ et l'intersection $\bigcup_\lambda E_\lambda$ sont des régions majorantes à droite* (*gauche*) *de* (a) *dans D.*

Corollaire 1. *Soit $\chi_\lambda(t)$ $(\lambda \in \Lambda)$ une famille de fonctions majorantes à droite* (*gauche*) *de* (a) *dans un intervalle I par rapport à S. Si*

$$\chi(t) = \inf_\lambda \chi_\lambda(t) \tag{3}$$

est une fonction continue dans I, elle est fonction majorante à droite (*gauche*) *de* (a) *dans I par rapport à S.*

En effet, l'ensemble E_λ défini par

[1] Cette notation signifie que l'extrémité gauche de l'intervalle appartient à l'intervalle; quant à l'extrémité droite, elle peut appartenir ou non à l'intervalle.

$$(4) \qquad t\in I,\ S(x)\leqq \chi_\lambda(t)$$

est une région majorante dans $D=I\times\mathfrak{R}$, et l'ensemble E défini par (1) est l'intersection des ensembles E_λ $(\lambda\in\Lambda)$.

Dans le cas particulier où $\mathfrak{R}=R_1$, on a le

Corollaire 2. *Soit* $\chi_\lambda(t)$ $(\lambda\in\Lambda)$ *une famille de fonctions minorantes à droite* (*gauche*) *de* (a) *dans un intervalle* I. *Si*

$$(5) \qquad \chi(t)=\sup_\lambda \chi_\lambda(t)$$

est une fonction continue dans I, *elle est une fonction minorante à droite* (*gauche*) *de* (a) *dans* I.

On peut vérifier sans peine le

Théorème 2. *Soient* $\chi_1(t)$ *et* $\chi_2(t)$ *des fonctions minorantes à droite* (*gauche*) *de* (a) *dans un intervalle* I *par rapport à* S. *Si une fonction* $\chi(t)$ *continue dans* I *satisfait à la relation*

$$(6) \qquad (\chi(t)-\chi_1(t))(\chi(t)-\chi_2(t))=0$$

elle est une fonction majorante à droite (*gauche*) *de* (a) *dans* I *par rapport à* S.

En appliquant ce théorème à l'équation en $-y$ dans le cas de $\mathfrak{R}=R_1$, on obtient le

Corollaire 3. *Soient* $\chi_1(t)$ *et* $\chi_2(t)$ *des fonctions minorantes à droite* (*gauche*) *de* (a) *dans un intervalle* I. *Si une fonction* $\chi(t)$ *continue dans* I *satisfait à la relation* (6), *elle est une fonction minorante à droite* (*gauche*).

On voit aussi immédiatement le

Théorème 3. *Si* E *est une région majorante à droite* (*gauche*) *dans* D, *le complément de* E *dans* D *est une région majorante à gauche* (*droite*) *dans* D.

15. Fonctions supérieures, fonctions inférieures.

Soit E un ensemble fermé dans D. Si l'on peut faire correspondre à chaque point $(\alpha, b)\in E$, où $f(t, x)$ est défini, un nombre positif δ et un voisinage $V\in\mathfrak{V}$ de manière que E contienne l'ensemble $T_{\delta,V}(\alpha, b)$ défini par

$$0\leqq t-\alpha\leqq\delta,\ |y-b-(t-\alpha)f(\alpha, b)|_V\leqq t-\alpha,$$

nous appellerons E *région dominante à droite de* (a) *dans* D. Nous définissons de même *région dominante à gauche*.

Région dominante à droite (gauche) de (a) dans elle-même s'appelle *enemble ouvert* à droite (gauche) par rappart à (a). Ensemble ouvert par rapport à (a) est un ensemble ouvert à droite et à gauche par rapport à (a). Un ensemble ouvert en sens ordinaire est évidemment ouvert par rapport à (a).

Théorème 1. *Une région dominante à droite (gauche) E de* (a) *dans D est une région majorante à droite (gauche) de* (a) *dans D.*

Soit $\varphi(t)$ une courbe solution contenue dans D. Nous supposons que $\varphi(t)$ soit définie dans un intervalle $[\alpha, \alpha')$ et que (α, b), où $b=\varphi(\alpha)$, appartienne à E. Si la courbe solution contenait des points extérieurs de E, on pourrait supposer que α soit la borne inférieure de l'ensemble des valeurs t telles que $(t, \varphi(t))$ soit extérieur à E. $\varphi'(\alpha)$ étant égale à $f(\alpha, b)$, on aurait

$$(1) \qquad |\varphi(t)-b-(t-\alpha)f(\alpha, b)|_V \leqq t-\alpha$$

dans un intervalle assez petit $[\alpha, \alpha+\delta']$. Le point $(t, \varphi(t))$ appartiendrait donc à $T_{\delta, V}(\alpha, b)$ et par suite à E pour $0 \leqq t-\alpha \leqq \delta'$, contrairement à l'hypothèse.

