Théorie des endomorphismes complètement continus, II.

Par Masuo HUKUHARA et Yasutaka SIBUYA.

IV. Valeurs propres.

17. Ensemble des valeurs propres. Soit K un endomorphisme complètement continu d'un espace ($\mathfrak{L}$) linéaire sur un corps de nombres complexes. Nous considérons l'endomorphisme dépendant d'un paramètre λ:

$$L[\lambda]=I-\lambda K.$$

Relativement à cet endomorphisme $L[\lambda]$, nous pouvons définir les sous-espaces N^n, N_n et les nombres μ, ν que nous désignerons respectivement par $N^n[\lambda]$, $N_n[\lambda]$, $\mu[\lambda]$, $\nu[\lambda]$ pour mettre en évidence la dépendance de λ. D'après ce que nous avons vu dans la section précédante, on a toujours

$$\mu[\lambda]=\nu[\lambda]<\infty,$$

et $N^n[\lambda]$ et $N_n[\lambda]$ sont indépendants de n pour $n\geqq\mu[\lambda]$. Nous les désignerons donc par $N^\infty[\lambda]$, $N_\infty[\lambda]$.

Les valeurs λ telles que $\mu[\lambda]>0$ sont les *valeurs propres* de l'endomorpihsme K.

17.1 *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme complètement continu K est fermé.*

En effet, supposons

$$\mu[\alpha_k]>0, \qquad \alpha_k\to\alpha.$$

Si V est un voisinage dont l'image par K est compacte, d'après la proposition 14.2, l'ensemble $V\cap N^1[\alpha_k]$ est compact. Il est un voisinage dans le sous-espace $N^1[\alpha_k]$. Il existe donc un point a_k tel que

$$a_k\in V\cap N^1[\alpha_k], \qquad 2a_k\notin V\cap N^1[\alpha_k].$$

On peut extraire de la suite $\{Ka_k\}$ une suite partielle convergente $\{Ka_k'\}$. Si $\{\alpha_k'\}$ est la suite partielle correspondante de la suite $\{\alpha_k\}$, on a $a_k'=\alpha_k'Ka_k'$. La suite $\{a_k'\}$ converge donc vers un point a' et l'on a $a'=\alpha Ka'\in N^1[\alpha]$. $2a_k'$ n'appartenant pas à V, a est différent de o. α est donc une valeur propre.

17.2 *Les valeurs propres sont isolées.*

Soit, en effet, α une valeur propre. Pour l'endomorphisme K restreint à $N_\infty[\alpha]$, α n'est pas une valeur propre. D'après la proposition établie tout à l'heure, la valeur λ assez voisine de α n'est pas propre pour l'endmorphisme K restreint à $N_\infty[\alpha]$. On a donc

$$N_\infty[\alpha]=L[\lambda]\{N_\infty[\alpha]\}\subseteq N_1[\lambda]$$

pour les valeurs λ assez voisines de α.

Si l'on remarque la relation

$$\alpha L[\lambda]-\lambda L[\alpha]=(\alpha-\lambda)I, \tag{17.1}$$

on a

$$x=\frac{\alpha}{\alpha-\lambda}L[\lambda]x\in N_1[\lambda]$$

pour $x\in N^1[\alpha]$. Si $x\in N^n[\alpha]$, on a

$$x=\frac{\alpha}{\alpha-\lambda}L[\lambda]x-\frac{\lambda}{\alpha-\lambda}L[\alpha]x\in N_1[\lambda]\oplus N^{n-1}[\alpha].$$

On peut en conclure, par l'induction relative à n, que l'on a $N^n[\alpha]\subseteq N_1[\lambda]$ pour tous les entiers positifs n. Par suite on a $N^\infty[\alpha]\subseteq N_1[\lambda]$ et puis

$$\mathfrak{N}=N^\infty[\alpha]\oplus N_\infty[\alpha]\subseteq N_1[\lambda]\subseteq\mathfrak{N}$$

pour les valeurs λ assez voisines de α, d'où $\nu[\lambda]=0$.

18. Espace des endomorphismes continus. Considérons l'ensemble $\boldsymbol{R}$ de tous les endomorphismes continus. Il est évidemment un espace vectoriel sur le corps de nombres complexes. Prenons pour le système fondamental de suites en O l'ensemble $\boldsymbol{S}$ de toutes les suites $\{L_n\}$ telles que $L_nx_n\to o$ pour une suite convergente quelconque $\{x_n\}$. Le système fondamental de suites $\boldsymbol{S}(L)$ en L sera défini par

$$\boldsymbol{S}(L)=\{\{L_n\};\ \{L_n-L\}\in\boldsymbol{S}\}.$$

C'est l'ensemble de toutes les suite $\{L_n\}$ telles que $L_nx_n\to Lx$ pour $x_n\to x$.

Si $L_n=L$, on a $L_nx_n\to Lx$ d'après la continuité de L.

Soit $\{L_n'\}$ une suite partielle de $\{L_n\}\in\boldsymbol{S}(L)$. On aura donc $L_n'=L_{k_n}$, $k_n\uparrow\infty$. Soit $\{x_k'\}$ une suite quelconque qui converge vers x. Si l'on pose $x_k=x_n'$ pour $k_{n-1}<k\leqq k_n$, $\{x_k\}$ converge vers x. $\{L_nx_n\}$ converge donc vers Lx. $\{L_n'x_n'\}$ étant une suite partielle de $\{L_nx_n\}$, on a $L_n'x_n'\to Lx$. Par suite $\{L_n'\}$ appartient à $\boldsymbol{S}(L)$.

Si $L\neq G$, il existe un point a tel que $La\neq Ga$. Si $\{L_n\}\in\boldsymbol{S}(L)$, on a $L_nx_n\to La$ pour $x_n\to a$. Ga étant différent de La, $\{L_nx_n\}$ ne converge pas vers Ga. Donc $\boldsymbol{S}(L)\cap\boldsymbol{S}(G)=0$.

$\boldsymbol{R}$ est donc un espace $(\mathfrak{L})$ de Fréchet.

18.1 *Dans l'espace $\boldsymbol{R}$, la condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\{L_n\}$ converge vers L est $\{L_n\}\in\boldsymbol{S}(L)$.*

Il suffit seulement de montrer la nécesssité de la condition. Pour cela, il suffit de montrer que $L_n\to L$ et $x_n\to x$ entraînent $L_nx_n\to Lx$. Et pour cela, il suffit de montrer que l'on peut extraire d'une suite partielle qnelconque $\{L_n'x_n'\}$ de la suite $\{L_nx_n\}$ une suite partielle $\{L_n''x_n''\}$ telle que $L_n''x_n''\to Lx$.

