Sur la théorie des équations différentielles ordinaires.

Par Masuo HUKUHARA.

Les théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires ont été étudiés par divers auteurs[1]. Nous avons entrepris d'établir une théorie systématique, en supposant, pour faciliter les considérations, la continuité des seconds membres des équations. Mais nos résultats peuvent s'étendre aux équations du type plus général, par exemple à celles du type dit de Carathéodory, et même aux équations du type différent, par exemple à celles que nous appelons inéquations différentielles. Mais pour établir ces résultats analogues, doit-on en refaire de nouveau les démonstrations? Ne peut-on trouver aucun mode de raisonnements qui s'applique toujours aux équations des types cités ci-dessus? Pour ce but, nous avons introduit les topologies droite et gauche[2]. Grâce à elles, nous pouvons réunir les résultats concernant les équations différentielles avec seconds membres continus et celles du type de Carathéodory ainsi que les inéquations différentielles. C'est ce que nous allons montrer dans les lignes suivantes.

I. Introduction des topologies droite et gauche.

Nous définirons dans cette section les topologies droite et gauche à l'égard de l'équation différentielle et nous remarquerons les propriétés dont jouissent ces topologies. Une caractéristique à droite est une courbe ou une fonction continue telle qu'un voisinage droit quelconque d'un de ses points contienne tous ses points situés à droite et assez près de lui. On définira de même topologie gauche et caractéristique à gauche. Le but principal de cette section est de chercher les conditions sous lesquelles une caractéristique est une solution et réciproquement.

Nous voulons étudier dans les sections suivantes les propriétés dont jouit la famille de caractéristiques en nous appuyant seulement sur les propriétés énumérées au n° 1. Grâce à l'équivalence des deux notions: caractéristiques et solutions, les résultats ainsi obtenus sont applicables aux éqution différentielles.

1) Pour la bibliographie, voir: C. L. da Silva Dias, Bibliografia sobre os teoremas de existéncia, unicade e dependéncia de parametros nas equações e sistemas de equações diferenciais ordinárias, Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, **4** (1949), 32-62.

2) M. Hukuhara, Sur l'exitence des solutions des équations différentielles ordinaires, Proc. Japan Acad. **31** (1955), 391-394; Fundamentaj teoremoj de la teorio de ordinaraj diferencialaj ekvacioj, I, II, Funk. Ekv., **7** (1954), No. 3, 3-13, **8** (1955), No. 2, 3-14.

1. Hypothèses sur les topologies droite et gauche. Considérons un système d'équations différentielles

$$dy_j/dx = f_j(x, y_1, \cdots, y_n) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

que nous écrirons brièvement

$$(1.1) \qquad d\vec{y}/dx = \vec{f}(x, \vec{y}).$$

Supposons d'abord que $\vec{f}$ soit continue dans son domaine d'existence $\mathfrak{D}$.

Nous appelons *voisinage droit* d'un point $(\xi, \vec{\eta}) \in \mathfrak{D}$ l'ensemble $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ des points $(x, \vec{y})$ tels que[3]

$$(1.2) \qquad 0 \leqq x - \xi \leqq \varepsilon, \qquad |\vec{y} - \vec{\eta} - (x - \xi)\vec{f}(\xi, \vec{\eta})| \leqq \varepsilon(x - \xi),$$

ε étant un nombre positif quelconque. Par définition, tout voisinage droit $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ d'un point $(\xi, \vec{\eta}) \notin \mathfrak{D}$ ne contient que le point $(\xi, \vec{\eta})$ lui-même. L'ensemble des systèmes de voisinages droits définit une topologie, que nous appelons *topologie droite* relative à l'équation différentielle (1.1).

On définit de même le *voisinage gauche* $V_\varepsilon^-(\xi, \vec{\eta})$ et la *topologie gauche.*

Les voisinages droits jouissent de diverses propriétés que nous signalons dans la suite.

I$^+$. $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ est un ensemble fermé et borné et se réduit au point $(\xi, \vec{\eta})$ en décroissant lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

II$^+$. La section de $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ par l'hyperplan $x = t$ dépend de t d'une manière continue dans un intervalle fermé dont l'extrémité gauche est ξ et devient vide à l'extérieur de cet intervalle, et en particulier la section par l'hyperplan $x = \xi$ ne comprend que le point $(\xi, \vec{\eta})$.

Remarque 1. E étant un ensemble dans un espace $\mathfrak{R}^n$ de dimension n, nous désignons par $U_\delta(E)$ l'ensemble des points distants de E au plus de δ. $U_\delta(E)$ est donc fermé. Si E est borné, il l'est aussi.

Considérons un ensemble fermé et borné E_t dépendant d'un paramètre t. Nous dirons qu'il dépend de t d'une manière continue pour $t = \tau$, si, quelque petit que soit $\delta > 0$, on a

$$U_\delta(E_\tau) \supseteqq E_t, \qquad U_\delta(E_t) \supseteqq E_\tau$$

pourvu que t (appartenant au domaine de définition de E_t) soit assez voisin de τ. Nous dirons qu'il dépend de t d'une manière continue dans un intervalle de t, s'il dépend d'une manière continue pour toutes les valeurs de l'intervalle, en considérant, bien entendu, l'intervalle comme le domaine de définition de E_t.

On peut vérifier sans peine que l'on a

$$U_\alpha(U_\beta(E)) = U_{\alpha+\beta}(E).$$

On peut en conclure immédiatent que la continuité de E_t entraîne celle de $U_\delta(E_t)$.

Dans le cas d'un ensemble E fermé et borné dans un espace $\mathfrak{R}^{n+1}$ de dimension $n+1$, nous dirons que la section de E par l'hyperplan $x = t$ dépend de t d'une manière continue, si sa projection sur l'hyperplan $x = 0$ dépend de t d'une manière continue. Nous désignerons par $U_\delta(E)$ l'ensemble des points $(\xi, \vec{\eta})$ tels que

$$\inf\{|\vec{y} - \vec{\eta}|; (\xi, \vec{y}) \in E\} \leqq \delta.$$

3) $|\vec{y}|$ est la longueur du vecteur $\vec{y}$ ou la distance du point $\vec{y}$ à o.

Il est fermé et borné en même temps que E. La section de $U_\delta(E)$ par l'hyperplan $x=t$ dépend de t d'une manière continue en même temps que celle de E.

III$^+$. Soit $(\xi, \vec{\eta}) \in \mathfrak{D}^+$. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, on peut faire correspondre à un nombre ε' tel que $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ un nombre positif δ_0 de manière que l'on ait

$$U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})) \supseteqq V_{\varepsilon'}^+(\xi', \vec{\eta}')$$

pour

$$0 \leqq \delta \leqq \delta_0, \quad 0 \leqq \xi' - \xi \leqq \delta_0, \quad (\xi', \vec{\eta}') \in U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})).$$

Remarque 2. Nous appellerons $\mathfrak{D}^+$ le *domaine propre* de la topologie droite; c'est l'ensemble des points tels qu'aucun de leurs voisinages droits ne se réduise à un point. On définit de même le domaine propre de la topologie gauche. Dans le cas de l'équation (1.1) avec second membre continu, on a $\mathfrak{D}^+ = \mathfrak{D}^- = \mathfrak{D}$.

IV$^+$. A chaque point $(\xi, \vec{\eta})$ correspond une fonction $F_\varepsilon^+(x; \xi, \vec{\eta})$ continue dans un intervalle contenant ξ à son intérieur et l'on a

$$|\vec{y} - \vec{\eta}'| \leqq F_\varepsilon^+(x; \xi, \vec{\eta}) - F_\varepsilon^+(\xi'; \xi, \vec{\eta}) \tag{1.3}$$

pour $(x, \vec{y}) \in V_\varepsilon^+(\xi', \vec{\eta}')$ pourvu que $(\xi', \vec{\eta}')$ appartienne à un voisinage (euclidien) assez petit de $(\xi, \vec{\eta})$.

Nous dirons que cette condition est remplie uniformément dans E si l'on peut prendre $F_\varepsilon^+(x; \xi, \vec{\eta})$ indépendamment de $(\xi, \vec{\eta})$ de manière que l'on ait (1.3) pour les points $(\xi', \vec{\eta}')$ et $(x, \vec{y}) \in V_\varepsilon^+(\xi', \vec{\eta}')$ appartenant à E.

Nous désignerons par I$^-$, II$^-$, III$^-$, IV$^-$ les propriétés analogues dont jouissent les voisinages gauches.

V. Soit $(\xi, \vec{\eta}) \in \mathfrak{D}^+$. Si ε est un nombre positif assez petit, on peut faire correspondre à un nombre ε' tel que $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ un nombre positif δ_0 de manière que $V_{\varepsilon'}^-(\xi', \vec{\eta}')$ ne contienne aucun point intérieur de $U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta}))$ si $(\xi', \vec{\eta}')$ est un point n'appartenant pas à l'intérieur de $U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta}))$ et satisfaisant à

$$0 \leqq \delta \leqq \delta_0, \quad 0 < \xi' - \xi \leqq \delta_0, \quad |\vec{\eta}' - \vec{\eta}| \leqq \delta_0. \tag{1.4}$$

En permutant les rôles des voisinages droits et des voisinages gauches, on obtient une propriété dont jouissent aussi les voisinages droits et gauches. Cette propriété sera désignée par V'.

Les propriétés I$^\pm$, $\cdots$, IV$^\pm$ ne dépendent que de l'une des topologies droite et gauche séparément tandis que les propriétés V et V' dépendent en même temps des topologies droite et gauche.

Remarque 3. Nous supposerons dans les hypothèses III$^\pm$, V, V' que le nombre ε puisse prendre une valeur positive quelconque inférieure à un nombre positif ε_E indépendant de $(\xi, \vec{\eta})$ lorsque $(\xi, \vec{\eta})$ parcourt un ensemble borné et fermé E.

2. Vérification des hypothèses dans le cas de l'équation avec second membre continu. Les propriétés I$^+$ et II$^+$ sont évidentes. La propriété I$^+$ entraîne immédiatement la proposition:

2.1 *La topologie droite est plus fine que la topologie euclidienne*[4].

4) Pour être bref, nous n'énoncerons pas la proposition que l'on obtient en permutant les rôles des voisinages droits et des voisinages gauches.

Démontrons que les voisinages droits et gauches définis au n° 1 jouissent des propriétés III$^+$, IV$^+$, V.

$\vec{f}$ étant continue, on peut déterminer un nombre positif $\delta_0(<\varepsilon-\varepsilon')$ de manière que l'on ait

$$|\vec{f}(x,\vec{y})-\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|<\varepsilon-\varepsilon'$$

pour $0\leqq x-\xi\leqq\delta_0$, $(x,\vec{y})\in\mathfrak{D}^+\cap U_{\delta_0}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$. Soit $(\xi',\vec{\eta}')$ un point de $\mathfrak{D}^+\cap U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$ tel que $0\leqq\xi'-\xi\leqq\delta_0$, δ étant un nombre positif au plus égal à δ_0. On a alors

$$|\vec{f}(\xi',\vec{\eta}')-\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|<\varepsilon-\varepsilon'\,. \tag{2.1}$$

$(\xi',\vec{\eta}')$ appartenant à $U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$, il existe un point $(\xi_0,\vec{\eta}_0)$ de $V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$ tel que $\xi_0=\xi'$, $|\vec{\eta}_0-\vec{\eta}'|\leqq\delta$. On a donc

$$|\vec{\eta}_0-\vec{\eta}-(\xi_0-\xi)\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|\leqq\varepsilon(\xi_0-\xi)\,.$$

Si $(x,\vec{y})$ est un point quelconque de $V_{\varepsilon'}^+(\xi',\vec{\eta}')$, on a

$$0\leqq x-\xi'\leqq\varepsilon'\,,\qquad |\vec{y}-\vec{\eta}'-(x-\xi')\vec{f}(\xi',\vec{\eta}')|\leqq\varepsilon'(x-\xi')\,.$$

Considérons le point $(x_0,\vec{y}_0)$ défini par

$$x_0=x\,,\qquad \vec{y}_0=\vec{\eta}_0+(\vec{y}-\vec{\eta}')\,.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
&0\leqq x_0-\xi=(x-\xi')+(\xi'-\xi)\leqq\varepsilon'+\delta_0<\varepsilon\,,\\
&|\vec{y}_0-\vec{\eta}-(x_0-\xi)\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|\\
&\quad\leqq|\vec{y}-\vec{\eta}'-(x-\xi')\vec{f}(\xi',\vec{\eta}')|+|\vec{\eta}_0-\vec{\eta}-(\xi_0-\xi)\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|+(x-\xi_0)|\vec{f}(\xi',\vec{\eta}')-\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|\\
&\quad\leqq\varepsilon'(x-\xi')+\varepsilon(\xi_0-\xi)+(\varepsilon-\varepsilon')(x-\xi_0)=\varepsilon(x-\xi)
\end{aligned}$$

de sorte que $(x_0,\vec{y}_0)$ se trouve dans $V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$. Puisque $|\vec{y}_0-\vec{y}|=|\vec{\eta}_0-\vec{\eta}'|\leqq\delta$, $(x,\vec{y})$ appartient à $U_\delta(V_\varepsilon(\xi,\vec{\eta}))$. On a donc la propriété III.

A propos remarquons que l'on a la proposition:

2.2 *L'espace $\mathfrak{R}^{n+1}$ muni de la topologie droite est un espace de Hausdorff.*

En effet, d'après la propriété I$^+$, $(\xi,\vec{\eta})$ appartient à $V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$ et si $\rho\leqq\min\{\varepsilon,\varepsilon'\}$, $V_\rho^+(\xi,\vec{\eta})$ est contenu dans l'intersection $V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})\cap V_{\varepsilon'}^+(\xi,\vec{\eta})$. La topologie droite étant plus fine que la topologie euclidienne, il est évident que quand $(\xi,\vec{\eta})$ et $(\xi',\vec{\eta}')$ sont différents l'un de l'autre, il existe des voisinages $V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$ et $V_{\varepsilon'}^+(\xi',\vec{\eta}')$ dont l'intersection est vide. Si, ρ étant un nombre positif assez petit moindre que δ_0 et ε', $(x,\vec{y})$ appartient à $V_\rho^+(\xi,\vec{\eta})$, on a $0\leqq x-\xi\leqq\delta_0$, $(x,\vec{y})\in V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$ et les propriétés I$^+$ et III$^+$ montre que l'on a

$$V_\rho^+(x,\vec{y})\subseteqq V_{\varepsilon'}^+(x,\vec{y})\subseteqq V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})\,.$$

Les hyptohèses sur l'espace de Hausdorff sont donc toutes remplies.