Nous dirons qu'une fonction continue $\chi(t)$ est une *fonction supérieure à droite (gauche)* de (a) dans un intervalle I par rapport à S si l'ensemble défini par

$$(2) \qquad t \in I, \quad S(x) \leqq \chi(t)$$

est une région dominante à droite (gauche) de (a) dans $I \times \mathfrak{R}$. Dans le cas particulier: $\mathfrak{R}=R_1$, nous définissons de même une *fonction inférieure à droite (gauche)* en remplaçant (2) par $t \in I$, $x \geqq \chi(t)$.

Théorème 2. *Une fonction $\chi(t)$ continue et dérivable à droite ou à gauche dans un intervalle I est une fonction dominante à droite ou à gauche par rapport à S suivant que l'on a*

$$(3) \qquad D^+\chi(t) > S(f(t, x))$$

ou

$$(4) \qquad -D^-\chi(t) > S(-f(t, x))$$

pour

$$(5) \qquad t \in I, \quad S(x)=\chi(t), \quad (t, x) \in \mathfrak{D}_f,$$

$\mathfrak{D}_f$ désignant l'ensemble des points où $f(t, x)$ est défini.

Soit $(\alpha, b) \in \mathfrak{D}_f$ un point tel que $S(b)=\chi(\alpha)$. Il suffit de montrer que si $\gamma > S(f(\alpha, b))$, on a

$$(6) \qquad S(y) \leqq \chi(\alpha)+\gamma(t-\alpha)$$

pour $(t, y) \in T_{\delta, V}(\alpha, b)$, V étant convenablement choisi.

Or on a

$$S(y) \leqq S(b)+S(y-b).$$

On peut supposer que $|x|_V \leqq 1$ entraîne $S(x) < \varepsilon$, ε étant un nombre positif donné à l'avance. En prenant

$$\varepsilon = \gamma - S(f(\alpha, b)),$$

on obtient (6).

Dans le cas particulier : $\mathfrak{R}=R_1$, on peut démontrer facilement le

Théorème 3. *Une fonction $\chi(t)$ continue et dérivable à droite dans un intervalle I est supérieure ou inférieure à gauche suivant qu'on a*

$$D^+\chi(t)>f(t, \chi(t)),$$

ou

$$D^+\chi(t)<f(t, \chi(t))$$

pour $t\in I$, $(t, \chi(t))\in\mathfrak{D}_f$.

La réciproque est aussi vraie.

De même, pour qu'une fonction $\chi(t)$ continue et dérivable à gauche dans I soit supérieure ou inférieure à gauche, il faut et il suffit que l'on ait

$$D^-\chi(t)<f(t, \chi(t)),$$

ou

$$D^-\chi(t)>f(t, \chi(t))$$

pour $t\in I$, $(t, \chi(t))\in\mathfrak{D}_f$.

L'intersection d'une famille de régions dominantes dans D est majorante mais non nécessairement dominante. Quant à leur réunion, on obtient le

Théorème 4. *Soit E_λ $(\lambda\in\Lambda)$ une famille de régions dominantes à droite (gauche) de* (a) *dans un ensemble D. Si la réunion $\bigcup_\lambda E$ est fermée dans D, elle est une région dominante à droite (gauche) de* (a) *dans D.*

Le théorème suivant correspond au théorème 2 du n° 14 et se démontre de la même manière.

Théorème 5. *Soient $\chi_1(t)$ et $\chi_2(t)$ des fonctions supérieures à droite (gauche) de* (a) *dans un intervalle I par rapport à S. Si une fonction $\chi(t)$ continue dans I satisfait à la relation* (14.6), *elle est une fonction supérieure à droite (gauche) de* (a) *dans I par rapport à S.*

Corollaire. *Dans le cas de $\mathfrak{R}=R_1$, une fonction continue $\chi(t)$ satisfaisant à la relation* (14.8) *est une fonction inférieure à droite (gauche) de* (a) *en même temps que $\chi_1(t)$ et $\chi_2(t)$.*

16. Extrémités de courbes solutions.

Théorème 1. *Soit $\varphi(t)$ une solution définie dans un intervalle $\langle\alpha, \alpha'\rangle$ $(\langle\alpha', \alpha\rangle)$ et supposons qu'il existe une suite décroissante (croissante) α_n $(n=1, 2,\cdots)$ telle que l'on ait*

$$\alpha_n\to\alpha, \qquad \varphi(\alpha_n)\to b.$$

Si $f(t, x)$ est définie et bornée au point (α, b), $\varphi(t)$ converge vers b pour $t\to\alpha$.