$\{L_n'\}$ étant une suite partielle de la suite convergente $\{L_n\}$, on peut en extraire une suite partielle $\{L_n''\} \in S(L)$. On a alors certainement $L_n''x_n'' \to Lx$.

Si $F_n \to F$, $G_n \to G$, on a $F_n x_n \to Fx$, $G_n x_n \to Gx$ pour $x_n \to x$. On en déduit $(F_n + G_n)x_n \to (F+G)x$, d'où $F_n + G_n \to F+G$.

De même, $\alpha_n \to \alpha$ et $L_n \to L$ entraînent $\alpha_n L_n \to \alpha L$. On a donc la proposition

18.2 ***R*** *est un espace* ($\mathfrak{L}$) *linéaire.*

On a de plus sans peine la proposition

18.3 *Si* $F_n \to F$, $G_n \to G$, *on a* $F_n G_n \to FG$.

19. Continuité de $L[\lambda]^{-1}$ par rapport à λ. Si λ n'est pas une valeur propre, on peut définir l'endomorphisme inverse $L[\lambda]^{-1}$ de $L[\lambda]$. D'après la proposition 16.1, $L[\lambda]^{-1}$ est un endomorphisme continu. Par suite, si V est un voisinage, il existe un voisinage dont l'image par $L[\lambda]^{-1}$ est contenue dans V. Ceci montre que $L[\lambda]\{V\}$ contient o comme point intérieur.

D'une manière plus générale, on a la proposition

19.1 *Si Λ est un ensemble fermé et borné qui ne contient aucune valeur propre de K, et si V est un voisinage, l'ensemble*

$$W = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} L[\lambda]\{V\}$$

contient o comme point intérieur.

K étant complètement continu, on peut supposer $K\{V\}$ compact. Si o n'était pas intérieur à W, on pourrait trouver une suite $\{b_n\}$ telle que $b_n \to o$, $b_n \notin W$. Il existrait alors une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $\lambda_n \in \Lambda$, $b_n \notin (I - \lambda_n K)\{V\}$. On pourrait supposer de plus, sans perdre la généralité, que $\lambda_n \to \lambda \in \Lambda$. Posons

$$\tau_n = \sup\{\tau > 0;\ \rho b_n \in (I - \lambda_n K)\{V\} \text{ pour } 0 < \rho < \tau\}.$$

o étant intérieur à $(I - \lambda_n K)\{V\}$, τ_n est positif. b_n n'appartenant pas à $(I - \lambda_n K)\{V\}$, τ_n est au plus égal à 1.

On pourrait prendre une suite $\{\varepsilon_n\}$ telle que $0 < \varepsilon_n < \tau_n$, $\dfrac{\tau_n + \varepsilon_n}{\tau_n - \varepsilon_n} \to 1$. Si $0 < \tau_n - \sigma_n < \varepsilon_n$, $\sigma_n b_n$ appartiendrait à $(I - \lambda_n K)\{V\}$ et on pourrait écrire $\sigma_n b_n = (I - \lambda_n K) a_n$, $a_n \in V$. On pourrait supposer, sans perdre la généralité, que $Ka_n \to a'$. Puisque $\sigma_n b_n \to o$, $\lambda_n K a_n \to \lambda a'$, on aurait $a_n \to \lambda a'$, et ensuite $\lambda a' = \lambda K(\lambda a')$. λ n'étant pas une valeur propre, on devrait avoir $\lambda a' = o$ et $a_n \to o$.

D'autre part, on pourrait définir $\{\sigma_n'\}$ de manière que $0 < \sigma_n' - \tau_n < \varepsilon_n$, $\sigma_n' b_n \notin (I - \lambda_n K)\{V\}$. On aurait alors

$$\sigma_n' b_n = (I - \lambda_n K)\left(\frac{\sigma_n'}{\sigma_n} a_n\right), \qquad \frac{\sigma_n'}{\sigma_n} a_n \notin V,$$

et la suite $\left\{\dfrac{\sigma_n'}{\sigma_n} a_n\right\}$ ne pourrait converger vers o.

Or, $a_n \to o$, $\dfrac{\sigma_n'}{\sigma_n} \to 1$ entraîneraient $\dfrac{\sigma_n'}{\sigma_n} a_n \to o$. On aurait donc une contradiction.

19.2 *$L[\lambda]^{-1}$ considéré comme fonction de λ est continu dans le domaine ne contenant aucune valeur propre de K.*

Supposons $\lambda_n \to \lambda$, $x_n \to x$ et posons $y_n = L[\lambda_n]^{-1}x_n$, $y = L[\lambda]^{-1}x$, λ et λ_n n'étant pas de valeurs propres. Il est à démontrer $y_n \to y$. Pour cela, il suffit de montrer que, en posant $z_n = L[\lambda_n]^{-1}x$, on a $y_n - z_n \to o$, $z_n \to y$.

Soit Λ l'ensemble formé de λ et de λ_n $(n=1, 2, \cdots)$. D'après la proposition 19.1, l'ensemble W peut être considéré comme un voisinage de o, et l'on a $L[\lambda_n]^{-1}\{W\} \subseteq V$. On a $x_n - x \in W$ pour presque tous les n. On a donc $y_n - z_n \in V$. V étant arbitraire, on a $y_n - z_n \to o$.

Pour démontrer $z_n \to y$, nous supposons d'abord $x \in W$. z_n appartient alors à V. Soit $\{z_n'\}$ une suite partielle quelconque de $\{z_n\}$. On peut extraire de la suite $\{Kz_n'\}$ une suite partielle convergente $\{Kz_n''\}$. Puisque $x = z_n - \lambda_n K z_n$, la suite $\{z_n''\}$ est aussi convergente. Soit b sa limite. On a alors $x = b - \lambda K b$. λ n'étant pas une valeur propre, b coïncide avec y et l'on a $z_n \to y$.

Si x n'appartient pas à W, on prend $\sigma \neq 0$ de manière que $\sigma x \in W$. Puisque $\sigma z_n = L[\lambda_n]^{-1}(\sigma x)$, $\sigma y = L[\lambda]^{-1}(\sigma x)$, on a $\sigma z_n \to \sigma y$, d'où $z_n \to y$.