Remarque 1. Grâce à la proposition 2.2, nous pouvons utiliser les diverses propositions sur les ensembles de points dans l'espace de Hausdorff. L'ensemble fermé, l'ensemble ouvert, le point isolé etc. par rapport à la topologie droite (gauche) seront appelés ensemble fermé à droite (gauche), ensemble ouvert à droite (gauche), point isolé à droite (gauche) etc. S'il n'y a pas de mots "à droite" ou "à gauche," la topologie considérée est celle d'Euclid.

Démontrons la propriété IV$^+$. M étant une constante plus grande que $|\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|$, si δ est assez petit, on a $|\vec{f}(x,\vec{y})|\leqq M$ pour

$$(2.2) \qquad |x-\xi|\leqq\delta\,, \qquad |\vec{y}-\vec{\eta}|\leqq\delta\,, \qquad (x,\vec{y})\in\mathfrak{D}\,.$$

Si $\varepsilon\leqq\delta$ et si $(\xi',\vec{\eta}')$ appartient à l'ensemble (2.2), on a

$$|\vec{y}-\vec{\eta}'|\leqq(|\vec{f}(\xi',\vec{\eta}')|+\varepsilon)(x-\xi')$$

pour $(x,\vec{y})\in V_\varepsilon^+(\xi',\vec{\eta}')$. On peut donc prendre

$$F_\varepsilon^+(x\,;\xi,\vec{\eta})=(M+\varepsilon)x\,.$$

Démontrons enfin que l'on a V. Nous prenons δ assez petit de sorte que l'on ait (2.1) pour (1.4). Soit $(x,\vec{y})$ un point quelconque de $V_{\varepsilon'}^-(\xi',\vec{\eta}')$ tel que $\xi<x<\xi'$. Il suffit de montrer, en désignant par $(x_0,\vec{y}_0)$ un point quelconque de $V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$ tel que $x_0=x$, que la distance de $\vec{y}$ à $\vec{y}_0$ est au moins égale à δ.

Si l'on pose

$$\xi_0=\xi'\,, \qquad \vec{\eta}_0=\vec{y}_0+(\vec{\eta}'-\vec{y})\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&0<\xi_0-\xi=\xi'-\xi\,,\\
&|\vec{\eta}_0-\vec{\eta}-(\xi_0-\xi)\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|\\
&\quad\leqq|\vec{y}-\vec{\eta}'-(x-\xi')\vec{f}(\xi',\vec{\eta}')|+|\vec{y}_0-\vec{\eta}-(x_0-\xi)\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|+(\xi_0-x_0)|\vec{f}(\xi',\vec{\eta}')-\vec{f}(\xi,\vec{\eta})|\\
&\quad\leqq\varepsilon'(\xi_0-x)+\varepsilon(x_0-\xi)+(\varepsilon-\varepsilon')(\xi_0-x_0)=\varepsilon(\xi_0-\xi)\,,
\end{aligned}$$

de sorte que $(\xi_0,\vec{\eta}_0)$ appartient à $V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$. $(\xi',\vec{\eta}')$ n'appartenant pas à l'intérieur de $U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$, on a nécessairement $|\vec{\eta}'-\vec{\eta}_0|\geqq\delta$. Or on a $|\vec{y}-\vec{y}_0|=|\vec{\eta}'-\vec{\eta}_0|$. On a donc $|\vec{y}-\vec{y}_0|\geqq\delta$.

Remarque 2. Le nombre ε dans les hypothèses III$^\pm$, V, V' peut prendre une valeur positive quelconque. Par suite, on peut poser $\varepsilon_E=\infty$ dans la remarque 3 du n° 1.

3. Abstraction de l'équation différentielle. Appelons *caractéristique à droite* une courbe ou une fonction continue $\vec{\varphi}(x)$ telle qu'un voisinage droit d'un point quelconque $(\xi,\vec{\varphi}(\xi))$ (différent de l'extrémité droite si celle-ci appartient à la courbe) contienne le point $(x,\vec{\varphi}(x))$ pourvu que $x-\xi>0$ soit assez petit. On définit de même *caractéristique à gauche.* On a évidemment la proposition :

3.1 *Dans le cas de l'équation* (1.1) *avec second membre continu, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit une solution est qu'elle soit une caractéristique à droite et à gauche.*

Supposons données a priori les topologies droite et gauche satisfaisant aux hypothèses I$^\pm$, II$^\pm$, III$^\pm$, IV$^\pm$, V et V'. Les propositions qui déduisent de ces hypothèses s'appliquent à l'équation (1.1) avec second membre continu.

3.2 *Pour qu'une fonction continue $\vec{\varphi}(x)$ soit une caractéristique à droite, il faut et il suffit qu'elle ne contienne aucun point isolé à droite, sauf l'extré-*

mité droite si celle-ci appartient à la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$.

La nécessité de la condition étant évidente, démontrons seulement la suffisance.

Soit $(\xi, \vec{\eta})$ un point quelconque de la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ (différent de l'extrémité droite). Il est à démontrer que quelque petit que soit ε, $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartient à $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ lorsque $x-\xi>0$ est assez petit. Pour cela, supposons le contraire.

Soit ε' un nombre positif moindre que ε. D'après notre supposition, si δ est assez petit, la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ contiendrait à droite de $(\xi, \vec{\eta})$ un point $(\alpha, \vec{\beta})$ situé à l'extérieur de $U_\delta(V_{\varepsilon'}^+(\xi, \vec{\eta}))$ et tel que $0<\alpha-\xi\leqq\delta_0$, δ_0 étant le nombre qui se trouve dans l'hypothèse III$^+$. On peut supposer $\delta<\delta_0$. Désignons par ξ' la borne inférieure des valeurs x telles que l'arc de la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ joignant $(x, \vec{\varphi}(x))$ à $(\alpha, \vec{\beta})$ se trouve à l'extérieur de $U_\delta(V_{\varepsilon'}^+(\xi, \vec{\eta}))$. Le point $(\xi', \vec{\eta}')$, où $\vec{\eta}'=\vec{\varphi}(\xi')$, se trouverait alors sur la frontière de $U_\delta(V_{\varepsilon'}^+(\xi, \vec{\eta}))$ tandis que le point $(x, \vec{\varphi}(x))$ n'appartiendrait pas à $U_\delta(V_{\varepsilon'}^+(\xi, \vec{\eta}))$ pour $\xi'<x\leqq\alpha$. D'après III$^+$, $V_{\varepsilon'}^+(\xi', \vec{\eta}')$ est contenu dans $U_\delta(V_{\varepsilon'}^+(\xi, \vec{\eta}))$. Si $\rho>0$ est assez petit de sorte que $V_\rho^+(\xi', \vec{\eta}')$ soit contenu dans $V_{\varepsilon'}^+(\xi', \vec{\eta}')$ et ne contienne aucun point dont l'abscisse est plus grande que α, $V_\rho^+(\xi', \vec{\eta}')$ ne contiendrait aucun point de la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ sauf le point $(\xi', \vec{\eta}')$. $(\xi', \vec{\eta}')$ serait donc un point isolé à droite de la courbe contrairement à l'hypothèse.

3.3 *Si tout point d'une caractéristique à gauche (sauf l'extrémité droite si celle-ci lui appartient) appartient à* $\mathfrak{D}^+$, *elle est une caractéristique à droite.*

Soit $(\xi, \vec{\eta})$ un point quelconque (différent de l'extrémité droite) d'une caractéristique à gauche $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$. Il suffit de montrer qu'il n'est pas un point isolé à droite de la courbe. Supposons le contraire.

Il existerait un voisinage droit $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ qui ne contient pas d'autres points de la courbe que le point $(\xi, \vec{\eta})$. Soit ε' un nombre positif moindre que ε et δ_0 le nombre qui se trouve dans l'hypothèse V. Si $\delta<\delta_0$ est un nombre positif assez petit, sur la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ se trouverait à droite de $(\xi, \vec{\eta})$ et à l'extérieur de $U_\delta(V_{\varepsilon'}^+(\xi, \vec{\eta}))$ un point $(\alpha, \vec{\beta})$ tel que $0<\alpha-\xi\leqq\delta_0$. Il existerait alors sur la frontière de $U_\delta(V_{\varepsilon'}^+(\xi, \vec{\eta}))$ un point $(\xi', \vec{\eta}')$ $(\xi<\xi'<\alpha)$ tel que tout point de l'arc de la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ joignant $(\xi, \vec{\eta})$ à $(\xi', \vec{\eta}')$ se trouve à l'intérieur de $U_\delta(V_{\varepsilon'}^+(\xi', \vec{\eta}'))$. $V_{\varepsilon'}^-(\xi', \vec{\eta}')$ contient l'arc assez petit de la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ dont l'extrémité droite est $(\xi', \vec{\eta}')$. Le point de cet arc appartiendrait donc à l'intersection des intérieurs de $U_\delta(V_{\varepsilon'}^+(\xi, \vec{\eta}))$ et de $V_{\varepsilon'}^+(\xi', \vec{\eta}')$ contrairement à l'hypothèse.

APPLICATION. *Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle fermé $[a, a']$. Si $\varphi(x)$ est continue dans $[a, a']$ et satisfait aux inégalités*

$$\underline{D}^+\varphi(x)\leqq f(x)\leqq \overline{D}^+\varphi(x)$$

dans l'intervalle $[a, a']$, elle est dérivable et sa dérivée coïncide avec $f(x)$.

Considérons, en effet, l'équation différentielle en y: $dy/dx=f(x)$. Sur la courbe $y=\varphi(x)$ ne se trouve aucun point isolé à droite sauf l'extrémité droite. La proposition 3.2 montre qu'elle est une caractéristique à droite, et puis les propositions 3.1, 3.2, 3.3 montrent enfin qu'elle est une solution de l'équation $dy/dx=f(x)$. Par conséquent, $\varphi(x)$ admet la dérivée $\varphi'(x)$ égale à $f(x)$ dans l'intervalle $[a, a']$.

4. Inéquation différentielle. Désignons par $V_{\rho,\varepsilon}^{\pm}(\xi, \vec{\eta})$ l'ensemble des points $(x, \vec{y})$ tels que

$$0 \leqq \pm(x-\xi) \leqq \varepsilon, \qquad (x, \vec{y}) \in V_{\rho+\varepsilon}^{\pm}(\xi, \vec{\eta}).$$

Soit ρ une valeur positive fixe et supposons que l'on puisse prendre, dans la remarque 3 du n° 1, le nombre ε_E plus grand que ρ. Dans le cas de l'équation (1.1) avec second membre continu, on peut prendre ρ aussi grand que l'on veut. Nous allons montrer que les systèmes des voisinages $V_{\rho,\varepsilon}^{\pm}(\xi, \vec{\eta})$ jouissent aussi des propriétés $\mathrm{I}^{\pm}$, $\cdots$, $\mathrm{IV}^{\pm}$, V, V'.

En effet, il est facile de vérifier les propriétés $\mathrm{I}^{\pm}$ et $\mathrm{II}^{\pm}$. Il n'est pas difficile non plus de vérifier les autres propriétés.

Pour montrer, par exemple, que l'on a III^{+}, l'inégalité $\rho+\varepsilon'<\rho+\varepsilon$ entraîne, d'après III^{+}, l'inclusion

$$U_\delta(V_{\rho+\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta})) \supseteqq V_{\rho+\varepsilon'}^{+}(\xi', \vec{\eta}')$$

pour

$$0 \leqq \delta \leqq \delta_1, \quad 0 \leqq \xi'-\xi \leqq \delta_1, \quad (\xi', \vec{\eta}') \in U_\delta(V_{\rho+\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta})),$$

pourvu que $\delta_1 > 0$ soit assez petit. Ceci montre que le système des voisinages droits $V_{\rho,\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta})$ jouit de la propriété III^{+}.

On peut vérifier de même les autres propriétés. On voit de plus que la fonction qui correspond à $F_\varepsilon(x; \xi, \vec{\eta})$ dans le cas des systèmes des voisinages $V_{\rho,\varepsilon}^{\pm}(x; \xi, \vec{\eta})$ est

$$F_{\rho,\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta}) = F_{\rho+\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta}).$$

Les topologies définies par les systèmes des voisinages $V_{\rho,\varepsilon}^{\pm}(\xi, \vec{\eta})$ seront désignées par $\mathfrak{T}_\rho^{\pm}$, $\mathfrak{T}_0^{\pm}=\mathfrak{T}^{\pm}$ désignant les topologies droite et gauche initiales.

Une solution de l'inéquation différentielle

$$|D^{\pm}\vec{y}-\vec{f}(x, \vec{y})| \leqq \rho \tag{4.1}$$

est, par définition, une fonction continue $\vec{\varphi}(x)$ qui satisfait à l'inégalité

$$\varlimsup_{h\to 0}\left|\frac{1}{h}(\vec{\varphi}(x+h)-\vec{\varphi}(x))-\vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))\right| \leqq \rho$$

dans son domaine d'existence. On a alors évidemment la proposition.

4.1 *Pour qu'une fonction continue soit une solution de l'inéquation* (4.1), *il faut et il suffit qu'elle soit une caractéristique à droite et à gauche des topologies* $\mathfrak{T}_\rho^{\pm}$.

Il est clair que si $\rho' > \rho \geqq 0$, une caractéristique à droite de la topologie droite $\mathfrak{T}_\rho^{+}$ est une caractéristique à droite de la topologie droite $\mathfrak{T}_{\rho'}^{+}$.

Supposons maintenant que, ρ étant un nombre non négatif, $\vec{\varphi}(x)$ est une caractéristique à droite de la topologie $\mathfrak{T}_{\rho'}{}^{+}$ quel que soit le nombre ρ' plus grand que ρ.

Soit ε un nombre positif quelconque. On peut prendre $\rho'>\rho$ et $\varepsilon'<\varepsilon$ de manière que l'on ait $\rho'+\varepsilon'<\rho+\varepsilon$. On a alors

$$V_{\rho'+\varepsilon'}{}^{+}(\xi,\vec{\eta})\subseteqq V_{\rho+\varepsilon}{}^{+}(\xi,\vec{\eta}),$$

d'où $V_{\rho',\varepsilon'}{}^{+}(\xi,\vec{\eta})\subseteqq V_{\rho,\varepsilon}{}^{+}(\xi,\vec{\eta})$. Si $(\xi,\vec{\eta})$ est un point (différent de l'extrémité droite) de la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$, le point $(x,\vec{y})$ de la courbe appartient à $V_{\rho',\varepsilon'}{}^{+}(\xi,\vec{\eta})$ et à posterioi à $V_{\rho,\varepsilon}{}^{+}(\xi,\vec{\eta})$ lorsque x appartient à un intervalle assez petit dont l'extrémité gauche est ξ. Par suite, $\vec{\varphi}(x)$ est une caractéristique à droite de la topologie droite $\mathfrak{T}_{\rho}{}^{+}$. On obtient donc la proposition.