Nous supposons $b=o$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Si un nombre $\delta>0$ et un voisinage U sont convenablement choisis, l'image de

$$(1) \qquad \mathfrak{D}_f \cap ([\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]\times U)$$

par f est un ensemble borné. Soit $V\in\mathfrak{V}$ un ensemble quelconque contenu dans U. Il existe alors un nombre tel que l'on ait

$$|f(t,x)|_V<\beta$$

dans l'ensemble (1). Pour que la fonction

$$\chi(t)=\varepsilon+\beta(t-\alpha)$$

soit supérieure à droite dans un intervalle $[\alpha, \alpha+\delta_\varepsilon\rangle$ par rapport à $|\ |_V$, il suffit que l'on ait

$$\delta_\varepsilon<\frac{1}{\beta}(1-\varepsilon).$$

Puisque l'on a

$$\alpha<\alpha_n<\alpha+\delta_\varepsilon, \qquad |\varphi(\alpha_n)|_V<\varepsilon$$

pour n assez grand, on a

$$|\varphi(t)|_V\leqq\chi(t)$$

pour $\alpha_n\leqq t<\alpha+\delta_\varepsilon$. α_n tendant vers α, on a cette inégalité pour $\alpha<t<\alpha+\delta_\varepsilon$, d'où l'on déduit

$$\overline{\lim}|\varphi(t)|_V\leqq\varepsilon.$$

ε étant un nombre positif arbitraire, $|\varphi(t)|_V$ converge vers 0 pour $t\to\alpha+0$. V étant un voisinage quelconque, $\varphi(t)$ converge vers o $(=b)$ pour $t\to\alpha+0$.

S'il n'existe pas de courbe solution issue à droite (gauche) d'un point (α, b) du $E\subseteqq\mathfrak{D}_f$, nous dirons que (α, b) est une *extrémité droite* (*gauche*) de E par rapport à (a). *Région sans extrémité droite* (*gauche*) est un ensemble dont aucun point n'est une extrémité droite (gauche). On a alors le

Théorème 2. *Soit E un ensemble fermé dans D. Supposons que $f(t, x)$ soit bornée au point de E et que E soit une région sans extrémité droite* (*gauche*) *de* (a).

Alors toute courbe solution de (a) *est prolongeable vers droite* (*gauche*) *jusqu'à la frontière de D. Plus précisément, si $x=\varphi(t)$ est une courbe solution contenue dans E et telle que l'on ne puisse la prolonger vers droite* (*gauche*) *au delà de α', la suite de points $(\alpha_n, \varphi(\alpha_n))$ ne peut converger vers un point intérieur de D de quelque manière qu'on choisisse la suite croissante* (*décroissante*) *convergeant vers α.*

Soit, en effet, a' le point limite de la suite $\varphi(\alpha_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$. Si (α', a') n'était pas un point frontière de D, il appartiendrait à E. $\varphi(t)$ convergerait, d'après le théorème 1, vers a' pour $t\to\alpha'-0$. E étant sans extrémité droite, on pourrait prolonger $\varphi(t)$ au delà de α', ce qui est contraire à l'hypothèse.

17. Théorèmes de comparaison, I.

Considérons maintenant le cas où $\chi(t)$ est une solution de l'equation différentielle

$$\text{(A)} \qquad \frac{dX}{dt}=F(t, X),$$

où X est une variable réelle. $S(x)$ désignant toujours une fonction convexe et positivement homogène, nous supposons que l'on ait l'inégalité

$$(1) \qquad S(f(t, x))<F(t, S(x))$$

lorsque $(t, x)\in\mathfrak{D}_f$, $(t, S(x))\in\mathfrak{D}_F$. On a alors

$$D^+\chi(t)=F(t, \chi(t))>S(f(t, x))$$

pour $(t, x)\in\mathfrak{D}_f$, $S(x)=\chi(t)$. $\chi(t)$ est donc une fonction supérieure à droite.

Considérons, d'autre part, une solution quelconque $\varphi(t)$ de (a). On a

$$D^+S(\varphi(t))\leqq S(\varphi'(t))=S(f(t, \varphi(t))<F(t, S(\varphi(t))).$$

On obtient donc le

Théorème 1. *Supposons que l'on ait* (1) *pour* $(t, x)\in\mathfrak{D}_f$, $(t, S(x))\in\mathfrak{D}_F$.

Alors une solution de (A) *est une fonction supérieure à droite de* (a) *par rapport à* S *et* $S(\varphi(t))$, *où* $\varphi(t)$ *est une solution de* (a), *est une fonction inférieure à droite de* (A).

On peut démontrer de même le

Théorème 2. *Supposons que l'on ait*

$$(2) \qquad S(-f(t, x))<-F(t, S(x))$$

pour $(t, x)\in\mathfrak{D}_f$, $(t, S(x))\in\mathfrak{D}_F$.