20. Dérivées de $L[\lambda]^{-1}$. Démontrons d'abord la proposition

20.1 *Si les $G[\lambda]$ sont permutables entre eux et si la dérivée $G'[\lambda]$ existe, $G[\rho]$ et $G'[\lambda]$ sont permutables et la dérivée de $G[\lambda]^m$ est égale à $mG'[\lambda]G[\lambda]^{m-1}$.*

En effet, on a, d'après la permutablité,

$$\frac{G[\lambda'] - G[\lambda]}{\lambda' - \lambda} G[\rho] = G[\rho] \frac{G[\lambda'] - G[\lambda]}{\lambda' - \lambda} .$$

En y faisant $\lambda' \to \lambda$, on obtient

$$G'[\lambda]G[\rho] = G[\rho]G'[\lambda] .$$

Puis

$$\frac{G[\lambda']^m - G[\lambda]^m}{\lambda' - \lambda} = \frac{G[\lambda'] - G[\lambda]}{\lambda' - \lambda} (G[\lambda']^{m-1} + G[\lambda']^{m-2}G[\lambda] + \cdots + G[\lambda]^{m-1}) .$$

Si l'on y fait $\lambda' \to \lambda$, le second membre converge vers $mG'[\lambda]G[\lambda]^{m-1}$. Par suite $G[\lambda]^m$ est dérivable et la dérivée est égale à $mG'[\lambda]G[\lambda]^{m-1}$.

Considérons en particulier $L[\lambda]^{-1}$. On a d'abord

$$L[\lambda] - L[\lambda'] = (\lambda' - \lambda)K .$$

En multipliant $L[\lambda]^{-1}L[\lambda']^{-1}$ aux deux membres, on obtient

$$L[\lambda']^{-1} - L[\lambda]^{-1} = (\lambda' - \lambda) K L[\lambda]^{-1} L[\lambda']^{-1} .$$

En divisant les deux membres par $\lambda' - \lambda$ et en faisant $\lambda' \to \lambda$, on obtient, d'après la continuité de $L[\lambda]^{-1}$,

$$\frac{d}{d\lambda} L[\lambda]^{-1} = K L[\lambda]^{-2} .$$

Puis, en appliquant la proposition 20.1, on obtient la proposition

20.2 *Pour les valeurs non propres de λ, on a*

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} L[\lambda]^{-1} = m!\, K^m L[\lambda]^{-m-1}\,.$$

21. Développement de $L[\lambda]^{-1}$ en série de Maclaurin. On a d'abord la proposition

21.1 *Si* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|} = \alpha$ *est assez petit, on a* $\alpha_k K^k \to O$.

$K\{V\}$ étant compact, le nombre ρ_0 défini par

$$\rho_0 = \sup\{\rho > 0\,;\ \tau K\{V\} \subseteqq V \text{ pour } |\tau| < \rho\}$$

est certainement positif. Nous allons montrer que si $\alpha < \rho_0$, on a $\alpha_k K^k \to O$. Pour cela, il suffit de montrer $\alpha_k K^k x \to o$ et $\alpha_k K^k(x_k - x) \to o$ pour $x_k \to x$.

Prenons un nombre ρ tel que $\alpha < \rho < \rho_0$ et un entier N tel que $\sqrt[k]{|\alpha_k|} < \rho$ pour $k \geqq N$. Posons $\beta_k = \sqrt[k]{\alpha_k}$. Si $x \in V$, $\rho^{k-1} K^{k-1} x$ appartient à V pour $k \geqq 1$. Par suite $\rho^{k-1} K^k x$ appartient à l'ensemble compact $K\{V\}$.

Or on a

$$\alpha_k K^k x = \rho(\beta_k/\rho)^k \cdot \rho^{k-1} K^k x\,.$$

La suite $\{\rho(\beta_k/\rho)^k\}$ converge vers 0 et la suite $\{\rho^{k-1} K^k x\}$ est bornée. La suite $\{\alpha_k K^k x\}$ converge donc vers o.

Si $x \notin V$, on considère le point $\sigma x \in V$ $(\sigma \neq 0)$. On a alors $\alpha_k K^k(\sigma x) \to o$, d'où $\alpha_k K^k x \to o$.

On peut montrer de même la convergence $\alpha_k K^k(x_k - x) \to o$, car on a $x_k - x \in V$ pour presque tous les k.

On peut vérifier sans peine l'identité

$$I - \lambda^k K^k = (I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \cdots + \lambda^{k-1} K^{k-1}) L[\lambda]\,.$$

Nous allons en déduire la proposition

21.2 *On a*

$$L[\lambda]^{-1} = I + \lambda K + \cdots + \lambda^k K^k + \cdots$$

pour les valeurs assez petites de λ.

Si λ est assez petite, λ n'est pas une valeur propre et l'on a $\lambda^k K^k \to O$. Considérons une suite $\{x_k\}$ qui converge vers x. Si l'on pose $y_k = L[\lambda]^{-1} x_k$, $y = L[\lambda]^{-1} x$, on a $y_k \to y$ et

$$(I - \lambda^k K^k) y_k = (I + \lambda K + \cdots + \lambda^{k-1} K^{k-1}) x_k\,,$$

d'où

$$(I + \lambda K + \cdots + \lambda^{k-1} K^{k-1}) x_k \to y = L[\lambda]^{-1} x\,.$$

Le développement trouvé ici est justement la série de Maclaurin pour $L[\lambda]^{-1}$, c'est ce que l'on voit immédiatement d'après la proposition 20.2.

22. Développement de $L[\rho]^{-1}$ en séries de Taylor et de Laurent. Soit λ une valeur non propre. On vérifie sans peine

$$L[\rho] = L[\lambda] - (\rho - \lambda) K = (I - (\rho - \lambda) K L[\lambda]^{-1}) L[\lambda]\,.$$

$L[\lambda]^{-1}$ étant un endomorphisme continu, $KL[\lambda]^{-1}$ est un endomorphime complètement continu. On a donc le développement

$$(I-(\rho-\lambda)KL[\lambda]^{-1})^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\rho-\lambda)^k K^k L[\lambda]^{-k}$$

pour les valeurs ρ assez proches de λ. On en déduit la proposition

22.1 *Si λ est une valeur non propre d'un endomorphisme complètement continu K, on a le développement*

$$L[\rho]^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\rho-\lambda)^k K^k L[\lambda]^{-k-1}$$

pour les valeurs ρ assez voisines de λ.

En remarquant la proposition 20.2, on voit que c'est justement le développement de Taylor en λ pour $L[\rho]^{-1}$.