4.2 *Une caractéristique à droite de la topologie $\mathfrak{T}_{\rho'}{}^{+}$ pour $\rho'>\rho$ est une caractéristique à droite de la topologie $\mathfrak{T}_{\rho}{}^{+}$.*

Remarque. On peut évidemment étendre la notion des topologies $\mathfrak{T}_{\rho}{}^{\pm}$ au cas où ρ est une fonction de $(x,\vec{y})$.

5. Equation différentielle du type de Carathéodory. L'équation (1.1) sera appelée ainsi si les conditions suivantes sont remplies:

1° $\vec{f}(x,\vec{y})$ considérée comme fonction de $\vec{y}$ est continue dans son domaine de définition $\mathfrak{D}$;

2° Si $\vec{y}(x)$ est une fonction continue et si $\vec{f}(x,\vec{y}(x))$ est définie presque partout dans l'intervalle où $\vec{y}(x)$ est définie, la fonction $\vec{f}(x,\vec{y}(x))$ est mesurable.

$\mathfrak{D}^{+}$ est alors l'ensemble des points $(\xi,\vec{\eta})$ tels qu'il existe au moins une courbe issue à droite de $(\xi,\vec{\eta})$ et contenue presque partout dans $\mathfrak{D}$ et que la fonction $\vec{f}(x,\vec{y})$ soit majorée dans un voisinage assez petit de $(\xi,\vec{\eta})$ par une fonction sommable $\Phi(x;\xi,\vec{\eta})$.

On définit de même $\mathfrak{D}^{-}$.

Cette fois, il est plus commode de désigner par $|\vec{y}|$ la quantité

$$|\vec{y}|=\max\{|y_1|,\cdots,|y_n|\},$$

où $y_1,\cdots,y_n$ sont les coordonnées du point $\vec{y}$.

Remarque. Quant à la quantité $|\vec{y}|$ nous n'avons utilisé que les propriétés suivantes:

1° $|\vec{y}|>0$ ou $|\vec{y}|=0$ suivant que $\vec{y}\neq o$ ou $=o$;

2° $|\lambda\vec{y}|=|\lambda|\cdot|\vec{y}|$;

3° $|\vec{y}+\vec{z}|\leqq|\vec{y}|+|\vec{z}|$.

C'est donc un norme.

Une fonction continue $\vec{\varphi}(x)$ est dite solution de l'équation du type de Carathéodory, si l'on a

$$\vec{\varphi}(x)=\vec{\varphi}(a)+\int_a^x\vec{f}(x,\vec{\varphi}(x))dx, \tag{5.1}$$

l'intégrale étant celle de Lebesgue. On peut prendre a arbitrairement dans le domaine de définition de $\vec{\varphi}(x)$. Il est clair que la définition est indépendante du choix de a.

Introduisons maintenant les topologies droite et gauche dans notre présent cas.

Tout le voisinage droit d'un point n'appartenant pas à $\mathfrak{D}^+$ ne contient que le point lui-même. Il suffit donc de considérer seulement le point $(\xi, \vec{\eta}) \in \mathfrak{D}^+$.

Par hypothèse, on a

$$|\vec{f}(x, \vec{y})| \leqq \phi(x ; \xi, \vec{\eta})$$

pour $|x-\xi| \leqq r(\xi, \vec{\eta})$, $|\vec{y}-\vec{\eta}| \leqq r(\xi, \vec{\eta})$, $r(\xi, \vec{\eta})$ étant un nombre positif. On pose

$$V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta}) = V_r^+(\xi, \vec{\eta})$$

pour $\varepsilon \geqq r = r(\xi, \vec{\eta})$.

Nous dirons qu'une fonction (continue ou non) $\vec{y}(x)$ est *admissible* si $\vec{f}(x, \vec{y}(x))$ est mesurable. Si $0 < \varepsilon \leqq r(\xi, \vec{\eta})$, on pose

$$(5.2) \qquad \begin{cases} \underline{F}_{j\varepsilon}(x ; \xi, \vec{\eta}) = \inf \int_\xi^x f_j(x, \vec{y}(x)) dx , \\ \overline{F}_{j\varepsilon}(x ; \xi, \vec{\eta}) = \sup \int_\xi^x f_j(x, \vec{y}(x)) dx \end{cases}$$

dans l'intervalle $[\xi, \xi+\delta']$, où $\vec{y}(x)$ désigne une fonction admissible quelconque telle que l'on ait $|\vec{y}(x)-\vec{\eta}| \leqq \varepsilon$ presque partout dans l'intervalle $[\xi, \xi+\delta']$. Nous supposons que le nombre $\delta'(\leqq \varepsilon)$ est pris aussi grand que possible. D'après la définition de $\mathfrak{D}^+$, δ' est certainement positif.

Alors le voisinanage droit $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ est défini par les inégalités $0 \leqq x-\xi \leqq \delta'$ et

$$(5.3) \qquad \underline{F}_{j\varepsilon}(x ; \xi, \vec{\eta}) \leqq y_j - \eta_j \leqq \overline{F}_{j\varepsilon}(x ; \xi, \vec{\eta}) , \qquad (j=1, 2, \cdots, n) .$$

On définit de même le voisinage gauche $V_\varepsilon^-(\xi, \vec{\eta})$ comme l'ensemble des points $(x, \vec{y})$ tels que l'on ait $0 \leqq \xi - x \leqq \delta''$ et (5.3), où les valeurs des fonctions $\underline{F}_{j\varepsilon}(x ; \xi, \vec{\eta})$, $\overline{F}_{j\varepsilon}(x ; \xi, \vec{\eta})$ dans l'intervalle $[\xi-\delta'', \xi]$ sont définies par (5.2) comme ci-dessus. Nous désignerons par $I_\varepsilon[\xi, \vec{\eta}]$, $I_\varepsilon^+[\xi, \vec{\eta}]$, $I_\varepsilon^-[\xi, \vec{\eta}]$ respectivement les intervalles $[\xi-\delta'', \xi+\delta']$, $[\xi, \xi+\delta']$, $[\xi-\delta'', \xi]$.

Remarque. On peut prendre pour $2r(\xi, \vec{\eta})$ la borne supérieure des nombres ρ tels que $|\vec{f}(x, \vec{y})|$ soit majorée par une fonction sommable dans l'intersection de $\mathfrak{D}$ et de l'ensemble $|x-\xi| \leqq \rho$, $|\vec{y}-\vec{\eta}| \leqq \rho$. $r(\xi, \vec{\eta})$ est alors une fonction continue de $(\xi, \vec{\eta})$.

6. Vérification des hypothèses sur les topologies droite et gauche dans le cas de l'équation différentielle du type de Carathéodory. Soit $\mathfrak{Y}_\varepsilon^+$ la famille des fonctions admissibles $\vec{y}(x)$ telles que l'on ait $|\vec{y}(x)-\vec{\eta}| \leqq \varepsilon \leqq r(\xi, \vec{\eta})$ presque partout dans l'intervalle $I_\varepsilon^+[\xi, \vec{\eta}]$. Si deux fonctions $\vec{y}_1(x)$ et $\vec{y}_2(x)$ appartiennent à $\mathfrak{Y}_\varepsilon^+$, on peut définir une fonction admissible $\vec{y}(x)$ presque partout dans l'intervalle $I_\varepsilon^+[\xi, \vec{\eta}]$ par les relations

$$f_1(x, \vec{y}(x)) = \max \{ f_1(x, \vec{y}_1(x)), f_1(x, \vec{y}_2(x)) \} ,$$
$$|\vec{y}(x) - \vec{y}_1(x)| \cdot |\vec{y}(x) - \vec{y}_2(x)| = 0 .$$

Elle appartient à la famille $\mathfrak{Y}_\varepsilon^+$. Par suite, si $\vec{y}_1(x), \cdots, \vec{y}_m(x)$ sont des fonctions de $\mathfrak{Y}_\varepsilon^+$, il existe dans $\mathfrak{Y}_\varepsilon^+$ une fonction admissible $\vec{y}(x)$ satisfaisant à la condition

$$f_1(x, \vec{y}(x)) = \max\{f_1(x, \vec{y}_1(x)), \cdots, f_1(x, \vec{y}_m(x))\}.$$

Cela posé, considérons un ensemble dénombrable $\{x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots\}$ dense dans l'intervalle $I_\varepsilon^+[\xi, \vec{\eta}]$. Pour chaque m, on peut extraire de $\mathfrak{Y}_\varepsilon^+$ une suite $\{\vec{y}_{mk}(x)\}$ telle que l'on ait

$$\lim_{k\to\infty}\int_\xi^{x_m} f_1(x, \vec{y}_{mk}(x))dx = \overline{F}_{1\varepsilon}(x_m; \xi, \vec{\eta}).$$

Soit $\vec{y}_m(x)$ la fonction de $\mathfrak{Y}_\varepsilon^+$ telle que l'on ait

$$f_1(x, \vec{y}_m(x)) = \max\{f_1(x, \vec{y}_{1m}(x)), \cdots, f_1(x, \vec{y}_{mm}(x))\}.$$

On a alors

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^x f_1(x, \vec{y}_m(x))dx = \overline{F}_{1\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta}) \tag{6.1}$$

pour $x = x_1, x_2, \cdots$

Or on a

$$\left|\int_x^{x'} f_1(x, \vec{y}(x))dx\right| \leqq \int_x^{x'} \Phi(x; \xi, \vec{\eta})dx.$$

Par suite la famille $\mathfrak{F}_\varepsilon^+$ des fonctions $\int_\xi^x f_1(x, \vec{y}(x))dx$ où $\vec{y}(x)$ parcourt $\mathfrak{Y}_\varepsilon^+$ est normale dans $I_\varepsilon^+[\xi, \vec{\eta}]$. La convergence (6.1) est donc uniforme dans l'intervalle $I_\varepsilon^+[\xi, \vec{\eta}]$ et l'on a

$$\left|\overline{F}_{1\varepsilon}(x'; \xi, \vec{\eta}) - \overline{F}_{1\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta})\right| \leqq \int_x^{x'} \Phi(x; \xi, \vec{\eta})dx \tag{6.2}$$

pour $\xi \leqq x < x' \leqq \xi + \delta'$.

On voit de même que $\overline{F}_{1\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta})$ est continue aussi dans l'intervalle $I_\varepsilon^-[\xi, \vec{\eta}]$ et satisfait à l'inégalité (6.2) pour $\xi - \delta'' \leqq x < x' \leqq \xi$. Par suite $\overline{F}_{1\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta})$ est continue dans l'intervalle $I_\varepsilon[\xi, \vec{\eta}]$ et satisfait à l'inégalité (6.2) pour $\xi - \delta'' \leqq x < x' \leqq \xi + \delta'$. On a évidemment $\overline{F}_{1\varepsilon}(\xi; \xi, \vec{\eta}) = 0$.

Il en est de même des fonctions $\underline{F}_{1\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta})$, $\overline{F}_{2\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta})$, $\cdots$, $\underline{F}_{n\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta})$.

D'après ce qui précède, il est immédiat de vérifier que l'on a $\mathrm{I}^\pm$ et $\mathrm{II}^\pm$.

Soient donnés un point $(\xi, \vec{\eta}) \in \mathfrak{D}^+$ et des nombres ε, ε' tels que $0 < \varepsilon' < \varepsilon \leqq r(\xi, \vec{\eta})$. Si $\delta_0 > 0$ est assez petit, on a

$$-\varepsilon + \varepsilon' + \delta_0 \leqq \underline{F}_{j\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta}) \leqq \overline{F}_{j\varepsilon}(x; \xi, \vec{\eta}) \leqq \varepsilon - \varepsilon' - \delta_0$$

dans l'intervalle $[\xi, \xi + \delta_0]$. Si l'on a $0 \leqq \xi' - \xi \leqq \delta_0$, $0 \leqq \delta \leqq \delta_0$ et si $(\xi', \vec{\eta}')$ appartient à $U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta}))$, on a

$$0 \leqq \xi' - \xi \leqq \varepsilon - \varepsilon', \qquad |\vec{\eta}' - \vec{\eta}| \leqq \varepsilon - \varepsilon' \tag{6.3}$$

et l'ensemble: $0 \leqq x - \xi' \leqq \varepsilon'$, $|\vec{y} - \vec{\eta}'| \leqq \varepsilon'$, est contenu dans l'ensemble: $0 \leqq x - \xi \leqq \varepsilon$, $|\vec{y} - \vec{\eta}| \leqq \varepsilon$.

Soit $\mathfrak{Y}'_{\varepsilon'}{}^{+}$ la famille des fonctions admissibles $\vec{y}(x)$ telles que l'on ait $|\vec{y}(x)-\vec{\eta}'|\leqq\varepsilon'$ presque partout dans l'intervalle $I_{\varepsilon'}{}^{+}[\xi',\vec{\eta}']$. $\mathfrak{Y}'_{\varepsilon'}{}^{+}$ est une sous-famille de $\mathfrak{Y}_{\varepsilon}{}^{+}$ en ce sens que si $\vec{y}(x)$ appartient à $\mathfrak{Y}'_{\varepsilon'}{}^{+}$ elle est une fonction de $\mathfrak{Y}_{\varepsilon}{}^{+}$ restreinte à l'intervalle $I_{\varepsilon'}{}^{+}[\xi',\vec{\eta}']$.

On a donc

$$\begin{aligned}(6.4)\qquad \underline{F}_{j\varepsilon}(x;\xi,\vec{\eta})-\underline{F}_{j\varepsilon}(\xi';\xi,\vec{\eta})&\leqq\underline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')\\ \leqq\overline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')&\leqq\overline{F}_{j\varepsilon}(x;\xi,\vec{\eta})-\overline{F}_{j\varepsilon}(\xi';\xi,\vec{\eta})\end{aligned}$$

dans l'intervalle $I_{\varepsilon'}{}^{+}[\xi',\vec{\eta}']$. Les inégalités

$$\underline{F}_{j\varepsilon}(\xi';\xi,\vec{\eta})-\delta\leqq\eta_j'-\eta_j\leqq\overline{F}_{j\varepsilon}(\xi';\xi,\vec{\eta})+\delta\,,$$
$$\underline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')\leqq y_j-\eta_j'\leqq\overline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')$$

entraînent donc

$$\underline{F}_{j\varepsilon}(x;\xi,\vec{\eta})-\delta\leqq y_j-\eta_j\leqq\overline{F}_{j\varepsilon}(x;\xi,\vec{\eta})+\delta$$

de sorte que l'on a la propriété III^{+}.