Alors, une solution quelconque de (A) *est une fonction supérieure à gauche de* (a) *par rapport à* S *et* $S(\varphi(t))$, *où* $\varphi(t)$ *est une solution de* (a), *est une fonction inférieure à gauche de* (A).

18. Fonctions quasi supérieures, fonctions quasi inférieures.

Considérons maintenant le cas où l'on a

$$(1) \qquad S(f(t, x))\leqq F(t, S(x))$$

au lieu de (17.1). Une solution quelconque $\chi(t)$ de (A) satisfait à l'inégalité

$$(2) \qquad D^+\chi(t)\geqq S(f(t, x))$$

pour

$$(3) \qquad t\in I,\ S(x)=\chi(t),\ (t,x)\in\mathfrak{D}_f,$$

I désignant l'intervalle où $\chi(t)$ est définie. Si une fonction $\chi(t)$ continue et dérivable à droite satisfait à cette condition, nous l'appellerons *fonction quasi supérieure à droite* de (a) dans I par rapport à S. Si $\chi(t)$ satisfait à

$$(4) \qquad -D^{-}\chi(t)\geqq S(-f(t,x))$$

pour (3), nous l'appellerons *fonction quasi supérieure à gauche*. On définira de même *fonction inférieure à* droite ou à gauche comme une fonction continue $\chi(t)$ satisfaisant à l'inégalité

$$(5) \qquad D^{+}\chi(t)\leqq F(t,\chi(t))$$

ou

$$(6) \qquad D^{-}\chi(t)\geqq F(t,\chi(t))$$

pour (3). On peut alors démontrer facilement les deux théorèmes suivants qui correspondent aux théorèmes 17.1 et 17.2.

Théorème 1. *Supposons que l'on ait* (1) *pour* $(t,x)\in\mathfrak{D}_f$, $(t,S(x))\in\mathfrak{D}_F$.

Alors une solution quelconque de (A) *est une fonction quasi supérieure à droite de* (a) *par rapport à* S *et* $S(\varphi(t))$, *où* $\varphi(t)$ *est une solution de* (a), *est une fonction quasi inférieure à droite de* (A).

Théorème 2. *Supposons que l'on ait*

$$(7) \qquad S(-f(t,x)\leqq -F(t,S(x))$$

pour $(t,x)\in\mathfrak{D}_f$, $(t,S(x))\in\mathfrak{D}_F$.

Alors, une solution quelconque de (A) *est une fonction quasi supérieure à gauche de* (a) *par rapport à* S *et* $S(\varphi(t))$, *où* $\varphi(t)$ *est une solution de* (a), *est une fonction quasi inférieure à gauche de* (A).

Les théorèmes suivants sont des conséquences immédiates du théorème d'existence du type de Perron.

Théorème 3. *Nous supposons que* $F(t,X)$ *soit continue dans l'ensemble défini par*

$$(8) \qquad t\in I,\ \chi(t)\leqq X\leqq\overline{\omega}(t),$$

où $\chi(t)$ *et* $\overline{\omega}(t)$ *sont des fonctions continues satisfaisant à l'inégalité* $\chi(t)<\overline{\omega}(t)$ *dans* I. *Si* $\chi(t)$ *est une fonction majorante à droite (gauche) de* (A) *dans* I, *elle est une fonction quasi supérieure à droite (gauche) de* (A) *dans* I.

Théorème 4. *Nous supposons que* $F(t,X)$ *soit continue dans l'ensemble défini par*

(9) $$t\in I,\ \omega(t)\leqq X\leqq\chi(t),$$

où $\chi(t)$ *et* $\omega(t)$ *sont des fonctions continues satisfaisant à l'inégalité* $\omega(t)<\chi(t)$ *dans* I. *Si* $\chi(t)$ *est une fonction minorante à droite (gauche) de* (A) *dans* I, *elle est une fonction quasi inférieure à droite (gauche) de* (A) *dans* I.

19. Théorèmes de comparaison, II.

En appliquant de nouveau le théorème d'existence du type de Perron, on obtient les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Nous supposons remplies les hypothèses du théorème* 18.3. *Si une fonction quasi inférieure à droite (gauche)* $\omega(t)$ *de* (A) *satisfait à l'inégalité*

$$\omega(t)\leqq\chi(t)$$

pour $t=\alpha\in I$, *on a cette inégalité à droite (gauche) de* α *dans* I

Corollaire. *Nous supposons remplies les hypothèses du théorème* 18.3. *Si l'on a de plus* (18.1) *pour* $(t, x)\in\mathfrak{D}_f$, $(t, S(x))\in\mathfrak{D}_f$, $\chi(t)$ *est une fonction majorante à droite de* (a) *dans* I *par rapport à* S.