Considérons maintenant le cas où λ est une valeur propre. $\mathfrak{R}$ est la somme directe de $N^{\infty}[\lambda]$ et de $N_{\infty}[\lambda]$. Pour l'endomorphisme K restreint à $N_{\infty}[\lambda]$, λ n'est pas une valeur propre. On a donc le développement ci-dessus dans $N_{\infty}[\lambda]$. dim $N^{\infty}[\lambda]$ étant finie, on sait que l'on a le développement

$$L[\rho]^{-1}=\sum_{k=-1}^{-r}(\rho-\lambda)^k A_k \qquad (r=\mu[\lambda]=\nu[\lambda])$$

dans $N^{\infty}[\lambda]$, A_k étant un endomorphisme de $N^{\infty}[\lambda]$. Un point quelconque x de $\mathfrak{R}$ peut s'écrire d'une seule manière comme la somme $x=x'+x''$ d'un point x' de $N^{\infty}[\lambda]$ et d'un point x'' de $N_{\infty}[\lambda]$. On peut étendre le domaine de A_k $(k<0)$ à l'espace entier par $A_k x=A_k x'$. D'autre part, si l'on définit les endomorphismes A_k $(k\geqq 0)$ par

$$A_k x=K^k L[\lambda]^{-k-1}x'',$$

on obtient le développement

$$L[\rho]^{-1}=\sum_{k=-r}^{\infty}(\rho-\lambda)^k A_k .$$

C'est le développement de Laurent en λ pour $L[\rho]^{-1}$. On a donc la proposition

22.2 *Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme complètement continu K, on a le développement de Laurent en λ pour $L[\lambda]^{-1}$ qui est valable pour les valeurs ρ $(\neq\lambda)$ assez proches de λ.*

V. Endomorphismes à deux côtés.

23. Convergence faible. Soient $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$ des espaces vectoriels sur le corps de nombres complexes. Nous suposerons que le produit d'un nombre et d'un élément de $\mathfrak{R}$ ou de $\mathfrak{R}^*$ est permutable. Les éléments de ces espaces sont encore appelés points. Nous dirons que les espaces $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$ sont *en dualité*, quand le produit u^*x d'un point u^* de $\mathfrak{R}^*$ et d'un point x de $\mathfrak{R}$ est défini de manière que l'on ait les propriétés suivantes:

1° u^*x est une fonctionnelle linéaire dans chacun des espaces $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$;

2° $u^* = o^*$ si $u^*x = 0$ pour tous les $x \in \mathfrak{R}$; et $x = o$ si $u^*x = 0$ pour tous les $u^* \in \mathfrak{R}$.

Nous dirons qu'une suite de points $\{x_k\}$ *converge faiblement* vers x si l'on a $u^*x_k \to u^*x$ pour tous les $u^* \in \mathfrak{R}^*$. Dans ce cas nous écrirons $x_k \to x$ (faiblement). On définira de même la convergence faible d'une suite de points dans $\mathfrak{R}^*$.

23.1 *La convergence faible définit une topologie par laquelle $\mathfrak{R}$ devient un espace ($\mathfrak{L}$) linéaire*[1].

En effet, si $x_k = x$, la suite $\{x_k\}$ converge faiblement vers x; une suite partielle d'une suite qui converge faiblement vers un point x converge faiblement vers x; et enfin une suite qui converge faiblement vers x ne converge pas vers un point différent de x. $\mathfrak{R}$ est donc un espace ($\mathfrak{L}$) de Fréchet.

Si l'on a $x_k \to x$ (faiblement) et $y_k \to y$ (faiblement), on a

$$u^*x_k \to u^*x\,, \qquad u^*y_k \to u^*y\,,$$

d'où

$$u^*(x_k + y_k) = u^*x_k + u^*y_k \to u^*x + u^*y = u^*(x+y)\,.$$

Donc $x_k + y_k \to x + y$ (faiblement).

Si l'on a $x_k \to x$ (faiblement) et $\alpha_k \to \alpha$, on a

$$u^*(\alpha_k x_k) = \alpha_k(u^*x_k) \to \alpha(u^*x) = u^*(\alpha x)\,.$$

Donc $\alpha_k x_k \to \alpha x$ (faiblement).

Nous appellerons *topologie faible* la topologie définie par la convergence faible.

Désignons par V_{u^*}, ${}_xV^*$ les ensembles polaires de u^* et de x définis par

$$V_{u^*} = \{x \in \mathfrak{R}\,;\ |u^*x| < 1\}, \qquad {}_xV^* = \{u^* \in \mathfrak{R}^*\,;\ |u^*x| < 1\}\,.$$

D'une manière générale, l'ensemble polaire ${}_EV^*$ d'une partie E de $\mathfrak{R}$ est l'ensemble

$${}_EV^* = \{u^* \in \mathfrak{R}^*\,;\ |u^*x| < 1 \text{ pour } x \in E\}\,.$$

On définit de même l'ensemble polaire V_{E^*} d'une partie E^* de $\mathfrak{R}^*$.

Il est évident que si $x_k \to o$ (faiblement) on a $x_k \in V_{u^*}$ pour presque tous les k.

Supposons que l'on ait $x_k \in V_{u^*}$ pour presque tous les k, u^* désignant un élément arbitraire de $\mathfrak{R}^*$. On a alors $|u^*x_k| < 1$ pour presque tous les k. Si l'on remplace u^* par $\varepsilon^{-1}u^*$, on a $|u^*x_k| < \varepsilon$. Par suite $u^*x_k \to 0$ quel que soit $u^* \in \mathfrak{R}^*$. Ceci montre que la suite $\{x_k\}$ converge faiblement vers o.

On a donc la proposition

23.2 *Pour qu'une suite $\{x_k\}$ converge faiblement vers un point x, il faut et il suffit que, quel que soit $u^* \in \mathfrak{R}^*$, on ait $x_k \in V_{u^*}x$ pour presque tous les k.*

1) Il serait évident que l'on peut permuter les rôles de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{R}^*$ dans les propositions concernant les espaces $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$.