Pour vérifier IV^{+}, il suffit de poser

$$F_{\varepsilon}{}^{+}(x;\xi,\vec{\eta})=\int_{\xi}^{x}\Phi(x;\xi,\vec{\eta})dx\,.$$

Considérons maintenant un point quelconque $(\xi',\vec{\eta}')$ tel que l'on ait (6.3), la signification des nombres ε, ε', δ_0 étant la même que plus haut. On obtiendra les inégalités suivantes analogues à (6.4):

$$\begin{aligned}(6.5)\qquad \overline{F}_{j\varepsilon}(x;\xi,\vec{\eta})-\overline{F}_{j\varepsilon}(\xi';\xi,\vec{\eta})&\leqq\underline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')\\ \leqq\overline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')&\leqq\underline{F}_{j\varepsilon}(x;\xi,\vec{\eta})-\underline{F}_{j\varepsilon}(\xi';\xi,\vec{\eta})\,,\end{aligned}$$

x désignant une valeur quelconque dans l'intervalle $[\xi,\xi']$. Si

$$(x,\vec{y})\in V_{\varepsilon'}{}^{-}(\xi',\vec{\eta}')\,,\qquad(x_0,\vec{y}_0)=(x,\vec{y}_0)\in V_{\varepsilon}{}^{+}(\xi,\vec{\eta})\,,$$

on a

$$\underline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')\leqq y_j-\eta_j'\leqq\overline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')\,,$$
$$\underline{F}_{j\varepsilon}(x_0,\xi,\vec{\eta})\leqq y_{0j}-\eta_j\leqq\overline{F}_{j\varepsilon}(x_0;\xi,\vec{\eta})\,.$$

On a par suite

$$\underline{F}_{j\varepsilon}(x_0;\xi,\vec{\eta})-\overline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')\leqq\eta_{0j}-\eta_j\leqq\overline{F}_{j\varepsilon}(x_0;\xi,\vec{\eta})-\underline{F}_{j\varepsilon'}(x;\xi',\vec{\eta}')\,,$$

en posant $\vec{\eta}_0=\vec{y}_0+(\vec{\eta}'-\vec{y})$. En remarquant (6.5), on en déduit

$$\underline{F}_{j\varepsilon}(\xi_0;\xi,\vec{\eta})\leqq\eta_{0j}-\eta_j\leqq\overline{F}_{j\varepsilon}(\xi_0;\xi,\vec{\eta})\,,$$

où $\xi_0=\xi'$, de sorte que $(\xi_0,\vec{\eta}_0)$ appartient à $V_{\varepsilon}{}^{+}(\xi,\vec{\eta})$. Si $(\xi',\vec{\eta}')$ n'appartient pas à l'intérieur de $U_{\delta}(V_{\varepsilon}{}^{+}(\xi,\vec{\eta}))$, on a $|\vec{y}-\vec{y}_0|=|\vec{\eta}'-\vec{\eta}_0|\geqq\delta$ et le point $(x,\vec{y})$ n'appartient pas à l'intérieur de $U_{\delta}(V_{\varepsilon}{}^{+}(\xi,\vec{\eta}))$. On a donc la propriété V.

Remarque. Dans notre présent cas, le nombre ε_E dans la remarque du n° 1 est certainement positif, car on peut prendre pour ε_E la borne inférieure de la fonction $r(\xi,\vec{\eta})$ continue est positive dans E.

7. Condition pour qu'une caractéristique soit une solution dans le cas de l'équation du type de Carathéodory. Il est clair que si une solution appartient à $\mathfrak{D}^+$, elle est une caractéristique à droite. Considérons la réciproque.

Soit $\vec{\varphi}(x)$ une caractéristique à droite appartenant à $\mathfrak{D}$ presque partout. Pour qu'elle soit une solution, il faut et il suffit de montrer que l'on a

$$\vec{\varphi}(x)=\vec{b}+\int_a^x \vec{f}(x,\vec{\varphi}(x))dx\,, \qquad (\vec{b}=\vec{\varphi}(a)) \tag{7.1}$$

dans un intervalle assez petit $[a,a']$, a étant un nombre quelconque (différent de l'extrémité droite) de l'intervalle où $\vec{\varphi}(x)$ est définie. Nous supposons donc que l'on ait $a'-a\leq r(a,\vec{b})$ et $|\vec{\varphi}(x)-\vec{\eta}|<r(a,\vec{b})$ pour $a\leqq x\leqq a'$.

Soit $\mathfrak{Z}_\delta^+$ la famille des fonctions admissibles $\vec{y}(x)$ définies dans l'intervalle $[a,a']$ et telles que l'on ait $|\vec{y}(x)-\vec{\varphi}(x)|\leqq\delta$ presque partout dans $[a,a']$. Posons ensuite

$$\begin{cases} \underline{G}_{j\delta}(x)=\inf\displaystyle\int_a^x f_j(x,\vec{y}(x))dx\,, \\ \overline{G}_{j\delta}(x)=\sup\displaystyle\int_a^x f_j(x,\vec{y}(x))dx\,, \end{cases} \tag{7.2}$$

où $\vec{y}(x)$ parcourt $\mathfrak{Z}_\delta^+$. Si δ est assez petit, $\mathfrak{Z}_\delta^+$ est une sous-famille de la famille $\mathfrak{Y}_r^+$ des fonctions admissibles $\vec{y}(x)$ telles que l'on ait $|\vec{y}(x)-\vec{\eta}|\leqq r=r(a,\vec{b})$ presque partout dans $I_r^+[a,\vec{b}]$. On a donc

$$\underline{F}_{jr}(x\,;a,\vec{b})\leqq\underline{G}_{j\delta}(x)\leqq\overline{G}_{j\delta}(x)\leqq\overline{F}_{jr}(x\,;a,\vec{b})\,.$$

Si $\varepsilon>0$ est assez petit, l'ensemble: $0\leqq x-a\leqq\varepsilon$, $|\vec{y}-\vec{b}|\leqq\varepsilon$, est contenu dans l'ensemble: $a\leqq x\leqq a'$, $|\vec{y}-\vec{\varphi}(x)|\leqq\delta$. Considérons la famille $\mathfrak{Y}_\varepsilon^+$ des fonctions admissibles $\vec{y}(x)$ telles que l'on ait $|\vec{y}(x)-\vec{b}|\leqq\varepsilon$ presque partout dans $I_\varepsilon^+[a,\vec{b}]$. Si $\varepsilon>0$ est assez petit, elle est une sous-famille de $\mathfrak{Z}_\delta^+$. On a donc

$$\underline{G}_{j\delta}(x)\leqq\underline{F}_{j\varepsilon}(x\,;a,\vec{b})\leqq\overline{F}_{j\varepsilon}(x\,;a,\vec{b})\leqq\overline{G}_{j\delta}(x)$$

dans l'intervalle $I_\varepsilon^+[a,\vec{b}]$. $\vec{\varphi}(x)$ étant une caractéristique à droite, on a

$$\underline{G}_{j\delta}(x)\leqq\varphi_j(x)-b_j\leqq\overline{G}_{j\delta}(x) \tag{7.3}$$

lorsque $x-a$ est une valeur positive assez petite.

Supposons que l'on ait (7.3) pour $x=\xi$, ξ étant une valeur dans l'intervalle $[a,a')$. Si ε est un nombre positif assez petit, l'ensemble: $0\leqq x-\xi\leqq\varepsilon$, $|\vec{y}-\vec{\varphi}(\xi)|\leqq\varepsilon$ est contenu dans l'ensemble: $a\leqq x\leqq a'$, $|\vec{y}-\vec{\varphi}(x)|\leqq\delta$. Par suite, on a de même

$$\underline{G}_{j\delta}(x)-\underline{G}_{j\delta}(\xi)\leqq\varphi_j(x)-\varphi_j(\xi)\leqq\overline{G}_{j\delta}(x)-\overline{G}_{j\delta}(\xi) \tag{7.4}$$

dans l'intervalle $0\leqq x-\xi\leqq\varepsilon$. En ajoutant membres à membres les inégalités (7.4) et les inégalités (7.3), où l'on pose $x=\xi$, on voit que les inégalités subsistent encore dans l'intervalle $0\leqq x-\xi\leqq\varepsilon$. On a donc les inégalités (7.3) dans tout l'intervalle $[a,a']$.

En raisonnant comme au n° précédent, on peut montrer l'existence d'une fonction admissible $\vec{\varphi}_\delta(x)$ définie dans l'intervalle $[a, a']$ et telle que l'on ait $|\vec{\varphi}_\delta(x)-\vec{\varphi}(x)|\leqq\delta$ presque partout et de plus

$$\left|\overline{G}_{1\delta}(x)-\int_a^x f_1(x, \vec{\varphi}_\delta(x))dx\right|\leqq\delta$$

dans l'intervalle $[a, a']$. $\vec{\varphi}_\delta(x)$ converge vers $\vec{\varphi}(x)$ uniformément dans l'intervalle $[a, a']$ lorsque $\delta\to 0$. D'après la continuité de $f_1(x, \vec{y})$ par rapport à $\vec{y}$, $f_1(x, \vec{\varphi}_\delta(x))$ converge vers $f_1(x, \vec{\varphi}(x))$ presque partout. $|f_1(x, \vec{\varphi}_\delta(x))|$ étant majorée par la fonction sommable $\Phi(x\,; a, \vec{b})$, on a

$$\int_a^x f_1(x, \vec{\varphi}_\delta(x))dx\to\int_a^x f_1(x, \vec{\varphi}(x))dx$$

uniformément dans l'intervalle $[a, a']$. Par suite on a

$$\overline{G}_{1\delta}(x)\to\int_a^x f_1(x, \vec{\varphi}(x))dx$$

uniformément dans l'intervalle $[a, a']$ lorsque $\delta\to 0$.

Il en est de même des fonctions $\overline{\varphi}_{1\delta}(x)$, $\overline{\varphi}_{2\delta}(x)$, $\cdots$, $\overline{\varphi}_{n\delta}(x)$.

Les inégalités (7.3) montrent ensuite que l'on a (7.1) dans l'intervalle $[a, a']$. On a donc établi la proposition:

7.1 *Une solution de l'équation* (1.1) *du type de Carathéodory, si elle appartient à* $\mathfrak{D}^+$ *sauf l'extrémité droite, elle est une caractéristique à droite. Réciproquement, une caractéristique à droite, si elle appartient à* $\mathfrak{D}^+$ *presque partout, elle est une solution.*

II. Notions fondamentales.

Nous introduirons dans cette section quelques notions[5] importantes pour établir les théorèms fondamentaux de la théorie des équations différentielles. Nous supposerons remplies les hypothèses $\mathrm{I}^\pm$, $\cdots$, $\mathrm{IV}^\pm$, V et V′. Mais les propositions qui dépendent seulement de la topologie droite et non de la topologie gauche se déduisent des hypothèses I^+, II^+, III^+, IV^+ et il est inutile de supposer les autres hypothèses remplies.

8. Régions majorantes. Une partie E de D est dite *région majorante* dans D pour la topologie $\mathfrak{T}^+$ ou *région majorante à droite* dans D si toute caractéristique à droite issue à droite d'un point de E et contenue dans D est nécessairement contenue dans E. Si $\mathfrak{T}^+$ est la topologie droite relative à l'équation différentielle (1.1), la partie E de D est dite région majorante à droite dans D pour l'équation différentielle (1.1). On définit de même *région majorante à gauche.*

8.1 *Si une partie fermée E de D est ouverte à droite dans D, elle est une région majorante à droite dans D.*

5) Quelques-unes de ces notions sont introduites dans mon article: Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires, I, II, III (en japonais), 数物会誌, **5** (1931), 325-337, **6** (1932), 134-147, 285-295.

Soit $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ une caractéristique issue à droite d'un point $(a, \vec{b})$ de E et contenue dans D. Il existe un voisinage droit $V_\varepsilon^+(a, \vec{b})$ tel que $D \cap V_\varepsilon^+(a, \vec{b})$ soit contenu dans E. $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartient donc à E lorsque la différence $x-a$ est positive et assez petite.

Supposons ensuite que $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartienne à E pour $a \leqq x < \alpha$, α étant une valeur intérieure à l'intervalle où $\vec{\varphi}(x)$ est définie. E étant une partie fermée de D, $(\alpha, \vec{\varphi}(\alpha))$ appartient à E. On peut alors conclure, comme ci-dessus, que le point $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartient à E lorsque la différence $x-\alpha$ est positive et assez petite. Il en découle immédiatement la proposition.

Remarque 1. La propriété III$^+$ montre que l'ensemble E défini par

$$(8.1) \qquad 0 \leqq x-x<\delta_0, \qquad (x, \vec{y}) \in U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta}))$$

est une partie ouverte à droite de l'ensemble D défini par $0 \leqq x-\xi<\delta_0$, $|y|<\infty$. Il est clair que E est fermé dans D. E est donc une région majorante à droite dans D.

Remarque 2. Supposons la condition suivante remplie.

VI. Si une courbe issue à gauche d'un point $(\xi, \vec{\eta})$ est contenue dans $\mathfrak{D}^+$, le point $(\xi, \vec{\eta})$ appartient à $\mathfrak{D}^-$.

Alors on peut remplacer, dans la proposition 8.1, l'hypothèse que E soit une partie fermée de D par celle que E soit une partie de D fermée à gauche dans D.

En effet, soit $\varphi(\vec{x})$ une caractéristique à droite. Si $(x, \varphi(\vec{x}))$ appartient à E pour $[a, \alpha\rangle$ et si α appartient à l'intervalle où $\vec{\varphi}(x)$ est définie, la fonction $\vec{\varphi}(x)$ restreinte à $[a, \alpha]$ est, d'après l'analogue de la proposition 3.3, une caractéristique à gauche. $(\alpha, \vec{\varphi}(\alpha))$ appartient alors à E par hypothèse. On peut donc raisonner comme ci-dessus.

Nous désignerons par VI' la propriété que l'on obtient en permutant droite et gauche.

On peut démontrer aussi sans peine les propositions suivantes.

8.2 *Si E est une région majorante à droite dans D' qui est une régions majorante à droite dans D, E est une région majorante à droite dans D.*

8.3 *La réunion et l'intersection d'une famille finie ou infinie de régions majorantes à droite dans un ensemble D sont des régions majorantes à droite dans D.*

8.4 *Si E_t est une région majorante à droite dans D_t, l'intersection $\bigcap_t E_t$ est une région majorante à droite dans l'intersection $\bigcap_t D_t$, où t parcourt un ensemble fini ou infini.*

8.5 *Si une partie E de D est une région majorante à gauche dans D, son complément relatif à D est une région majorante à droite sous l'hypothèse que l'on ait la condition* VI.

La proposition 8.3 montre l'existence de la plus petite région majorante à droite dans D contenant une partie E de D. Nous l'appellerons *région majorante minimum à droite* dans D contenant E. C'est la région remplie par toutes les caractéristiques à droite issues à droite d'un point de E et contenues dans D. Nous définissons de même *région majorante minimum à gauche*.