Théorème 2. *Nous supposons remplies les hypothèses du théorème* 18.4. *Si une fonction quasi supérieure à droite (gauche)* $\omega(t)$ *de* (A) *satisfait à l'inégalité*

$$\omega(t)\geqq\chi(t)$$

pour $t=\alpha\in I$, *on a cette inégalité à droite (gauche) de* α *dans* I.

Corollaire. *Nous supposons remplies les hypothèses du théorème* 18.4. *Si l'on a de plus* (18.4) *pour* $(t, x)\in\mathfrak{D}_f$, $(t, S(x))\in\mathfrak{D}_F$, $\chi(t)$ *est une fonction majorante à gauche de* (a) *dans* I *rapport à* S.

20. Théorèmes d'unicité.

Nous dirons qu'une famille $\mathfrak{S}$ de fonctions continues convexes et positivement homogènes est fondamentale si l'on peut faire correspondre à chaque $V\in\mathfrak{V}$ un nombre fini de fonctions $S_j\in\mathfrak{S}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ telles que l'intersection des ensembles $S_j(x)<1$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ sont contenus dans V. Nous désignerons désormais par $\mathfrak{S}$ une famille fondamentale de fonctions continues convexes et positivement homogènes. Comme un exemple d'une telle famille, nous pouvons signaler celle qui est formée des fonctions $|x|_V$, $V\in\mathfrak{V}$.

Théorème 1. *Nous supposons remplies les conditions suivantes:*

(i) *A chaque* $S\in\mathfrak{S}$ *correspond une fonction réelle* $F_S(t, X)$ *continue dans l'ensemble défini par*

(1) $$t\in I,\ 0\leqq X\leqq\delta_S,$$

où $I=[\alpha, \alpha']$ *est un intervalle indépendant de* S, *tandis que* $\delta_S>0$ *est un* *nombre pouvant dépendre de S;*

(ii) $X\equiv 0$ *est une seule solution s'annulant pour* $t=\alpha$ *de l'équation différentielle*

$$\frac{dX}{dt}=F_S(t, X); \tag{2}$$

(iii) *On a*

$$S(f(t, x))\leqq F_S(t, S(x)) \tag{3}$$

pour

$$t\in I,\quad (t,x)\in\mathfrak{D}_f,\quad 0\leqq S(x)\leqq\delta_S.$$

Alors l'équation (a) *n'admet pas de solution s'annulant pour* $t=\alpha$ *et non identiquement nulle dans* I.

On obtient une conclusion analogue en remplaçant les conditions initiales $X(\alpha)=0$, $x(\alpha)=0$ *et l'inégalité* (3) *respectivement par* $X(\alpha')=0$, $x(\alpha')=0$ *et*

$$S(-f(t, x))\leqq -F(t, S(x)). \tag{4}$$

En effet, soit $\varphi(t)$ une solution de (a) définie dans $[\alpha, \alpha']$ et s'annulant pour $t=\alpha$. La fonction identiquement 0 étant une fonction majorante à droite de (A) dans $[\alpha, \alpha']$, on a $S(\varphi(t))\leqq 0$ dans $[\alpha, \alpha']$ pour chaque $S\in\mathfrak{S}$, d'où il résulte la conclusion du théorème.

Théorème 2. *Nous supposons remplies les conditions* (i) *et* (ii) *du théorème* 1 *et la suivante:*

(iii′) *On a*

$$S(f(t, x)-f(t, y))\leqq F_S(t, S(x-y)) \tag{5}$$

pour

$$t\in I,\quad (t, x)\in\mathfrak{D}_f,\quad (t, y)\in\mathfrak{D}_f,\quad 0\leqq S(x-y)\leqq\delta_S.$$

Alors l'équation (a) *admet au plus une solution définie dans* $I=[\alpha, \alpha']$ *et prenant une valeur donnée* b *pour* $t=\alpha$.

On obtient une conclusion analogue en remplaçant les conditions initiales $X(\alpha)=0$, $x(\alpha)=b$ *et l'inégalité* (5) *respectivement par* $X(\alpha')=0$, $x(\alpha')=b$ *et*

$$S(f(t, x)-f(t, y))\leqq -F(t, S(y-x)). \tag{6}$$

Supposons, en effet, l'existence d'une solution $\varphi(t)$ répondant à la question. Soit

$$\frac{dX}{dt}=g(t, y) \tag{b}$$

l'équation différentielle en $y=x-\varphi(t)$. Puisque

$$g(t, y)=f(t, y+\varphi(t))-f(t, \varphi(t)),$$

on a

$$S(g(t, y)) \leqq F_S(t, S(y)).$$

Il suffit donc d'appliquer le théorème 1 pour obtenir la conclusion à démontrer.