Nous supposons que $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$ sont munis préalablement de topologies $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}^*$ par lesquelles ils deviennent des espaces ($\mathfrak{L}$) linéaires. Pour les distinguer des topologies faibles, nous les appellerons topologies initiales. Nous supposerons que le produit intérieur u^* est une fonctionnelle linéaire continue par rapport à chacune des topologies initiales. Si une suite $\{x_k\}$ converge vers x par rapport à la topologie $\mathfrak{T}$, nous dirons que la suite $\{x_k\}$ converge vers x et écrirons $x_k \to x$. De même, ${}_ku^* \to u^*$ signifie que la suite $\{{}_ku^*\}$ converge vers u^* par rapport à la topologie $\mathfrak{T}^*$. Il est clair que l'on a la proposition

23.3 *$x_k \to x$ entraîne $x_k \to x$ (faiblement), de sorte que la topologie faible est moins fine que la topologie initiale.*

On en déduit la proposition

23.4 *Un ensemble fermé par rapport à la topologie faible est fermé par rapport à la topologie initiale.*

24. Orthogonalité. Nous dirons que x et u^* sont orthogonaux et écrirons $x \perp u^*$ si $u^*x=0$. Si l'on a $u^*x=0$ pour $x \in A$, $u^* \in B^*$, nous dirons que A et B^* sont orthogonaux et écrirons $A \perp B^*$. Dans le cas où A, par example, ne contient qu'un seul élément a, nous dirons que a est orthogonal à B^* et écrirons $a \perp B^*$.

L'ensemble de tous les éléments $x \in \mathfrak{R}$ qui sont orthogonaux à B^* sera désigné par $B_{\perp}{}^*$ et l'ensemble de tous les éléments $u^* \in \mathfrak{R}^*$ qui sont orthogonaux à A sera désigné par ${}_{\perp}A$. ${}_{\perp}A$ et $B_{\perp}{}^*$ sont toujours des sous-espaces de $\mathfrak{R}^*$ et de $\mathfrak{R}$ respectivement. Nous désignerons, comme dans mon article antérieur, par $\tilde{A}$, $\tilde{B}^*$ les sous-espaces $\tilde{A}=\{{}_{\perp}A\}_{\perp}$, $\tilde{B}^*={}_{\perp}\{B_{\perp}{}^*\}$.

24.1 *${}_{\perp}A$ est fermé par rapport à la topologie faible.*

En effet, si ${}_ku^* \perp A$, ${}_ku^* \to u^*$ (faiblement), on a

$$ {}_ku^*x=0\,, \qquad {}_ku^*x \to u^*x $$

pour $x \in A$, d'où $u^* \perp A$.

L'inclusion $\tilde{A} \supseteq A$ est évidente.

A étant faiblement fermé, l'égalité $\tilde{A}=A$ exige que A soit faiblement fermé.

Nous avons déjà démontré les propositions suivantes.

24.2 *Si* $\dim A<\infty$, *on a* $\operatorname{codim} {}_{\perp}A = \dim A$, $\tilde{A}=A$. *Si* $\operatorname{codim} B<\infty$, *on a* $\dim {}_{\perp}B \leqq \operatorname{codim} B$.

24.3 *Si l'on a* $\tilde{A}=A$, $\dim B<\infty$, $C=A\oplus B$, *on a* $\tilde{C}=C$.

25. Endomorphismes à deux côtés. L'opérateur linéaire L qui fait correspondre à chaque $x \in \mathfrak{R}$ un élément Lx de $\mathfrak{R}$ est dit *endomorphisme à gauche.* L'opérateur linéaire L qui fait correspondre à chaque $u^* \in \mathfrak{R}^*$ un élément u^*L de $\mathfrak{R}^*$ est dit *endomorphisme à droite.* Si L est un endomorphisme à gauche et à droite satisfaisant à la relation $u^*(Lx)=(u^*L)x$, il est appelé *endomorphisme à deux côtés* des espaces en dualité $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*)$.

Un endomorphisme à deux côtés est dit continu s'il est continu dans $\mathfrak{R}$ ainsi que dans $\mathfrak{R}^*$ par rapport à la topologie initiale. Un endomorphisme à gauche est dit faiblement continu si $x_k \to x$ (faiblement) entraîne $Lx_k \to Lx$ (faiblement). On définit de même la continuité faible d'un endomorphisme à droite. Un endomorphisme à deux côtés est faiblement continu s'il est faiblement continu dans $\mathfrak{R}$ ainsi que dans $\mathfrak{R}^*$.

25.1 *Tout endomorphisme à deux côtés est toujours faiblement continu.*

En effet, considérons une suite $\{x_k\}$ qui converge faiblement vers x. Si L est un endomorphisme à deux côtés, on a

$$u^*(Lx_k)=(u^*L)x_k \to (u^*L)x=u^*(Lx)$$

quel que soit $u^* \in \mathfrak{R}^*$. La suite $\{Lx_k\}$ converge donc faiblement vers Lx.

On peut définir la somme L_1+L_2 et le produit L_1L_2 de deux endomorphismes à deux côtés L_1 et L_2 et les produits λL et $L\lambda$ d'un nombre λ et d'un endomorphisme L par les formules

$$\begin{aligned} (L_1+L_2)x &= L_1x+L_2x\,, & u^*(L_1+L_2) &= u^*L_1+u^*L_2\,,\\ (L_1L_2)x &= L_1(L_2x)\,, & u^*(L_1L_2) &= (u^*L_1)L_2\,,\\ (\lambda L)x &= \lambda(Lx)\,, & u^*(\lambda L) &= (u^*\lambda)L\,,\\ (L\lambda)x &= L(\lambda x)\,, & u^*(L\lambda) &= (u^*L)\lambda\,. \end{aligned}$$

L_1+L_2, L_1L_2, λL et $L\lambda$ ainsi définis sont des endomorphismes à deux côtés. Ils sont continus si L_1, L_2 et L le sont. L_1+L_2 est complètement continu si L_1 et L_2 le sont. λL coïncide avec $L\lambda$; il est complètement continu si L l'est. L_1L_2 est complètement continu si l'un des endomorphismes L_1 et L_2 l'est, l'autre étant continu.

Supposons que L est un endomorphisme à deux côtés. Si l'on peut définir l'endomorphisme inverse L^{-1} dans $\mathfrak{R}$ ainsi que dans $\mathfrak{R}^*$, on a, en posant $y=Lx$, $v^*=u^*L$,

$$(v^*L^{-1})y=u^*(Lx)=(u^*L)x=v^*(L^{-1}y)\,.$$

On a donc la proposition

25.2 *Si un endomorphisme à deux côtés L admet son inverse L^{-1} dans $\mathfrak{R}$ ainsi que dans $\mathfrak{R}^*$, L^{-1} est un endomorphisme à deux côtés.*

26. Espaces des endomorphismes à deux côtés. Soit $\boldsymbol{C}$ l'ensemble de tous les endomorphismes continus à deux côtés. Il est un anneau sur le corps de nombres complexes. Nous dirons qu'une suite $\{L_k\}$ dans $\boldsymbol{C}$ converge vers $L \in \boldsymbol{C}$ et écrirons $L_k \to L$ si $x_k \to x$, ${}_ku^* \to u^*$ entraînent $L_kx_k \to Lx$, ${}_ku^*L_k \to u^*L$. On obtiendra alors comme au paragraphe 18 la proposition

26.1 *L'espace* $\boldsymbol{C}$ *est un espace* ($\mathfrak{L}$) *linéaire où* $F_k \to F$, $G_k \to G$ *entraînent* $F_k G_k \to FG$.