9. Equivalence des topologies. Soient $\mathfrak{S}^+$ et $\mathfrak{S}^-$ des topologies droite et gauche satisfaisant aux conditions I$^\pm$, $\cdots$, IV$^\pm$, V et V'. Si la caractéristique de $\mathfrak{S}^+$ est celle de $\mathfrak{T}^+$ et réciproquement, les deux topologies $\mathfrak{T}^+$ et $\mathfrak{S}^+$ sont dites *équivalentes*.

Cela posé, E étant un ensemble dans l'espace $\mathfrak{R}^{n+1}$, désignons par $U_{\lambda(x)}(E)$ l'ensemble dont la section par l'hyperplan $x=t$ est l'ensemble des points de l'hyperplan distants de E au plus de $\lambda(t)$. On peut vérifier sans peine que l'on a

$$U_{\lambda(x)}(U_{\mu(x)}(E))=U_{\lambda(x)+\mu(x)}(E)\,.$$

Posons

$$W_\varepsilon^\pm(\xi,\vec{\eta})=U_{\pm\varepsilon(x-\xi)}(V_\varepsilon^\pm(\xi,\vec{\eta}))\,.$$

On voit immédiatement que le système des ensembles $W_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$ jouit des propriétés I$^+$ et II$^+$, où l'on remplace V par W.

Considérons la propriété III$^+$. La relation

$$U_\delta(W_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))=U_{\delta+\varepsilon(x-\xi)}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$$

montre que le point de $U_{\delta_1}(W_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$ dont l'abscisse est au plus égal à $\xi+\delta_1$ appartient à $U_{\delta_0}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$ si $(1+\varepsilon)\delta_1=\delta_0$. Considérons un point $(\xi',\vec{\eta}')$ tel que l'on ait

$$0\leqq\xi'-\xi\leqq\delta_1\,,\qquad(\xi',\vec{\eta}')\in U_\delta(W_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))\,,$$

δ étant un nombre non négatif au plus égal à δ_1. $(\xi',\vec{\eta}')$ appartenant à $U_{\delta+\varepsilon(\xi'-\xi)}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$, on a

$$V_{\varepsilon'}^+(\xi',\vec{\eta}')\subseteqq U_{\delta+\varepsilon(\xi'-\xi)}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))\,.$$

On a par suite

$$\begin{aligned}W_{\varepsilon'}^+(\xi',\vec{\eta}')&=U_{\varepsilon'(x-\xi')}(V_{\varepsilon'}^+(\xi',\vec{\eta}'))\\&\subseteqq U_{\varepsilon'(x-\xi')+\delta+\varepsilon(\xi'-\xi)}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))\\&\subseteqq U_{\varepsilon(x-\xi)+\delta}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))\\&=U_\delta(W_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, le système des ensembles $W_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$ jouit de la propriété III$^+$.

La condition IV$^+$ est remplie par le système des ensembles $W_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$, en remplaçant $F_\varepsilon(x\,;\xi,\vec{\eta})$ par $F_\varepsilon(x\,;\xi,\vec{\eta})+\varepsilon x$.

On voit de même que le système des ensembles $W_\varepsilon^-(\xi,\vec{\eta})$ jouit des propriétés I$^-$, II$^-$, III$^-$, IV$^-$.

Puis considérons la propriété V. Soit $(\xi',\vec{\eta}')$ un point n'appartenant pas à l'intérieur de

$$U_\delta(W_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))=U_{\delta+\varepsilon(x-\xi)}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$$

et tel que $0\leqq\xi'-\xi\leqq\delta_1$, $|\vec{\eta}'-\vec{\eta}|\leqq\delta_1$, où δ est un nombre non négatif au plus égal à $\delta_1=\delta_0/(1+\varepsilon)$. Il n'appartient pas à l'intérieur de $U_{\delta+\varepsilon(\xi'-\xi)}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$. Par suite $V_{\varepsilon'}^-(\xi',\vec{\eta}')$ ne contient aucun point intérieur de $U_{\delta+\varepsilon(\xi'-\xi)}(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$.

Cela posé, soit $(\alpha,\vec{\beta})$ un point de $W_{\varepsilon'}^-(\xi',\vec{\eta}')$ tel que $\xi\leqq\alpha\leqq\xi'$. On peut trouver dans $V_{\varepsilon'}^{+}(\xi', \vec{\eta}')$ un point $(\alpha', \vec{\beta}')$ tel que $\alpha' = \alpha$, $|\vec{\beta}' - \vec{\beta}| \leqq \varepsilon'(\xi' - \alpha)$. Le point $(\alpha', \vec{\beta}')$ n'appartient pas à l'intérieur de $U_{\delta + \varepsilon(\xi' - \xi)}(V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta}))$. Donc le point $(\alpha, \vec{\beta})$ n'appartient pas à l'intérieur de l'ensemble $U_{\delta + \varepsilon(\xi' - \xi) - \varepsilon'(\xi' - \alpha)}(V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta}))$. $U_{\delta + \varepsilon(\alpha - \xi)}(V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta}))$ est un sous-ensemble de celui-ci dont la section par l'hyperplan $x = \alpha$ coïncide avec celle de $U_{\delta}(W_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta}))$.

Par conséquent le système des ensembles $W_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta})$ jouit de la propriété V. On voit de même que la condition V′ est aussi remplie.

Nous désignons par $\mathfrak{S}^{\pm}$ les topologies définies par les systèmes des voisinages $W_{\varepsilon}^{\pm}(\xi, \vec{\eta})$. Leurs domaines propres étant identiques à ceux des topologies $\mathfrak{T}^{\pm}$, les conditions VI et VI′ sont aussi remplies.

Il est évident qu'une caractéristique de $\mathfrak{T}^{+}$ ou de $\mathfrak{T}^{-}$ est une caractéristique de $\mathfrak{S}^{+}$ ou de $\mathfrak{S}^{-}$. Donc pour établir, par exemple, l'équivalence des deux topologies $\mathfrak{T}^{+}$ et $\mathfrak{S}^{+}$, il suffit de montrer qu'une caractéristique de $\mathfrak{S}^{+}$ est une caractéristique de $\mathfrak{T}^{+}$.

Pour cela, supposons qu'une fonction continue $\vec{\varphi}(x)$ ne soit pas une caractéristique de $\mathfrak{T}^{+}$. S'il existe sur la courbe $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ un point n'appartenant pas à $\mathfrak{D}^{+}$, ce point est un point isolé de la courbe par rapport à la topologie $\mathfrak{S}^{+}$ et $\vec{\varphi}(x)$ n'est pas une caractéristique de la topologie $\mathfrak{S}^{+}$. Il suffit donc de considérer le cas où tous les points de la courbe appartiennent à $\mathfrak{D}^{+}$ (bien entendu, l'extrémité droite exclue). D'après la proposition 3.2, il existe sur la courbe un point isolé $(\xi, \vec{\eta})$ par apport à la topologie $\mathfrak{T}^{+}$. Si ε est un nombre positif assez petit, $V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta})$ ne contient aucun point de la courbe sauf $(\xi, \vec{\eta})$. Comme nous avons déjà remarqué, l'ensemble (8.1) est une partie ouverte à droite de l'ensemle D: $0 \leqq x - \xi < \delta_0$, $|\vec{y}| < \infty$. Nous allons montrer que l'ensemble E:

$$0 \leqq x - \xi < \delta_0, \qquad (x, \vec{y}) \in U_{\sigma(x-\xi)}(V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta}))$$

est une partie ouverte de D par rapport à la topologie $\mathfrak{S}^{+}$ si $0 < \sigma < 1$.

Pour cela, considérons un point quelconque $(\xi', \vec{\eta}')$ de E et un voisinage $W_{\rho}^{+}(\xi', \vec{\eta}')$. Si ρ est assez petit, tous les points de $W_{\rho}^{+}(\xi', \vec{\eta}')$ sont d'abscisses moindres que $\xi + \delta_0$. Nous supposons de plus $\rho < \varepsilon', \sigma$. Le point $(\xi', \vec{\eta}')$ appartient à $U_{\sigma(\xi'-\xi)}(V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta}))$ et $\sigma(\xi' - \xi)$ est moindre que δ_0. On a par suite

$$V_{\varepsilon'}^{+}(\xi', \vec{\eta}') \subseteqq U_{\sigma(\xi'-\xi)}(V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta})) .$$

$$\begin{aligned} W_{\rho}^{+}(\xi', \vec{\eta}') &= U_{\rho(x-\xi')}(V_{\rho}^{+}(\xi', \vec{\eta}')) \subseteqq U_{\rho(x-\xi')}(V_{\varepsilon'}^{+}(\xi', \vec{\eta}')) \\ &\subseteqq U_{\rho(x-\xi')+\sigma(\xi'-\xi)}(V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta})) \subseteqq U_{\sigma(x-\xi)}(V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta})) . \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

D'après la proposition 8.1, l'ensemble E est une région majorante dans D par rapport à la topologie $\mathfrak{S}^{+}$. Si $\xi < \alpha < \xi'$, le point $(\alpha, \vec{\varphi}(\alpha))$ est à l'extérieur de $V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta})$. Il est donc à l'extérieur de $U_{\sigma(x-\xi)}(V_{\varepsilon}^{+}(\xi, \vec{\eta}))$ pourvu que σ soit assez petit. Par conséquent, $\vec{\varphi}(x)$ n'est pas une caractéristique de la topologie $\mathfrak{S}^{+}$.

Remarque. On pourra vérifier aussi de la même manière que l'on peut prendre

$$W_\varepsilon^{\pm}(\xi, \vec{\eta}) = U_{\pm F(x,\varepsilon) \mp F(\xi,\varepsilon)}(V_\varepsilon^{\pm}(\xi, \vec{\eta}))$$

si $F(x, \varepsilon)$ est une fonction satisfaisant aux conditions suivantes

1° $F(x, \varepsilon)$ est une fonction continue et croissante en x dans l'intervalle $\langle -\infty, \infty \rangle$;

2° $F(x, \varepsilon)$ est une fonction croissante de ε dans l'intervalle $\langle 0, \infty \rangle$ et converge uniformément vers 0 pour $\varepsilon \to +0$.

10. Chaînes caractéristiques. Soit $\vec{\varphi}(x)$ une fonction continue dans un intervalle fermé $[a, a']$ et jouissant des propriétés suivantes:

1° On a

$$(\xi_k, \vec{\varphi}(\xi_k)) \in V_\rho^+(\xi, \vec{\varphi}(\xi))$$

pour presque tous les k lorsque $\xi_k \in I$, $\xi_k \downarrow \xi$, $\xi \in I$, où I est une partie fermée de $[a, a']$ contenant les extrémités a, a';

2° Si $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ est un intervalle contigu à I, on a

$$\alpha' - \alpha < \rho, \qquad (\alpha', \vec{\varphi}(\alpha')) \in V_\rho^+(\alpha, \vec{\varphi}(\alpha))$$

et

$$\vec{\varphi}(x) = \frac{\alpha' - x}{\alpha' - \alpha} \vec{\varphi}(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\alpha' - \alpha} \vec{\varphi}(\alpha')$$

pour $\alpha < x < \alpha'$.

Nous appellerons $\vec{\varphi}(x)$ *ρ-chaîne caractéristique* de la topologie $\mathfrak{T}_\rho^+$ ou *ρ-chaîne caractéristique à droite*, I le *domaine propre* de la ρ-chaîne caractéristique à droite et l'ensembe $\{(x, \vec{\varphi}(x)); x \in I\}$ la *partie propre* de la chaîne caractéristique à droite.

On définit de même *ρ-chaîne caractéristique à gauche*.

Si $\mathfrak{T}^{\pm}$ sont les topologies relatives à l'équation différentielle (1.1), une ρ-chaîne caractéristique de la topologie $\mathfrak{T}_\rho^+$ sera appelée *ρ-chaîne solution à droite* de l'inéquation (4.1) et celle de la topologie $\mathfrak{T}_\rho^-$ *ρ-chaîne solution à gauche* de l'inéquation (4.1).

10.1 *Soit $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ une ρ_k-chaîne caractéristique à droite, où $\{\rho_k\}$ est une suite convergeant vers 0 en décroissant. Si la suite $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ converge vers $\vec{\varphi}(x)$ uniformément dans un intervalle (a, a') fermé ou non, $\vec{\varphi}(x)$ est une caractéristique à droite pourvu que la courbe $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ soit contenue dans $\mathfrak{D}'$, sauf l'extrémité droite si celle-ci lui appartient.*

Soit ξ une valeur quelconque appartenant à l'intervalle (a, a'). Si ξ appartient au domaine propre I_k de la chaîne caractéristique $\vec{\varphi}_k(x)$, nous posons $\xi_k = \xi$. Sinon, nous désignons par ξ_k l'extrémité droite de l'intervalle contigu à I_k et contenant ξ. $\xi_k - \xi$ étant inférieure à ρ_k, on a $\xi_k \to \xi$, $\vec{\varphi}_k(\xi_k) \to \vec{\eta} = \vec{\varphi}(\xi)$. Soient ε, ε' des nombres quelconques tels que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et δ_0 le nombre qui se trouve dans la condition V. Un nombre positif $\delta < \delta_0$ étant donné, on a $(\xi_k, \vec{\varphi}_k(\xi_k)) \in U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta}))$ pour presque tous les k. L'ensemble I_k' des valeurs x telles que

$$x\in I_k\cap[\xi,\xi+\delta_0]\,,\qquad (x,\vec{\varphi}(x))\in U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$$

est fermé. Nous allons montrer que si k est assez grand, I_k' coïncide avec $I_k\cap[\xi,\xi+\delta_0]$.

k étant supposé assez grand, ξ_k appartient à I_k'. Si I_k' ne coïncidait pas avec $I_k\cap[\xi,\xi+\delta_0]$, il existerait un intervalle $\langle\alpha,\alpha'\rangle$ contigu à I_k' et contenant des points de I_k[6]. Deux cas sont à distinguer suivant que $\langle\alpha,\alpha'\rangle$ contient une suite de valeurs de I_k convergeant vers α ou non.

PREMIER CAS. Soit $\{\alpha_r\}$ une suite telle que $\alpha_r\in I_k$, $\alpha_r\downarrow\alpha$. Posons $\vec{\beta}=\vec{\varphi}(\alpha)$, $\vec{\beta}_r=\vec{\varphi}_k(\alpha_r)$. $(\alpha,\vec{\beta})$ appartenant à $U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$, on a

$$V_{\varepsilon'}^+(\alpha,\vec{\beta})\subseteqq U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))\,.$$

Grâce à la propriété 1° de la chaîne caractéristique, on a $(\alpha_r,\vec{\beta}_r)\in V_{\rho_k}^+(\alpha,\vec{\beta})$ pour presque tous les r. k étant supposé assez grand, on a $\rho_k<\varepsilon'$ et puis

$$V_{\rho_k}^+(\alpha,\vec{\beta})\subseteqq U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))\,.$$

α_r appartiendrait donc à I_k' pour presque tous les r contrairement à notre hypothèse.