Exemple. 1° Condition de Lipschitz :

$$(7) \qquad |f(t, x)-f(t, y)|_V \leqq L_V|x-y|_V,$$

où L_V est une constante qui peut dépendre de $V \in \mathfrak{V}$.

2° Condition d'Osgood :

$$(7) \qquad |f(t, x)-f(t, y)|_V \leqq F_V(|x-y|_V),$$

où $F_V(X)$ est une fonction continue positive dans $\langle 0, \delta_V]$ et telle que

$$(8) \qquad \int_0^{\delta_V} \frac{dX}{F_V(X)} = \infty.$$

21. Théorèmes de comparaison, III.

Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions définies à droite (gauche) de α. Nous dirons que $\mathfrak{F}$ détermine une condition $P(\mathfrak{F})$ à droite (gauche) de α et qu'une fonction réelle $\Phi(t)$ satisfait à la condition $P(\mathfrak{F})$ à droite (gauche) de α s'il existe une fonction $f \in \mathfrak{F}$ telle que $\Phi(t) \leqq f(t)$ dans un intervalle assez petit dont l'extrémité gauche (droite) est α. Si, S désignant une fonction continue convexe et positivement homogène, $S(\varphi(t))$ satisfait à la condition $P(\mathfrak{F})$ droite (gauche) de α, nous dirons que $\varphi(t)$ satisfait à la condition $P(\mathfrak{F})$ à droite (gauche) de α par rapport à S.

Revenons à l'équation (a) et considérons une solution $\varphi(t)$ définie dans $\langle \alpha, \alpha')$ et satisfaisant à la condition $P(\mathfrak{F})$ à droite de α par rapport à S. Soit d'autre part $\chi(t)$ une fonction majorante à droite de (a) dans $\langle \alpha, \alpha')$ par rapport à S. L'une des inégalités $S(\varphi(t)) \leqq \chi(t)$ ou $S(\varphi(t)) > \chi(t)$ subsiste dans $\langle \alpha, \alpha' \rangle$. Dans le second cas, si $\chi(t)$ ne satisfait pas à la condition $P(\mathfrak{F})$ à droite de α, on a nécessairement

$$(1) \qquad S(\varphi(t)) \leqq \chi(t)$$

dans $\langle \alpha, \alpha')$. Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 1. *Soient $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions positives définies à droite (gauche) de α, $\chi(t)$ une fonction majorante à droite (gauche) de* (a) *dans $I = \langle \alpha, \alpha')$ $(I = (\alpha', \alpha\rangle)$ par rapport à S et ne satisfaisant pas à la condition $P(\mathfrak{F})$ à droite (gauche) de α et $\varphi(t)$ une solution définie dans le même intervalle et satisfaisant à la condition $P(\mathfrak{F})$ à droite (gauche) de α par rapport à S. On a alors l'inégalité* (1) *dans l'intervalle I.*

Dans le cas de (A), on démontre de même le

Théorème 2. *Soient* $\mathfrak{F}$ *une famille de fonctions positives définies à droite (gauche) de* α, $\chi(t)$ *une fonction minorante à droite (gauche) de* (A) *dans* $I=\langle\alpha, \alpha')$ $(I=(\alpha', \alpha\rangle)$ *et satisfaisant à la condition* $P(\mathfrak{F})$ *à droite (gauche) de* α *et* $\Phi(t)$ *une solution de* (A) *définie dans* I *et ne satisfaisant pas à la condition* $P(\mathfrak{F})$ *à droite (gauche) de* α. *On a alors* $\chi(t)\leqq\Phi(t)$ *dans* I.

Considérons maintenant le cas où $\chi(t)$ est une seule solution de (A) définie dans un intervalle $I=\langle\alpha, \alpha']$ et satisfaisant à la condition $P(\mathfrak{F})$ à droite de α, et supposons que $F(t, X)$ soit continue dans

$$(2) \qquad t\in I, \ \chi(t)\leqq X\leqq\bar{\omega}(t),$$

où $\bar{\omega}(t)$ est une fonction continue telle que $\chi(t)<\bar{\omega}(t)$ dans $\langle\alpha, \alpha']$. Dans ce cas $\chi(t)$ est une fonction majorante à droite de (A) dans $\langle\alpha, \alpha']$. Car sinon on pourrait montrer l'existence d'une solution définie dans $\langle\alpha, \alpha']$, coïncidant avec $\chi(t)$ dans un intervalle $\langle\alpha, \alpha'']$ mais non pour $\alpha''<t\leqq\alpha'$.