Soit $\boldsymbol{R}$ l'ensemble de tous les endomorphismes à deux côtés. Il est un anneau sur le corps de nombres complexes. Nous dirons qu'une suite $\{L_k\}$ dans $\boldsymbol{R}$ converge faiblement vers $L \in \mathfrak{R}$ et écrirons $L_k \to L$ (faiblement), si l'on a $u^* L_k x \to u^* L x$ quels que soient $x \in \mathfrak{R}$ et $u^* \in \mathfrak{R}^*$.

Pour distinguer la topologie définie plus haut de $\boldsymbol{C}$ et la topologie induite sur $\boldsymbol{C}$ par celle de $\boldsymbol{R}$, nous les appellerons respectivement *topologie initiale* et *topologie faible*.

26.2 $L_k \to L$ *entraîne* $L_k \to L$ (faiblement).

En effet, $L_k \to L$ entraîne $L_k x \to Lx$. Puis on a $u^* L_k x \to u^* L x$.

Il est clair que si $L_k = L$, la suite $\{L_k\}$ converge faiblement vers L et qu'une suite partielle d'une suite qui converge faiblement vers L converge faiblement vers L.

Supposons maintenant $L_k \to L \neq L'$ (faiblement). Il existe un point x tel que $Lx \neq L'x$. Il existe alors un point $u^* \in \mathfrak{R}^*$ tel que $u^* L x \neq u^* L' x$. Alors la suite $\{u^* L_k x\}$ ne converge pas vers $u^* L' x$.

L'espace $\boldsymbol{R}$ muni de la topologie faible est donc un espace ($\mathfrak{L}$) de Fréchet.

Considérons deux suites $\{F_k\}$, $\{G_k\}$ qui convergent faiblement vers F, G respectivement. On a $u^* F_k x \to u^* F x$, $u^* G_k x \to u^* G x$ et puis

$$u^*(F_k + G_k)x = u^* F_k x + u^* G_k x \to u^* F x + u^* G x = u^*(F+G)x .$$

La suite $\{F_k + G_k\}$ converge donc faiblement vers $F+G$.

Considérons en outre une suite de nombres $\{\alpha_k\}$ convergeant vers α. On a alors

$$u^*(\alpha_k F_k)x = \alpha_k (u^* F_k x) \to \alpha (u^* F x) = u^*(\alpha F)x ,$$

de sorte que $\alpha_k F_k \to \alpha F$ (faiblement). On a donc la proposition

26.3 *L'espace* $\boldsymbol{R}$ *muni de la topologie définie par la convergence faible est un espace* ($\mathfrak{L}$) *linéaire.*

27. Endomorphismes complètement continus à deux côtés.

Soit K un endomorhisme complètement continu à deux côtés des espaces en dualité $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*)$. Nous définissons les sous-espaces ${}^n N^*$, ${}_n N^*$ et les entiers μ^*, ν^* par les formules

$$ {}^n N^* = \{o^*\} L^{-n} , \qquad {}_n N^* = \{\boldsymbol{R}^*\} L^n ,$$
$$ \mu^* = \inf \{n ;\ {}^n N^* = {}^{n+1} N^*\}, \qquad \nu^* = \inf \{n ;\ {}_n N^* = {}_{n+1} N^*\} ,$$

où $L = I - K$. Les résultats de la section III sont applicables à l'endomorphisme à droite L. On a donc $\mu^* = \nu^* < \infty$. Alors les résultats de notre mémoire antérieur montrent que l'on a la proposition

27.1 *Si* $L = I - K$ *est un endomorphisme tel que* K *soit complètement continu, on a*

$$\mu^* = \nu^* = \mu = \nu < \infty\,, \qquad N^\mu \oplus N_\nu = \boldsymbol{R}\,, \qquad {}^\nu N^* \oplus {}_\mu N^* = \boldsymbol{R}^*\,,$$
$$\dim {}^n N^* = \operatorname{codim} {}_n N^* = \dim N^n = \operatorname{codim} N_n\,,$$
$$N_n = {}^n N_\perp{}^*\,, \qquad N^n = {}_n N_\perp{}^*\,, \qquad {}_n N^* = {}_\perp N^n\,, \qquad {}^n N^* = {}_\perp N_n\,,$$
$$\tilde{N}^n = N^n\,, \qquad \tilde{N}_n = N_n\,, \qquad {}^n\tilde{N}^* = {}^n N^*\,, \qquad {}_n\tilde{N}^* = {}_n N^*\,.$$

En particulier, il résulte de la relation ${}^1N_\perp{}^* = N_1$ le théorème alterné de Fredholm :

Pour que l'équation en x: $Lx = y$ admette une solution, il faut et il suffit que y soit orthogonal à toutes les solutions u^* de l'équation associée $u^*L = o^*$.

28. Décomposition de l'endomorphisme complètement continu. ab^* est l'endomorphisme défini par

$$(ab^*)x = a(b^*x)\,, \qquad u^*(ab^*) = (u^*a)b^*\,.$$

On peut vérifier sans peine la proposition

28.1 *Une combinaison linéaire de $a_j \cdot {}_jb^*$ ($j = 1, 2, \cdots, n$), où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ d'une part et ${}_1b^*, {}_2b^*, \cdots, {}_nb^*$ d'autre part sont linéairement indépendants, est un endomorphisme à deux côtés K caractérisé par la propriété suivante:*

Soient A le sous-espace engendré par $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et B^* le sous-espace engendré par ${}_1b^*, {}_2b^*, \cdots, {}_nb^*$. K fait correspondre chacun de A et de B^* en lui-même d'une manière biunivoque et s'annule dans ${}_\perp A$ et $B_\perp{}^*$.