DEUXIÈME CAS. Soit $\langle\alpha,\alpha''\rangle$ l'intervalle contigu à I_k' dont l'extrémité gauche est α. Grâce à la propriété 2° de la chaîne caractéristiques à droite, on aurait, en raisonnant comme ci-dessus, $\alpha''\in I_k$ contrairement à notre hypothèse.

Si ξ' est une valeur quelconque dans l'intervalle $[\xi,\xi+\delta_0]$, on peut trouver une suite $\{\xi_k'\}$ telle que l'on ait $\xi_k'\to\xi'$, $\xi_k'\in I_k\cap[\xi,\xi+\delta_0]$ et d'après ce qui précède, $(\xi_k',\vec{\varphi}_k(\xi_k'))$ appartient à $U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$ pour presque tous les k. La convergence $\vec{\varphi}_k\to\vec{\varphi}$ étant uniforme, on a $\vec{\varphi}_k(\xi_k')\to\vec{\varphi}(\xi')$. Le point $(\xi',\vec{\varphi}(\xi'))$ appartient donc à $U_\delta(V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta}))$. δ étant arbitrairement petit, $(\xi',\vec{\varphi}(\xi'))$ appartient à $V_\varepsilon^+(\xi,\vec{\eta})$. ξ' étant une valeur quelconque dans l'intervalle $[\xi,\xi+\delta_0]$, la proposition est établie.

10.2 *Supposons la condition V remplie uniformément dans E. La famille $\mathfrak{F}$ des ρ-chaînes caractéristiques à droite définies dans $[a,a']$ et telles que leurs parties propres appartiennent à E est équi-continue dans $[a,a']$.*

Par hypothèse, il existe une fonction continue $F_\rho(x)$ telle que l'on ait

$$|\vec{y}-\vec{\eta}|\leqq F_\rho(x)-F_\rho(\xi)$$

lorsque $(x,\vec{y})\in V_\rho^+(\xi,\vec{\eta})$, $(\xi,\vec{\eta})\in E$, $(x,\vec{y})\in E$.

Soit $\vec{\varphi}(x)$ une ρ-chaîne caractéristique à droite appartenant à $\mathfrak{F}$. Considérons une valeur ξ appartenant au domaine propre I de $\vec{\varphi}(x)$. En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 10.1, on aura

6) On pourrait considérer un cas exceptionnel où I_k' est l'ensemble de toutes les valeurs de $I_k\cap[\xi,\xi+\delta_0]$ ne surpassant pas α. Dans ce cas, nous prenons pour α' l'extrémité droite de $I_k\cap[\xi,\xi+\delta_0]$. α appartiendrait à I_k' et $\langle\alpha,\alpha']$ contiendrait des valeurs de I_k n'appartenant pas à I_k'. Et le raisonnement ci-dessus s'applique encore dans ce cas, en remplaçant $\langle\alpha,\alpha'\rangle$ par $\langle\alpha,\alpha']$.

(10.1) $$|\vec{\varphi}(x)-\vec{\varphi}(\xi)|\leq F_\rho(x)-F_\rho(\xi)$$

pour $x\in I\cap[\xi, a']$. ε étant un nombre positif quelconque, on a

(10.2) $$F_\rho(x)-F_\rho(\xi)<\varepsilon$$

pour $a\leq x<\xi\leq a'$, $\xi-x<\delta$, pourvu que δ soit assez petit.

S'il existe un intervalle $\langle\alpha,\alpha'\rangle$ contigu à I et tel que $\alpha\leq\xi<x\leq\alpha'$, on peut poser $\xi=\alpha$, $x=\alpha'$ dans (10.1) et si $\alpha'-\alpha\leq\delta$, (10.2) est aussi applicable pour $\xi=\alpha$, $x=\alpha'$. $\vec{\varphi}(x)$ étant linéaire dans l'intervalle $[\alpha,\alpha']$, on a

$$|\vec{\varphi}(x)-\vec{\varphi}(\xi)|\leq|\vec{\varphi}(\alpha')-\vec{\varphi}(\alpha)|\leq F_\rho(\alpha')-F_\rho(\alpha)<\varepsilon\,.$$

Si $\alpha'-\alpha>\delta$, nous prenons l'entier k tel que $k\delta\leq\alpha'-\alpha<(k+1)\delta$. On a alors

$$|\vec{\varphi}(x)-\vec{\varphi}(\xi)|=\frac{x-\xi}{\alpha'-\alpha}\{\vec{\varphi}(\alpha')-\vec{\varphi}(\alpha)\}\leq\frac{x-\xi}{\alpha'-\alpha}\{F_\rho(\alpha')-F_\rho(\alpha)\}<\frac{k+1}{k}\varepsilon\leq 2\varepsilon\,.$$

Dans l'autre cas, nous désignons par α l'extrémité droite de l'intervalle contigu à I et contenant ξ et par α' l'extrémité gauche de l'intervalle contigu à I et contenant x. On a alors

$$0\leq\alpha'-\alpha\leq x-\xi<\delta\,.$$

On a par suite

$$|\vec{\varphi}(x)-\vec{\varphi}(\xi)|\leq|\vec{\varphi}(x)-\vec{\varphi}(\alpha')|+|\vec{\varphi}(\alpha')-\vec{\varphi}(\alpha)|+|\vec{\varphi}(\alpha)-\vec{\varphi}(\xi)|<2\varepsilon+\varepsilon+2\varepsilon=5\varepsilon\,.$$

On obtient ainsi dans tous les cas

$$|\vec{\varphi}(x)-\vec{\varphi}(\xi)|<5\varepsilon\,.$$

11. Régions admettantes. Un ensemble E est appelé *région admettante à droite* s'il existe une courbe caractéristique à droite issue à droite d'un point arbitrairement donné dans E et contenu dans E. On définit de même *région admettante à gauche.*

11.1 *La réunion des régions admettantes à droite en nombre fini ou infini est aussi une région admettante à droite.*

C'est une conséquence immédiate de la définition.

11.2 *Pour qu'une partie fermée E d'un ensemble ouvert à droite D soit une région admettante à droite, il faut et il suffit qu'elle ne possède aucun point isolé à droite*[7].

La nécessité de la condition étant évidente, démontrons seulement la suffisance.

Soit $(a, \vec{b})$ un point de E. D étant ouvert à droite, il existe un voisinage droit $V_\varepsilon^+(a, \vec{b})$ contenu dans D. Soit ε' un nombre tel que $0<\varepsilon'<\varepsilon$. Si δ_0 est

7) Cette proposition appliquée à l'équation différentielle avec second membre continu est une conséquence obtenue par M. M. Nagumo dans son mémoire: Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys.-math. Soc. Japan, **24** (1942), 551-559. Antérieurement, j'ai donné aussi, sous une forme un peu différente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie fermée d'un ensemble ouvert à droite soit une région admettante à droite dans mon article déjà cité (Voir Note 5).

un nombre positif assez petit, on a $V_{\varepsilon'}{}^+(x, \vec{y}) \subseteqq V_\varepsilon{}^+(a, \vec{b})$ pour tout point (x, y) tel que

$$(11.1) \qquad 0 \leqq x-a \leqq \delta_0\,, \qquad (x, \vec{y}) \in V_\varepsilon{}^+(a, \vec{b})\,.$$

On a de plus

$$(11.2) \qquad |\vec{y}-\vec{\eta}| \leqq F_\varepsilon{}^+(x\,; a, \vec{b}) - F_\varepsilon{}^+(\xi\,; a, \vec{b})$$

pour

$$a \leqq \xi < x \leqq a+\delta_0\,, \qquad (\xi, \vec{\eta}) \in V_\varepsilon(a, \vec{b})\,, \qquad (x, \vec{y}) \in V_{\varepsilon'}{}^+(\xi, \vec{\eta})\,.$$

Cela posé, soit ρ un nombre positif quelconque moindre que ε'. $(a, \vec{b})$ n'étant pas de point isolé à droite de E, $V_\rho{}^+(a, \vec{b})$ contient un point $(a_1, \vec{b}_1)$ de E différent de $(a, \vec{b})$. Si $a_1 < a+\delta_0$, on a (11.1) pour $x=a_1$, $\vec{y}=\vec{b}_1$. Alors $V_{\varepsilon'}{}^+(a_1, \vec{b}_1)$ est contenu dans $V_\varepsilon{}^+(a, \vec{b})$. On peut trouver un point $(a_2, \vec{b}_2)$ tel que

$$a_1 < a_2 \leqq \min\{a_1+\rho, a+\delta_0\}\,, \qquad (a_2, \vec{b}_2) \in E \cap V_\rho{}^+(a_1, \vec{b}_1)\,.$$

Si $a_2 < a+\delta_0$, on a (11.1) pour $x=a_2$, $\vec{y}=\vec{b}_2$. Alors $V_{\varepsilon'}{}^+(a_2, \vec{b}_2)$ est contenu dans $V_\varepsilon{}^+(a, \vec{b})$. On peut trouver un point $(a_3, \vec{b}_3)$ tel que

$$a_2 < a_3 \leqq \min\{a_2+\rho, a+\delta_0\}\,, \qquad (a_3, \vec{b}_3) \in E \cap V_\rho{}^+(a_2, \vec{b}_2)\,,$$

et ainsi de suite. Supposons que l'on ait extrait une suite infinie des points $\{(a_k, \vec{b}_k)\}$ telle que

$$a_k < a_{k+1} \leqq \min\{a_k+\rho, a+\delta_0\}\,, \qquad (a_{k+1}, \vec{b}_{k+1}) \in E \cap V_\rho{}^+(a_k, \vec{b}_k)\,.$$

Alors tous les points $(a_k, \vec{b}_k)$ appartiennent à $V_\varepsilon{}^+(a, \vec{b})$. On peut donc poser

$$\xi = a_k\,, \quad \vec{\eta}=\vec{b}_k\,, \quad x=a_{k+1}\,, \quad \vec{y}=\vec{b}_{k+1}$$

dans (11.2) et l'on a

$$|\vec{b}_{k+1}-\vec{b}_k| \leqq F_\varepsilon{}^+(a_{k+1}\,; a, \vec{b}) - F_\varepsilon{}^+(a_k\,; a, \vec{b})\,.$$

On en conclut que le point $(a_k, \vec{b}_k)$ converge vers un point $(a_\omega, \vec{b}_\omega)$ lorsque $k \to \infty$. Le point $(a_\omega, \vec{b}_\omega)$ appartient à $V_\varepsilon{}^+(a, \vec{b})$ car celui-ci est fermé. D contenant $V_\varepsilon{}^+(a, \vec{b})$ et E étant fermé dans D, $(a_\omega, \vec{b}_\omega)$ appartient à E.

Si $a_\omega - a < \delta_0$, on peut trouver un point $(a_{\omega+1}, \vec{b}_{\omega+1})$ tel que

$$a_\omega < a_{\omega+1} \leqq \min\{a_\omega+\rho, a+\delta_0\}\,, \qquad (a_{\omega+1}, \vec{b}_{\omega+1}) \in E \cap V_\rho{}^+(a_\omega, \vec{b}_\omega)\,.$$

On peut continuer ainsi transfiniment jusqu'à ce que l'on obtient un point $(a_\gamma, \vec{b}_\gamma)$ dont l'abscisse a_γ est égale à $a+\delta_0$, γ étant un nombre ordinal de la classe I ou II. La suite finie ou transfinie de points $\{(a_k, \vec{b}_k)\}$ $(k \leqq \gamma)$ jouit des propriétés suivantes:

1° On a $a_k < a+\delta_0$ pour $k < \gamma$ et $a_\gamma = a+\delta_0$;

2° Si k est un nombre ordinal de la première espèce $(\leqq \gamma)$, on a

$$(a_k, \vec{b}_k) \in V_\rho{}^+(a_{k-1}, \vec{b}_{k-1})\,;$$

3° Si k est un nombre ordinal de la deuxième espèce $(\leqq \gamma)$, on a $a_h \to a_k$, $\vec{b}_h \to \vec{b}_k$ pour $h \to k$.

La fonction, qui prend la valeur $\vec{b}_k$ pour $x=a_k$ $(k\leqq r)$ et est linéaire dans chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ $(k<r)$, est une ρ-chaîne caractéristique à droite et sa partie propre est contenue dans $V_\varepsilon^+(a, \vec{b})$.

Cela posé, soit $\{\rho_k\}$ une suite de nombres positifs convergeant vers 0. D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, on peut construire une ρ_k-chaîne caractéristique à droite dans l'intervalle $[a, a+\delta_0]$: $\vec{\varphi}_k(x)$ dont la partie propre est contenue dans $V_\varepsilon^+(a, \vec{b})$. La proposition 10.2 montre que la suite $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ est équi-continue. On peut donc supposer, sans perdre la généralité, qu'elle est uniformément convergente dans $[a, a+\delta_0]$. Soit $\vec{\varphi}(x)$ la limite de cette suite. $V_\varepsilon^+(a, \vec{b})$ étant un ensemble fermé, la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ est contenue dans $V_\varepsilon^+(a, \vec{b})$. E étant fermé dans D, elle est contenue dans E. La proposition 10.1 montre que $\vec{\varphi}(x)$ est une caractéristique à droite.

12. Prolongement de la caractéristique. Démontrons la proposition :

12.1 *Soit $\vec{\varphi}(x)$ une caractéristique à droite définie dans l'intervalle ouvert $\langle a, a'\rangle$. Si l'on peut choisir une suite décroissante $\{a_k\}$ convergeant vers a de manière que la suite $\{(a_k, \vec{\varphi}(a_k))\}$ converge vers un point $(a, \vec{b})$ de $\mathfrak{D}^+$, $\vec{\varphi}(x)$ converge vers $\vec{b}$ lorsque $x\to a+0$. Si l'on peut choisir une suite croissante $\{a_k'\}$ convergeant vers a' de manière que la suite $\{(a_k', \vec{\varphi}(a_k'))\}$ converge vers un point $(a', \vec{b}')$ de $\mathfrak{D}^+$, $\vec{\varphi}(x)$ converge vers $\vec{b}$ lorsque $x\to a'-0$.*

D'après la remarque 1 de la proposition 8.1, l'ensemble

$$A_\delta=\{(x, \vec{y})\in U_\delta(V_\varepsilon^+(a, \vec{b}))\,;\, 0\leqq x-a<\delta_0\}$$

est une région majorante à droite si $0<\delta\leqq\delta_0$. Le point $(a_k, \vec{\varphi}(a_k))$ appartient à A_δ lorsque k est assez grand. On a alors $(x, \vec{\varphi}(x))\in A_\delta$ pour $a_k\leqq x<a+\delta_0$. La suite $\{a_k\}$ tendant vers a, $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartient à A_δ pour $a<x<a+\delta_0$. δ étant arbitrairement petit, $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartient à $V_\varepsilon^+(a, \vec{b})$. On en conclut que $\varphi(x)\to\vec{b}$ pour $x\to a+0$.