Par suite, si $\omega(t)$ est une fonction quasi inférieure à droite de (A) dans $\langle\alpha, \alpha']$, l'une des inégalités $\chi(t)\geqq\omega(t)$ ou $\chi(t)<\omega(t)$ subsiste dans $\langle\alpha, \alpha')$. Dans le second cas on peut montrer l'existence d'une solution $\Phi(t)$ définie dans $\langle\alpha, \alpha']$, satisfaisant aux inégalités

$$\chi(t)\leqq\Phi(t)\leqq\omega(t)$$

dans un intervalle $\langle\alpha, \alpha'']$ et ne coïncidant pas avec $\chi(t)$ dans $\langle\alpha, \alpha']$. Par suite $\omega(t)$ ne peut satisfaire à la condition $P(\mathfrak{F})$ à droite de α. On obtient donc le

Théorème 3. *Soient* $\mathfrak{F}$ *une famille de fonctions définies à droite (gauche) de* α, $\chi(t)$ *une seule solution de* (A) *définie dans* $I=\langle\alpha, \alpha']$ $(I=[\alpha', \alpha\rangle)$, *satisfaisant à la condition* $P(\mathfrak{F})$ *à droite (gauche) de* α, *et supposons que* $F(t, X)$ *soit continue dans* (2), $\bar{\omega}(t)$ *désignant une fonction continue telle que* $\chi(t)<\bar{\omega}(t)$ *dans* I. *Dans ce cas, si* $\omega(t)$ *est une fonction quasi inférieure à droite (gauche) de* (A) *dans* I *satisfaisant à la condition* $P(\mathfrak{F})$ *à droite (gauche) de* α, *on a* $\omega(t)\leqq\chi(t)$ *dans* I.

Si $\varphi(t)$ est une solution de (a), et si l'on a (18.1), $S(\varphi(t))$ est, d'après le théorème 1 du n° 18, une fonction quasi inférieure à droite de (A). On obtient donc le

Corollaire. *Soient* $\mathfrak{F}$ *une famille de fonctions définies à droite (gauche) de* α, *et* $\chi(t)$ *une seule solution de* (A) *définie dans* $I=\langle\alpha, \alpha']$ $(I=[\alpha', \alpha\rangle)$, *satisfaisant à la condition* $P(\mathfrak{F})$ *à droite (gauche) de* α *et supposons que* $F(t, X)$ *soit continue dans* (2), $\bar{\omega}(t)$ *désignant une fonction continue telle que* $\chi(t)<\bar{\omega}(t)$ *dans* I. *Dans ce cas, si l'on a l'inégalité* (18.1) (*l'inégalité* (18.7)) *pour* $(t, x)\in\mathfrak{D}_f$, $(t, S(x))\in\mathfrak{D}_F$, *une solution* $\varphi(t)$ *de* (A) *définie dans* I *et satisfaisant à la con-*

dition $P(\mathfrak{F})$ *à droite (gauche) de* α *par rapport à* S *vérifie l'inégalité* (1) *dans* I.

22. Théorèmes d'unicité.

Le corollaire du théorème 3 du n° précédent nous conduit immédiatement au

Théorème 1. *Supposons qu'à chaque* $S\in\mathfrak{S}$ *correspondent une famille* $\mathfrak{F}_S$ *de fonctions positives définies à droite (gauche) de* α *et une fonction* $F_S(t, X)$ *satisfaisant aux conditions suivantes:*

(0) *Chaque fonction de* $\mathfrak{F}_S$ *converge vers* 0 *pour* $t\to\alpha+0$ $(t\to\alpha-0)$;

(i) $F_S(t, X)$ *est continue dans*

$$t\in I,\quad 0\leqq X\leqq\delta_S,$$

où $I=\langle\alpha, \alpha'\rangle$ $(I=[\alpha', \alpha\rangle)$ *est un intervalle indépendant de* S *tandis que* $\delta_S>0$ *est un nombre pouvant dépendre de* S;

(ii) $X\equiv 0$ *est une seule solution de* (20.2) *satisfaisant à* $P(\mathfrak{F}_S)$ *à droite (gauche) de* α;

(iii) *On a l'inégalité* (20.3) (*l'inégalité* (20.4)) *pour*

$$t\in I,\ (t, x)\in\mathfrak{D}_f,\ 0\leqq S(x)\leqq\delta_S.$$

Alors l'équation (a) *n'admet pas de solution non identiquement nulle dans* I *et satisfaisant à* $P(\mathfrak{F}_S)$ *à droite (gauche) de* α *par rapport à chaque* $S\in\mathfrak{S}$.

Soit, en effet, $\varphi(t)$ une solution de (a) définie dans I et satisfaisant à $P(\mathfrak{F}_S)$ à droite de α par rapport à chaque $S\in\mathfrak{S}$. On a, d'après le corollaire du théorème 3 du n° 21, l'inégalité $S(\varphi(t))\leqq 0$ pour chaque $S\in\mathfrak{S}$, d'où l'on déduit $\varphi(t)\equiv 0$.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.