Puisque l'on a

$$N^\mu \oplus N_\nu = \boldsymbol{R}\,, \qquad {}^\nu N^* \oplus {}_\mu N^* = \boldsymbol{R}^* \quad (\mu = \nu)\,,$$

on peut écrire d'une seule manière

$$x = x' + x'' \qquad (x' \in N^\mu\,,\ x'' \in N_\nu)\,,$$
$$u^* = {}'u^* + {}''u^* \qquad ({}'u^* \in {}^\nu N^*\,,\ {}''u^* \in {}_\mu N^*)\,.$$

Posons ensuite

$$K'x = Kx'\,, \qquad u^*K' = {}'u^*K\,,$$
$$K''x = Kx''\,, \qquad u^*K'' = {}''u^*K\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u^*(K'x) &= u^*(Kx') = (u^*K)x' = ({}'u^*K + {}''u^*K)x' \\ &= ({}'u^*K)x' = ({}'u^*K)x = (u^*K')x\,, \\ u^*(K''x) &= u^*(Kx'') = (u^*K)x'' = ({}'u^*K + {}''u^*K)x'' \\ &= ({}''u^*K)x'' = ({}''u^*K)x = (u^*K'')x\,, \end{aligned}$$

de sorte que K' et K'' sont des endomorphismes à deux côtés. K' s'annule dans chacun des sous-espaces N_ν et ${}_\mu N^*$ et fait correspondre chacun des sous-espaces N^μ et ${}^\nu N^*$ en lui-même d'une manière biunivoque. On peut donc écrire

$$K' = a_1 \cdot {}_1b^* + a_2 \cdot {}_2b^* + \cdots + a_n \cdot {}_nb^*\,, \tag{28.1}$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des points linéairement indépendants de A et ${}_1b^*, {}_2b^*, \cdots, {}_nb^*$ des points linéairement indépendants de B^*. K' est donc complètement continu. K'' étant la différence de K et de K', il est aussi complètement continu. Pour lui, 1 n'est pas une valeur propre.

Si l'on désigne par ${}_1a^*, {}_2a^*, \cdots, {}_na^*$ les points de B^* tels que ${}_ja^*a_k=\delta_{jk}$ $(j, k=1, 2, \cdots, n)$, on voit sans peine que l'on a ${}_ja^*K={}_jb^*$ $(j=1, 2, \cdots, n)$. On a aussi immédiatement

$$K^{-1}=b_1\cdot{}_1a^*+b_2\cdot{}_2a^*+\cdots+b_n\cdot{}_na^* \tag{28.2}$$

dans A et B, où $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sont les points de A tels que ${}_jb^*b_k=\delta_{jk}$ $(j, k=1, 2, \cdots, n)$.

Si $\mu=1$, on a $x=Kx$ pour $x\in N^\mu$. Par suite $a_j=Kb_j=b_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$. On a par suite

$$K'=a_1\cdot{}_1a^*+a_2\cdot{}_2a^*+\cdots+a_n\cdot{}_na^*. \tag{28.3}$$

Dans le cas général, on a, comme nous avons démontré,

$$N^m=N_0^m \oplus\cdots\oplus N_{\mu-m}^m \oplus N^{m-1}, \qquad L\{N_j^m\}=N_{j+1}^{m-1},$$
$${}^mN^*={}_0^mN^*\oplus\cdots\oplus{}_{\mu-m}^mN^*\oplus{}^{m-1}N^*, \qquad \{{}_j^mN^*\}L={}_{j+1}^{m-1}N^*;$$

N_p^j et ${}_q^kN^*$ sont en dualité pour $j=q+1$, $k=p+1$ et orthogonaux dans les autres cas. Soit $\{a_p^m; p=1, 2, \cdots, r_m\}$ une base de N_0^m. $\{L^{m-1}a_p^m; p=1, 2, \cdots, r_m\}$ est une base de N_{m-1}^1 et, ${}_0^mN^*$ et N_{m-1}^1 étant en dualité, on peut prendre les r_m points ${}_p^ma^*\in{}_0^mN^*$ $(p=1, 2, \cdots, r_m)$ tels que

$${}_p^ma^*L^{m-1}a_q^m=\delta_{pq} \qquad (p, q=1, 2, \cdots, r_m). \tag{28.4}$$

On a alors

$$L=\sum_{m=2}^{\mu}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}L^ja_p^m\cdot{}_p^ma^*L^{m-j} \tag{28.5}$$

dans N^μ et ${}^\nu N^*$. On a donc

$$\begin{aligned} K'&=\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}L^ja_p^m\cdot{}_p^ma^*L^{m-j-1} \\ &\qquad -\sum_{m=2}^{\mu}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}L^ja_p^m\cdot{}_p^ma^*L^{m-j} \\ &=\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}L^ja_p^m\cdot{}_p^ma^*L^{m-j-1}K \\ &=\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_m}KL^{j-1}a_p^m\cdot{}_p^ma^*L^{m-j}. \end{aligned} \tag{28.6}$$

29. Construction de $L[\lambda]^{-1}$ dans le voisinage d'une valeur propre. Nous supposons, par exemple, que 1 est une valeur propre. Posons

$$(I-\lambda K')^{-1}=I-\lambda H'[\lambda], \qquad (I-\lambda K'')^{-1}=I-\lambda H''[\lambda]. \tag{29.1}$$

On a

$$I-\lambda H[\lambda]=L[\lambda]^{-1}=(I-\lambda K')^{-1}=I-\lambda H'[\lambda],$$
$$I-\lambda H''[\lambda]=(I-\lambda K'')^{-1}=I$$

dans N^{μ} et ${}^{\nu}N^{*}$, d'où

$$H'[\lambda]=H[\lambda], \qquad H''[\lambda]=O.$$

On a de même

$$H'[\lambda]=O, \qquad H''[\lambda]=H[\lambda]$$

dans N_{ν} et ${}_{\mu}N^{*}$. Par suite

$$H[\lambda]=H'[\lambda]+H''[\lambda].$$

$H''[\lambda]$ étant holomorphe en 1, la partie principale de $H[\lambda]$ est celle de $H'[\lambda]$. Nous allons chercher l'expression explicite de $H'[\lambda]$.

Dans le cas de $\mu=1$, on a

(29.2) $$K'=a_1\cdot{}_1a^{*}+\cdots+a_n\cdot{}_na^{*}$$

et l'on a en particulier $K'=I$ dans N^{μ} et ${}^{\nu}N^{*}$. Par suite, dans N^{μ} et ${}^{\nu}N^{*}$, on a

$$K'=I, \qquad (I-\lambda K')^{-1}=\frac{1}{1-\lambda}I,$$
$$\lambda H'[\lambda]=I-(I-\lambda K')^{-1}=\frac{\lambda}{1-\lambda}I.$$

On a donc la formule

(29.3) $$H'[\lambda]=\frac{1}{\lambda-1}(a_1\cdot{}_1a^{*}+\cdots+a_n\cdot{}_na^{*})$$

valable dans $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}^{*}$.