Posons $\vec{b}_k'=\vec{\varphi}(a_k')$. $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartient à $V_\varepsilon^+(a_k', b_k')$ lorsque $x-a_k'$ est positive et assez petite. D'après l'hypothèse IV$^+$, on a

$$|\vec{\varphi}(x)-\vec{\varphi}(a_k')|\leqq F_\varepsilon^+(x\,;a', \vec{b}')-F_\varepsilon^+(a_k'\,;a', \vec{b}') \tag{12.1}$$

pour $(x, \vec{\varphi}(x))\in V_\varepsilon^+(a_k', \vec{b}_k')$, k étant supposé assez grand. Si l'on a (12.1) dans l'intervalle $a_k'\leqq x<\xi$, on a (12.1) aussi pour $x=\xi$. Posons $\vec{\eta}=\vec{\varphi}(\xi)$. L'inégalité (12.1) montre alors que le point $(\xi, \vec{\eta})$ est assez voisin de $(a', \vec{b}')$. On a donc

$$|\vec{\varphi}(x)-\vec{\varphi}(\xi)|\leqq F_\varepsilon^+(x\,;a', \vec{b}')-F_\varepsilon^+(\xi\,;a', \vec{b}')$$

dans un intervalle assez petit $[\xi, \xi'\rangle$. Cette inégalité et (12.1), où l'on pose $x=\xi$, entraînent que l'on a (12.1) dans l'intervalle $[a_k', \xi'\rangle$. Par suite, l'inégalité (12.1) subsiste dans l'intervalle $[a_k', a'\rangle$. $\{\vec{\varphi}(a_k')\}$ convergeant vers $\vec{b}'$, l'inégalité (12.1) montre la convergence $\vec{\varphi}(x)\to\vec{b}'$ pour $x\to a'-0$.

Remarque. On peut démontrer de la même manière la première partie de la proposition. La démonstration de la première partie exposée ci-dessus n'utilise pas l'hypothèse IV$^+$. On peut démontrer aussi la deuxième partie sans utiliser l'hypothèse IV$^+$, si la courbe $y=\vec{\varphi}(x)$ ainsi que le point (a', b') appartiennent à $\mathfrak{D}^-$, car alors $\vec{\varphi}(x)$ est une caractéristique à gauche.

Soient $\vec{\varphi}_1(x)$, $\vec{\varphi}_2(x)$ deux caractéristiques à droite définie respectivement dans $(a, a']$ et $[a', a'')$. Si $\vec{\varphi}_1(a')=\vec{\varphi}_2(a')$, la fonction $\vec{\varphi}(x)$, qui coïncide avec $\vec{\varphi}_1(x)$ dans $(a, a']$ et avec $\vec{\varphi}_2(x)$ dans $[a', a'')$, est évidement une caractéristique à droite dans l'intervalle (a, a''). On dit alors que l'une d'elles est le prolongement de l'autre.

Considérons une région admettante à droite E. Si $(a, \vec{b})$ est un point de E, il existe une caractéristique à droite $\vec{\varphi}_0(x)$ issue à droite de $(a, \vec{b})$ et contenue dans E. Soit $[a, a_1\rangle$ son domaine d'existence. Si $\vec{b}_1=\lim_{x\to a_1-0}\vec{\varphi}_0(x)$ existe et si $(a_1, \vec{b}_1)$ appartient à E, il existe une caractéristique à droite $\vec{\varphi}_1(x)$ issue à droite de $(a_1, \vec{b}_1)$ et contenue dans E. Soit $[a_1, a_2\rangle$ son domaine d'existence. $\vec{\varphi}_1(x)$ est un prolongement de la caractéristique à droite $\vec{\varphi}_1(x)$ et on obtient une caractéristique à droite $\vec{\varphi}(x)$ définie dans $[a, a_2\rangle$ en posant $\vec{\varphi}(x)=\vec{\varphi}_0(x)$ ou $\vec{\varphi}_1(x)$ suivant que l'on a $a\leqq x<a_1$ ou $a_1\leqq x<a_2$. De même, si $\vec{b}_2=\lim_{x\to a_2-0}\vec{\varphi}_1(x)$ et si $(a_2, \vec{b}_2)$ appartient à E, on peut prolonger $\vec{\varphi}_1(x)$ au delà de a_2 et on obtient une caractéristique $\vec{\varphi}(x)$ définie dans un intervalle $[a, a_3\rangle$ plus étendu que $[a, a_2\rangle$.

Supposons d'une manière générale que l'on ait pour chaque nombre ordinal de la classe I ou II $\lambda<\Upsilon$ une caractéristique à droite $\vec{\varphi}_\lambda(x)$ issue à droite d'un point $(a_\lambda, \vec{b}_\lambda)$ de E, définie dans l'intervalle $[a_\lambda, a_{\lambda+1}\rangle$ et contenue dans E et que l'on ait $\vec{b}_\lambda=\lim_{x\to a_\mu-0}\vec{\varphi}_{\lambda-1}(x)$ ou $a_\lambda=\lim_{\mu<\lambda} a_\mu$, $\vec{b}_\lambda=\lim_{\mu<\lambda}\vec{b}_\mu$ suivant que λ $(<\Upsilon)$ est un nombre ordinal de la première ou de la deuxième espèce. Si nous posons $\vec{\varphi}(x)=\vec{\varphi}_\lambda(x)$ pour $a_\lambda\leqq x<a_{\lambda+1}$, on obtient une caractéristique à droite définie dans l'intervalle $[a, a_\Upsilon\rangle$ et contenue dans E.

Pour établir le fait par l'induction transfinie, nous supposons que $\vec{\varphi}(x)$ soit une caractéristique à droite dans $[a, a_{\mu+1}\rangle$ pour $\mu<\lambda$. Si λ est un nombre ordinal de la première espèce, $\vec{\varphi}(x)$ est une caractéristique à droite dans $[a, a_\lambda\rangle$ et puisque l'on a

$$\lim_{x\to a_\lambda+0}\vec{\varphi}(x)=\lim_{x\to a_\lambda+0}\vec{\varphi}_\lambda(x)=\vec{b}_\lambda=\lim_{x\to a_\lambda-0}\vec{\varphi}_{\lambda-1}(x)=\lim_{x\to a_\lambda-0}\vec{\varphi}(x),$$

$\vec{\varphi}(x)$ est une caractéristique dans $[a, a_{\lambda+1}\rangle$. Si λ est un nombre ordinal de la deuxième espèce, $\vec{\varphi}(x)$ est une caractéristique à droite dans $[a, a_\lambda\rangle$, et la deuxième partie de la proposition 12.1 montre que l'on a $\vec{\varphi}(x)\to\vec{b}=\vec{\varphi}(a_\lambda)$ pour $x\to a_\lambda-0$. $\vec{\varphi}(x)$ est donc une caractéristique à droite dans $[a, a_{\lambda+1}\rangle$.

On a ainsi démontré que $\vec{\varphi}(x)$ est une caractéristique à droite dans $[a, a_\Upsilon\rangle$. Les intervalles $\langle a_\lambda, a_{\lambda+1}\rangle$ et $\langle a_\mu, a_{\mu+1}\rangle$ étant disjoints pour $\lambda\neq\mu$, le nombre cardinal de Υ est au plus dénombrable. On peut donc définir le procédé transfini de prolongement d'une caractérique à droite et on obtiendra finalement une caractéristique à droite que l'on ne peut plus la prolonger vers droite.

12.2 *Si E est une partie fermée de D admettante à droite, toute caractéristique à droite est prolongeable vers droite jusqu'à la frontière de D.*

Plus précisément, si une caractéristique à droite $\vec{\varphi}(x)$ contenue dans E n'est pas prolongeable au delà de a', la suite $\{(a_k, \vec{\varphi}(a_k))\}$ ne converge vers aucun point de D de quelle manière qu'on choisisse la suite croissante $\{a_k\}$ convergeant vers a'.

Si la suite $\{(a_k, \vec{\varphi}(a_k))\}$ convergeait vers un point $(a', \vec{b}')$ de D, $(a', \vec{b}')$ appartiendrait à E. D'après la proposition 12.1, $\vec{\varphi}(x)$ convergerait vers $\vec{b}'$ lorsque $x \to a'-0$. E étant une région admettante à droite, $\vec{\varphi}(x)$ serait prolongeable au delà de a' contrairement à notre hypothèse.

13. Théorème d'existence pour l'équation différentielle avec second membre continu. Considérons en particulier

$$dy/dx = f(x, y)\,, \tag{13.1}$$

dont le second membre est une fonction continue dans l'ensemble E;

$$a \leqq x < a'\,, \qquad \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)\,, \tag{13.2}$$

$\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ étant des fonctions continues dans l'intervalle $[a, a'\rangle$. Nous cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que E soit une région admettante à droite.

Considérons par exemple un point (ξ, η) tel que $\eta = \overline{\omega}(\xi)$. Le voisinage droit $V_\varepsilon^+(\xi, \eta)$ est l'ensemble défini par

$$0 \leqq x-\xi \leqq \varepsilon\,, \qquad |y-\eta-(x-\xi)f(\xi, \eta)| \leqq \varepsilon(x-\xi)\,.$$

Si la valeur de $\overline{D}^+\overline{\omega}(x)$ en ξ est plus petite que $f(\xi, \eta)$, $V_\varepsilon^+(\xi, \eta)$ et E n'ont que le point (ξ, η) en commun lorsque ε est assez petit et (ξ, η) est un point isolé à droite de E. On verra de même que si la valeur de $\underline{D}^+\underline{\omega}(x)$ en ξ est plus grande que $f(x, \underline{\omega}(x))$, $(\xi, \underline{\omega}(\xi))$ est un point isolé à droite de E. Donc, pour que E soit une région admettante à droite, il faut que l'on ait

$$\underline{D}^+\underline{\omega}(x) \leqq f(x, \underline{\omega}(x))\,, \qquad \overline{D}^+\overline{\omega}(x) \geqq f(x, \overline{\omega}(x))\,. \tag{13.3}$$

Considérons encore le point (ξ, η) sur la courbe $y = \overline{\omega}(x)$. Si l'on a

$$\underline{D}^+\overline{\omega}(x) \leqq f(\xi, \eta) \leqq \overline{D}^+\overline{\omega}(x)$$

pour $x = \xi$, il existe sur la courbe $y = \overline{\omega}(x)$ un point de $V_\varepsilon^+(\xi, \eta)$ quelque petit que soit ε. Par suite le point (ξ, η) n'est pas isolé à droite.

Si la valeur de $\underline{D}^+\overline{\omega}(x)$ est plus grande que $f(\xi, \eta)$, on a

$$\overline{\omega}(x) \geqq \eta + (x-\xi)(f(\xi, \eta)+\varepsilon)$$

dans un intervalle assez petit $[\xi, \xi+\varepsilon]$. Si $\underline{\omega}(\xi) < \overline{\omega}(\xi) = \eta$, on a

$$\eta + (x-\xi)(f(\xi, \eta)-\varepsilon) \geqq \underline{\omega}(x)$$

dans l'intervalle assez petit $[\xi, \xi+\varepsilon]$ et le point (x, y) appartient à E pour

$$0 \leqq x-\xi \leqq \varepsilon\,, \qquad y = \eta + (x-\xi)f(\xi, \eta)\,.$$

Donc le point (ξ, η) n'est pas isolé à droite.

Si $\omega(\xi)=\overline{\omega}(\xi)=\eta$, il existe sur la courbe $y=\underline{\omega}(x)$ un point (ξ',η') tel que

$$0<\xi'-\xi<\varepsilon\,,\qquad \eta'\leqq\eta+(\xi'-\xi)(f(\xi,\eta)+\varepsilon)\,.$$

Alors le point (ξ',η''), où $\eta''=\eta+(\xi'-\xi)(f(\xi,\eta)+\varepsilon)$, appartient à E. Donc le point (ξ,η) n'est pas isolé à droite.

On a ainsi établi la proposition :

13.1 *Si $\underline{\omega}(x)$ et $\overline{\omega}(x)$ sont des fonctions continues satisfaisant à l'inégalité $\underline{\omega}(x)\leqq\overline{\omega}(x)$ dans l'intervalle $[a,a'\rangle$ et si le second membre de l'équation* (13.1) *est une fonction continue dans l'ensemble E défini par* (13.2), *la condition nécessaire et suffisante pour que E soit une région admettante à droite est que l'on ait* (13.3).

E est une partie fermée de l'ensemble ouvert à droite D: $a\leqq x<a'$, $-\infty<y<\infty$. D'après la proposition 12.2, toute courbe solution issue à droite d'un point de E et contenue dans E est prolongeable jusqu'à la frontière de D. Or le point frontière de D que l'on peut atteindre en traversant E est celui de l'hyperplan $x=a'$. Par suite, toute courbe solution issue à droite d'un point de E et contenue dans E est prolongeable jusqu'à l'hyperplan $x=a'$.

Supposons en outre la continuité de $f(x,y)$ dans l'ensemble fermé

$$a\leqq x\leqq a'\,,\qquad \underline{\omega}(x)\leqq y\leqq\overline{\omega}(x)\,, \tag{13.4}$$

$\underline{\omega}(x)$ et $\overline{\omega}(x)$ étant des fonctions continues dans l'intervalle fermé $[a,a']$. Si $y=\varphi(x)$ est une solution telle que l'on ait

$$\underline{\omega}(x)\leqq\varphi(x)\leqq\overline{\omega}(x) \tag{13.5}$$

dans l'intervalle $[a,a'\rangle$, il existe une suite croissante $\{a_k\}$ telle que la suite de points $\{(a_k,\varphi(a_k))\}$ converge vers un point (a',b') de l'hyperplan $x=a'$. La proposition 12.1 montre que $\varphi(x)$ converge vers b' pour $x\to a'-0$.