Théorème 2. *Supposons qu'à chaque* $S\in\mathfrak{S}$ *correspondent une famille* $\mathfrak{F}_S$ *de fonctions positives définies à droite (gauche) de* α *et une fonction* $F_S(t, X)$ *satisfaisant aux condition* (0), (i), (ii) *du théorème* 1 *et à la suivante;*

(iii′) *On a l'inégalité* (20.5) (*l'inégalité* (20.6)) *pour*

$$t\in I,\ (t, x)\in\mathfrak{D}_f,\ (t, y)\in\mathfrak{D}_f,\ 0\leqq S(x-y)\leqq\delta_S.$$

Alors, si $\varphi(t)$ *et* $\psi(t)$ *sont des solutions de* (a) *définies dans* I *et dont la différence satisfait à* $P(\mathfrak{F}_S)$ *à droite (gauche) de* α *par rapport à chaque* $S\in\mathfrak{S}$, *elles coïncident identiquement dans* I.

Considérons en particulier le cas où $f(t, x)$ est continue au point $(\alpha, 0)$, $x\equiv 0$ étant une solution de (a). Soit $\varphi(t)$ une solution de (a) définie dans $[\alpha, \alpha']$ et s'annulant pour $t=\alpha$. Puisque

$$D^+S(\varphi(t))\leqq S(\varphi'(t))=S(f(t, \varphi(t)),$$

on a

$$\overline{\lim_{t\to s+0}} D^+ S(\varphi(t)) \leqq 0,$$

d'où

$$\overline{\lim_{t\to \alpha+s}} \frac{S(\varphi(t))}{t-\alpha} \leqq 0.$$

Par suite, pour assurer, dans le cas où $f(t,x)$ est continue au point (α, a), l'unicité de la solution prenant la valeur a pour $t=\alpha$, il suffit d'appliquer le théorème 2 en prenant pour $\mathfrak{F}$ la famille formée de toutes les fonctions positives d'ordre $o(t-\alpha)$ pour $t\to\alpha+0$.

EXEMPLES. 1°. Condition de Nagumo:

$$(1) \qquad |f(t, x)-f(t, y)|_V \leqq \frac{|x-y|_V}{|t-\alpha|}$$

2° Condition de Yasui[1];

$$(2) \qquad |f(t, x)-f(t, y)|_V \leqq H_V(t) F_V(|x-y|_V),$$

où $H_V(t)$ et $F_V(X)$ sont des fonctions continues et positives respectivement dans $\langle\alpha, \alpha'\rceil$ et $\langle 0, \delta_V\rceil$ et telles que l'on ait (20.2) et

$$(3) \qquad \lim_{\rho\to+0} \overline{\lim_{t\to\alpha+0}} \left\{ \int_{\alpha'}^{t} H_V(t)dt - \int_{\delta_V}^{\rho r(t)} \frac{dX}{F(X)} \right\} \geqq 0.$$

Dans ce cas on peut prendre pour $\mathfrak{F}$ une famille de toutes les fonctions positives d'ordre $o(r(t))$ pour $t\to\alpha+0$.

3° Dans le cas où l'on a (20.2) et

$$\lim_{\rho\to+0} \lim_{t\to\alpha+0} \left\{ \int_{\alpha'}^{t} H(t)dt - \int_{\delta_V}^{\rho r(t)} \frac{dX}{F(X)} \right\} = \infty,$$

on peut prendre pour $\mathfrak{F}$ une famille de toutes les fonctions positives $\Phi(t)$ telles que

$$\underline{\lim_{t\to\alpha+0}} \Phi(t)/r(t) = 0.$$

Signalons enfin deux cas particuliers.

Si

$$\int_{a}^{\alpha'} H_V(t)dt < \infty, \qquad \int_{0}^{\delta_V} \frac{dX}{F(X)} = \infty$$

on peut prendre $r(t)=1$.

1) M. Yasui a obtenu cette condition qui est plus générale que celle de Nagumo et celle d'Osgood. Voir le complément de mon livre "Théorie des équations différentielles ordinaires," (en japonais) Iwanami, Tokyo, 1933.

Si

$$H_{\nu}(t)=\frac{r+\varepsilon(t)}{t-\alpha}, \qquad F_{\nu}(X)=X,$$

où $\varepsilon(t)$ est une fonction positive telle que

$$\int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\varepsilon(t)}{t-\alpha}\, dt<\infty,$$

on peut prendre

$$r(t)=(t-\alpha)^{r}.$$

La condition de Nagumo est un cas particulier où $r=1$, $\varepsilon(t)\equiv 0$.