Considérons le cas général. Dans N^{μ}, on a

$$L[\lambda]^{-1}=-\frac{1}{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\mu-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n}L^{n}.$$

En portant l'expression de L dans cette relation, on trouve

$$H'[\lambda]=\frac{1}{\lambda-1}\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}L^{j}a_p^{m}\cdot{}_p^{m}a^{*}L^{m-j-1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\mu-1}\frac{\lambda^{n-1}}{(\lambda-1)^{n+1}}\sum_{m=n+1}^{\mu}\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}L^{j}a_p^{m}\cdot{}_p^{m}a^{*}L^{m-j+n-1}.$$

Pour obtenir une expression de $H'[\lambda]$ ordonnée suivant les puissances négatives de $\lambda-1$, on remarque que l'on a

$$K+H[\lambda]=\lambda KH[\lambda],$$

d'où l'on déduit

$$H'[\lambda]=\frac{1}{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\mu-1}\frac{1}{(\lambda-1)^{n}}K^{-n}L^{n}.$$

De l'expression déjà trouvée de K, on déduit

$$K^{-1}=\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_m}L^{j-1}a_p^m\cdot{}_p^m a^*(L^{m-j}+\cdots+L^{m-1})$$

$$=\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}(L^j+\cdots+L^{m-1})a_p^m\cdot{}_p^m a^* L^{m-j-1},$$

$$K^{-1}L=\sum_{m=2}^{\mu}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}L^j a_p^m\cdot{}_p^m a^*(L^{m-j}+\cdots+L^{m-1})$$

$$=\sum_{m=2}^{\mu}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}(L^j+\cdots+L^{m-1})a_p^m\cdot{}_p^m a^* L^{m-j}.$$

Si l'on pose

$$b_j=\sum_{l=j}^{m}\binom{l-1}{j-1}L^{l-1}a, \qquad {}_kb^*=\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k-1}{l-1}a^*L^{m-l},$$

on obtient

$$L^{l-1}a=\sum_{j=l}^{m}(-1)^{j-l}\binom{j-1}{l-1}b_j, \qquad a^*L^{m-l}=\sum_{k=1}^{l}\binom{l-1}{k-1}{}_kb^*,$$

en tenant compte de

$$\sum_{l=j}^{k}(-1)^{k-l}\binom{l-1}{j-1}\binom{k-1}{l-1}=\delta_{jk}.$$

Or on a

$$L^j a\cdot a^*(L^{m-j}+\cdots+L^{m-1})$$

$$=\sum_{p=j+1}^{m}(-1)^{p-j-1}\binom{p-1}{j}b_p\sum_{r=1}^{j}\sum_{q=1}^{r}\binom{r-1}{q-1}{}_qb^*$$

$$=\sum_{q=1}^{m}\sum_{p=j+1}^{m}\sum_{r=q}^{j}(-1)^{p-j-1}\binom{p-1}{j}\binom{r-1}{q-1}b_p\cdot{}_qb^*$$

$$=\sum_{q=1}^{m}\sum_{p=j+1}^{m}(-1)^{p-j-1}\binom{p-1}{j}\binom{j}{q}b_p\cdot{}_qb^*.$$

On a par suite

$$\sum_{j=1}^{m-1}L^j a\cdot a^*(L^{m-j}+\cdots+L^{m-1})$$

$$=\sum_{q=1}^{m-1}\sum_{p=2}^{m}\sum_{j=q}^{p+1}(-1)^{p-j-1}\binom{p-1}{j}\binom{j}{q}b_p\cdot{}_qb^*=\sum_{q=1}^{m-1}b_{q+1}\cdot{}_qb^*.$$

D'autre part, si l'on a

$$a^*L^k a=\begin{cases}0 & (k\neq m-1),\\ \delta & (k=m-1),\end{cases}$$

on a

$${}_kb^*b_j=\sum_{l=j}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k-1}{l-1}\binom{l-1}{j-1}a^*L^{m-1}a=\begin{cases}0 & (j\neq k),\\ \delta & (j=k)\end{cases}$$

Par conséquent, si l'on pose

$$(29.4)\qquad b_{pj}^{m}=\sum_{l=j}^{m}\binom{l-1}{j-1}L^{l-1}a_{p}^{m}, \qquad {}_{kq}^{n}b^{*}=\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k-1}{l-1}{}_{q}^{n}a^{*}L^{n-l},$$

on obtient

$$(29.5)\qquad {}_{kq}^{n}b^{*}b_{pj}^{m}=\delta_{mn}\delta_{pq}\delta_{jk},$$

et

$$K^{-1}L=\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{r_m}b_{p,j+1}^{m}\cdot{}_{jp}^{m}b^{*},$$

$$K^{-n}L^{n}=\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{m-n}\sum_{p=1}^{r_m}b_{p,j+n}^{m}\cdot{}_{jp}^{m}b^{*}.$$

On a donc enfin

$$(29.6)\qquad H'[\lambda]=\sum_{n=0}^{\mu-1}\frac{1}{(\lambda-1)^{n+1}}\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{m-n}\sum_{p=1}^{r_m}b_{p,j+n}^{m}\cdot{}_{jp}^{m}b^{*}.$$

Le cas où α est une valeur propre peut se ramener au cas étudié, en remplaçant K par αK. On obtient ainsi

$$H'[\lambda]=\sum_{n=0}^{\mu-1}\frac{1}{(\lambda-\alpha)^{n+1}}\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{m-n}\sum_{p=1}^{r_m}b_{p,j+n}^{m}\cdot{}_{jp}^{m}b^{*}$$

dans le voisinage de α. La définition des points b_{pj}^{m} et ${}_{kq}^{n}b^{*}$ devient

$$b_{pj}^{m}=\sum_{l=j}^{m}\binom{l-1}{j-1}L[\alpha]^{l-1}a_{p}^{m},$$

$${}_{kq}^{n}b^{*}=\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k-1}{l-1}{}_{q}^{n}a^{*}L[\alpha]^{n-l}.$$

En particulier, dans le cas de $\mu[\alpha]=1$, on a

$$H'[\alpha]=\frac{1}{\lambda-\alpha}(a_1\cdot{}_1a^{*}+\cdots+a_n\cdot{}_na^{*}).$$