On retrouve ainsi le théorème d'existence dû à M. O. Perron sous la forme un peu plus générale :

Soient $\underline{\omega}(x)$ et $\overline{\omega}(x)$ des fonctions continues telles que l'on ait $\underline{\omega}(x)\leqq\overline{\omega}(x)$ dans $[a,a']$ et $f(x,y)$ une fonction continue dans l'ensemble E défini par (13.4). *Supposons de plus que l'on ait* (13.3). *Si (ξ,η) est un point de E, il existe une solution $\varphi(x)$ de* (13.1) *prenant la valeur η pour $x=\xi$ et telle que l'on ait* (13.5) *dans l'intervalle $[\xi,a']$.*

Dans le cas du système d'équations différentielles, on a la proposition :

13.2 *Soient $S(\vec{y})$ une fonction convexe et positivement linéaire*[8] *et $\omega(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $[a,a'\rangle$. Si $\vec{f}(x,\vec{y})$ est continue dans l'ensemble E:*

$$a\leqq x<a'\,,\qquad S(\vec{y})\leqq\omega(x) \tag{13.6}$$

8) C'est une fonction continue satisfaisant aux conditions 1° $S(\vec{y}+\vec{z})\leqq S(\vec{y})+S(\vec{z})$; 2° $S(\lambda\vec{y})=\lambda S(\vec{y})$ pour $0<\lambda<\infty$. On a alors $D^{\pm}S(\vec{\varphi}(x))\leqq S(D^{\pm}\vec{\varphi}(x))$ pour toute fonction $\vec{\varphi}(x)$ admettant des dérivées à droite et à gauche. Pour cela, voir mon article: Sur la fonction $S(x)$ de M. E. Kamke, Japanese Journ. Math., **17** (1941), 289-298.

et si l'on a

$$S(\vec{f}(x, \vec{y})) \leqq D^+ \omega(x)$$

pour

$$(13.7) \qquad a \leqq x < a', \qquad S(\vec{y}) = \omega(x),$$

E est une région admettante à droite[9].

Considérons un point $(\xi, \vec{\eta})$ où l'on a (13.7). Si l'on pose

$$\vec{\varphi}(x) = \vec{\eta} + (x - \xi)\vec{f}(\xi, \vec{\eta})$$

on obtient

$$(13.8) \qquad D^+ S(\vec{\varphi}(x)) \leqq S(\vec{f}(\xi, \vec{\eta})) \leqq D^+ \omega(x)$$

pour $x = \xi$. Si l'on a $D^+ S(\vec{\varphi}(x)) < D^+ \omega(x)$ pour $x = \xi$, il existe, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, une valeur telle que

$$0 < \xi' - \xi < \varepsilon, \qquad S(\vec{\varphi}(\xi')) < \omega(\xi'),$$

et le point $(\xi', \vec{\varphi}(\xi'))$ appartient à $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$. Donc le point $(\xi, \vec{\eta})$ n'est pas isolé à droite. Supposons donc que l'on ait les égalités dans (13.8) pour $x = \xi$.

Posons

$$\vec{\psi}(x) = (1 + \alpha(x - \xi))\vec{\varphi}(x).$$

Si α est assez petit, le point $(x, \vec{\psi}(x))$ appartient à $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ pour $0 \leqq x - \xi \leqq \varepsilon$. Or on a

$$D^+ S(\vec{\psi}(x)) = (1 + \alpha(x - \xi)) D^+ S(\vec{\varphi}(x)) + \alpha S(\vec{\varphi}(x)).$$

Si $S(\vec{\eta}) \neq 0$, on peut choisir la valeur α de manière que l'on ait $D^+ S(\vec{\psi}(x)) < D^+ \omega(x)$ pour $x = \xi$. Donc le point $(\xi, \vec{\eta})$ n'est pas isolé à droite.

Posons

$$\vec{\psi}(x) = \vec{\eta} + \sigma(x - \xi)\vec{f}(\xi, \vec{\eta}) \equiv \vec{\varphi}(\xi + \sigma(x - \xi)).$$

Si σ est assez voisin de 1, le point $(x, \vec{\psi}(x))$ appartient à $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ pour $0 \leqq x - \xi \leqq \varepsilon$. Or on a

$$D^+ S(\vec{\psi}(x)) = \sigma D^+ S(\vec{\varphi}(t)) \qquad (t = \xi + \sigma(x - \xi)).$$

Cette valeur est égale à $\sigma S(\vec{f}(\xi, \vec{\eta}))$ pour $x = \xi$. Si $S(\vec{f}(\xi, \vec{\eta}))$ est différente de 0, on peut choisir la valeur σ de manière que l'on ait $D^+ \omega(x) > \sigma S(\vec{f}(\xi, \vec{\eta}))$ pour $x = \xi$. Donc le point $(\xi, \vec{\eta})$ n'est pas isolé à droite.

Il nous reste à examiner le cas où l'on a

$$S(\vec{\eta}) = 0, \qquad S(\vec{f}(\xi, \vec{\eta})) = 0.$$

On a alors

$$S(\vec{\varphi}(x)) \leqq S(\vec{\eta}) + (x - \xi) S(\vec{f}(\xi, \vec{\eta})) = 0.$$

Dans le cas où $S(\vec{y})$ ne prend pas de valeurs négatives, on suppose $\omega(x) \geqq 0$.

9) Dans le cas où $S(\vec{y})$ ne prend pas de valeurs négatives, on suppose $\omega(x) \geqq 0$.

Par suite, le point $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartient à E. Dans l'autre cas, on prend un point $\vec{\gamma}$ tel que $S(\vec{\gamma})<0$ et on pose

$$\vec{\psi}(x)=\vec{\varphi}(x)+\alpha(x-\xi)\vec{\gamma}\,,$$

α étant un nombre positif assez petit. Le point $(x, \vec{\psi}(x))$ appartient à $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ pour $0 \leqq x-\xi \leqq \varepsilon$. Or l'inégalité

$$S(\vec{\psi}(x)) \leqq S(\vec{\varphi}(x))+\alpha(x-\xi)S(\vec{\gamma})$$

entraîne

$$D^+S(\vec{\psi}(x)) \leqq D^+S(\vec{\varphi}(x))+\alpha S(\vec{\gamma})<D^+S(\vec{\varphi}(x))\,.$$

Donc le point $(\xi, \vec{\eta})$ n'est pas isolé à droite.

Ainsi dans tous les cas $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ contient des points de E différents de $(\xi, \vec{\eta})$. La proposition est donc établie.

Remarque. Si $S(\vec{y})$ ne prend pas de valeurs négatives, toute courbe solution contenue dans E est prolongeable jusqu'à l'hyperplan $x=a'$. Mais dans le cas où $S(\vec{y})$ prend des valeurs négatives, il peut arriver qu'une courbe solution $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ n'est pas prolongeable au delà de $\xi(<a')$. Dans ce cas $\vec{\varphi}(x)$ s'éloigne indéfiniment lorsque $x \to \xi-0$.

APPLICATION. Considérons une fonction $\omega(x)$ continue dans $[a, a']$ et satisfaisant à l'inégalité $D^+\omega(x) \geqq 0$ dans $[a, a'\rangle$. Si M est une constante positive assez grande, on a $-M \leqq \omega(x)$. Si l'on pose

$$\underline{\omega}(x)=-M\,, \qquad \overline{\omega}(x)=\omega(x)\,, \qquad f(x, y)=0\,,$$

on a (13.3). L'équation différentielle $dy/dx=0$ admet donc quelle que soit la valeur ξ entre a et a', une solution continue dans $[\xi, a']$ satisfaisant aux conditions $y(\xi)=\omega(\xi)$ et aux inégalités $-M \leqq y(x) \leqq \omega(x)$ dans $[\xi, a']$. Or il n'existe qu'une solution satisfaisant à la condition initiale $y(\xi)=\omega(\xi)$. On obtient ainsi $\omega(x) \geqq \omega(\xi)$ dans $[\xi, a']$. Par suite

Si $\omega(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[a, a']$ et satisfaisant à l'inégalité $D^+\omega(x) \geqq 0$ dans $[a, a'\rangle$, elle est une fonction croissante dans $[a, a']$, et l'on a $\underline{D}^+\omega(x) \geqq 0$ dans $[a, a'\rangle$ et $\overline{D}^-\omega(x) \geqq \underline{D}^-\omega(x) \geqq 0$ dans $\langle a, a']$.

14. Théorème d'existence pour l'équation différentielle du type de Carathéodory. On peut étendre la proposition 13.1 à l'équation du type de Carathéodory comme il suit.

14.1 *Soient $\underline{\omega}(x)$ et $\overline{\omega}(x)$ des fonctions continues satisfaisant à l'inégalité $\underline{\omega}(x) \leqq \overline{\omega}(x)$ dans l'intervalle $[a, a'\rangle$. Nous désignons par E l'ensemble défini par* (13.2). *Si $f(x, y)$ est définie dans E, continue par rapport à y, mesurable par rapport à x et majorée par une fonction sommable $\Phi(x)$, la condition nécessaire et suffisante pour que E soit une région admettante à droite est que l'on ait*

$$\text{(14.1)} \qquad \begin{cases} \overline{D}^+\left\{\overline{\omega}(x)-\int f(x, \overline{\omega}(x))dx\right\} \geqq 0\,, \\ \underline{D}^+\left\{\underline{\omega}(x)-\int f(x, \underline{\omega}(x))dx\right\} \leqq 0\,. \end{cases}$$

Ces inégalités entraînent

$$(14.2) \qquad \begin{cases} \overline{\omega}(x) \geqq \overline{\omega}(\xi) + \int_\xi^x f(x, \overline{\omega}(x))dx , \\ \underline{\omega}(x) \leqq \underline{\omega}(\xi) + \int_\xi^x f(x, \underline{\omega}(x))dx \end{cases}$$

pour $a \leqq \xi \leqq x < a'$. Si $\overline{\omega}(\xi) > \underline{\omega}(\xi)$, on a

$$\overline{\omega}(x) \geqq \overline{\omega}(\xi) + \int_\xi^x f(x, \overline{\omega}(x))dx > \underline{\omega}(x)$$

dans un intervalle assez petit $[\xi, \xi']$. Donc le point $(\xi, \overline{\omega}(\xi))$ de E n'est pas isolé à droite. Si $\underline{\omega}(\xi) = \overline{\omega}(\xi) = \eta$, tout point du segment joignant les points

$$\left(x, \overline{\omega}(\xi) + \int_\xi^x f(x, \overline{\omega}(x))dx\right), \qquad \left(x, \underline{\omega}(\xi) + \int_\xi^x f(x, \underline{\omega}(x))dx\right)$$

appartient à $V_\varepsilon^+(\xi, \eta)$ lorsque $x - \xi$ est positive et assez petite. Les inégalités (14.2) montrent que E contient un point de ce segment. Donc le point (ξ, η) de E n'est pas isolé à droite.

Par conséquent, E est une région admettante à droite.

Démontrons maintenant la nécessité de la condition. Pour cela, nous supposons par exemple que l'on n'ait pas la première des inégalités (14.1). Alors la première des inégalités (14.2) ne subsiste pas. Il existe donc des valeurs α, α' telles que l'on ait

$$\overline{\omega}(\alpha') < \overline{\omega}(\alpha) + \int_\alpha^{\alpha'} f(x, \overline{\omega}(x))dx$$

et $a \leqq \alpha < \alpha' < a'$. Posons

$$F_\sigma(x) = \inf_{\mathfrak{F}_\sigma} \int_a^x f(x, y(x))dx$$

où $\mathfrak{F}_\sigma$ est la famille des fonctions admissibles $y(x)$ telles que l'on ait

$$\underline{\omega}(x) \leqq y(x) \leqq \overline{\omega}(x) , \qquad \overline{\omega}(x) - y(x) \leqq \sigma .$$

$F_\sigma(x)$ converge vers $\int_a^x f(x, \overline{\omega}(x))dx$ lorsque $\sigma \to 0$. On a alors

$$\overline{\omega}(\alpha') < \overline{\omega}(\alpha) + F_\sigma(\alpha') - F_\sigma(\alpha)$$

si σ est assez petit. Il existe donc une valeur ξ telle que l'on ait

$$\overline{\omega}(x) < \overline{\omega}(\alpha) + F_\sigma(x) - F_\sigma(\alpha)$$

dans l'intervalle $\langle \xi, \alpha']$ tandis que l'on a l'égalité

$$\overline{\omega}(\xi) = \overline{\omega}(\alpha) + F_\sigma(\xi) - F_\sigma(\alpha) .$$

On a alors

$$\overline{\omega}(x) - \overline{\omega}(\xi) < F_\sigma(x) - F_\sigma(\xi)$$

dans $\langle \xi, \alpha']$. Posons $\eta = \overline{\omega}(\xi)$. Si ε est assez petit, on a

$$\underline{F}_\varepsilon(x ; \xi, \eta) \geqq F_\sigma(x) - F_\sigma(\xi)$$

dans l'intervalle $[\xi, \xi+\varepsilon]$, $F_\varepsilon(x; \xi, \eta)$ étant la fonction définie au n° 5. Alors $V_\varepsilon^+(\xi, \eta)$ ne contient d'autre point de E que le point (ξ, η). (ξ, η) est donc un point isolé à droite de E, et par suite E n'est pas une région admettante à droite.

La proposition 13.2 peut s'étendre au cas de l'équation du type de Carathéodory comme il suit.

14.2 *Soient $\omega(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $[a, a')$ et E l'ensemble définie par* (13.6). *Nous supposons que $\vec{f}(x, \vec{y})$ soit continue par rapport à $\vec{y}$, et mesurable par rapport à x et que $S(\vec{f}(x, \vec{y}))$ soit majorée par une fonction sommable. Posons*

$$F(x) = \sup \int_a^x S(\vec{f}(x, \vec{y}(x)))dx \text{ ,}$$

où $\vec{y}(x)$ parcourt la famille $\mathfrak{F}$ des fonctions admissibles $\vec{y}(x)$ telles que l'on ait (13.7). *Si l'on a*

$$D^+\{\omega(x) - F(x)\} \geqq 0 \text{ ,} \tag{14.3}$$

E est une région admettante à droite.

En effet, (14.3) entraîne

$$\omega(x) - \omega(\xi) \geqq F(x) - F(\xi)$$

pour $a \leqq \xi < x < a'$. Considérons un point $(\xi, \vec{\eta})$ tel que l'on ait $S(\vec{\eta}) = \omega(\xi)$. On peut tracer sur la frontière de E une courbe $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ issue à droite de $(\xi, \vec{\eta})$. Le point $(x, \vec{y})$ de la courbe

$$\vec{y} = \vec{\eta} + \int_\xi^x \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))dx$$

appartient à $V_\varepsilon^+(\xi, \vec{\eta})$ si $x - \xi$ est positive et assez petite.

Or on a

$$\begin{aligned} S(\vec{y}) = S\Big(\vec{\eta} + \int_\xi^x \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))dx\Big) &\leqq S(\vec{\eta}) + S\Big(\int_\xi^x \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))dx\Big) \\ &\leqq S(\vec{\eta}) + \int_\xi^x S(\vec{f}(x, \vec{\varphi}(x)))dx \\ &\leqq S(\vec{\eta}) + F(x) - F(\xi) \\ &\leqq S(\vec{\eta}) + \omega(x) - \omega(\xi) = \omega(x) \end{aligned}$$

de sorte que le point $(x, \vec{y})$ appartient à E. Par suite le point $(\xi, \vec{\eta})$ de E n'est pas isolé à droite.