Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre.

Par Yasutaka SIBUYA.

Introduction.

1. Considérons les équations différentielles ordinaires linéaires

(1.1) $$\varepsilon^{\sigma} d\vec{y}/dx = A(x, \varepsilon)\vec{y},$$

où σ est un entier positif, $\vec{y}$ un vecteur à n composants complexes et $A(x, \varepsilon)$ une matrice carrée, holomorphe par rapport à une variable complexe x et à un paramètre complexe ε pour

(1.2) $$|x| < \delta_0, \quad 0 < |\varepsilon| < \rho_0, \quad |\arg \varepsilon| < \alpha_0, \quad (\delta_0, \rho_0, \alpha_0 > 0),\text{ (1)}$$

et développable asymptotiquement en série

(1.3) $$A(x, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(x)\varepsilon^\nu \text{ (2)}$$

dans le domaine (1.2) pour $\varepsilon \to 0$, les $A_\nu(x)$ étant holomorphes par rapport à x ($|x| < \delta_0$).

2. Soit $P(x, \varepsilon)$ une matrice carrée à n dimensions, holomorphe par rapport à x, ε pour

(2.1) $$|x| < \delta, \quad 0 < |\varepsilon| < \rho, \quad |\arg \varepsilon| < \alpha,$$
$$(0 < \delta \leqq \delta_0, \quad 0 < \rho \leqq \rho_0, \quad 0 < \alpha \leqq \alpha_0),$$

et développable asymptotiquement en série

(2.2) $$P(x, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x)\varepsilon^\nu$$

dans le domaine (2.1) pour $\varepsilon \to 0$, où les $P_\nu(x)$ sont holomorphes par rapport à x ($|x| < \delta$), $P_0(0)$ étant non singulière.

Par le changement de variables

(2.3) $$\vec{y} = P(x, \varepsilon)\vec{z},$$

l'équation (1.1) devient

(2.4) $$\varepsilon^{\sigma} d\vec{z}/dx = B(x, \varepsilon)\vec{z},$$

où la matrice $B(x, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à x, ε pour (2.1) et développable asymptotiquement en série

(1) Un domaine $|x| < \delta_0$, $0 < |\varepsilon| < \rho_0$, $|\arg \varepsilon - \omega| < \alpha_0$ peut être amené à (1.2) en remplaçant ε par $\varepsilon e^{-i\omega}$.

(2) $\simeq$ désigne une égalité asymptotique.

$$(2.5) \qquad B(x, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x)\varepsilon^\nu$$

dans le domaine (2.1) pour $\varepsilon \to 0$, les $B_\nu(x)$ étant holomorphes par rapport à x ($|x|<\delta$).

3. On sait que, *si toutes les valeurs caractéristiques de la matrice*

$$(3.1) \qquad A_{00} = A_0(0)$$

sont différentes les unes des autres, en choisissant le domaine (2.1) *convenablement, on peut déterminer la matrice* $P(x, \varepsilon)$ *de manière que* $B(x, \varepsilon)$ *soit une matrice diagonale. Par conséquent, dans ce cas, on obtient les développements asymptotiques des solutions fondamentales de* (1.1) *dans le domaine* (2.1) *pour* $\varepsilon \to 0$.[3]

Dans ce présent mémoire, nous allons établir un théorème de réduction analytique du système (1.1) pour le cas général, sans aucune restriction sur les valeurs caractéristiques de (3.1).

Supposons d'abord que (3.1) admet s valeurs caractéristiques $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ différentes les unes des autres; soit n_j la multiplicité de λ_j. On aura alors $n = n_1 + \cdots + n_s$.

On peut supposer (3.1) de la forme canonique de Jordan:

$$(3.2) \qquad A_{00} = \begin{bmatrix} \mathring{A}_1, & O, & O, & \cdots, & O, & O \\ O, & \mathring{A}_2, & O, & \cdots, & O, & O \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ O, & O, & O, & \cdots, & O, & \mathring{A}_s \end{bmatrix},$$

où $\mathring{A}_j$ est une matrice carrée à n_j dimensions de la forme

$$(3.3) \qquad \mathring{A}_j = \lambda_j E_{n_j} + D_j \qquad (j = 1, \cdots, s),$$[4]

les éléments de D_j étant nuls sauf les $n_j - 1$ éléments qui se trouvent immédiatement au-dessous de la diagonale principal.[5]

Alors, notre théorème s'énonce comme il suit:

Théorème. *Si l'on choisit le domaine* (2.1) *convenablement, on peut déterminer* $P(x, \varepsilon)$ *de manière que l'on ait*

$$(3.4) \qquad P_0(0) = E,$$

et que $B(x, \varepsilon)$ *soit de la forme*

$$(3.5) \qquad B(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} B_1(x, \varepsilon), & O, & O, & \cdots, & O, & O \\ O, & B_2(x, \varepsilon), & O, & \cdots, & O, & O \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ O, & O, & O, & \cdots, & O, & B_s(x, \varepsilon) \end{bmatrix},$$

(3) C'est un résultat typique déjà obtenu concernant les équations (1.1). Voir, W. Wasow [5].

(4) E_m est la matrice-unité à m dimensions; en particulier, $E = E_n$.

(5) Quelques-uns parmi ces $n_j - 1$ éléments de D_j aussi peuvent être nuls.

où $B_j(x, \varepsilon)$ est une matrice carrée à n_j dimensions.

D'après notre théorème, si la matrice (3.1) admet r valeurs caractéristiques simples, on obtiendra, dans le domaine (2.1) pour $\varepsilon\to 0$, les développements asymptotiques de r solutions de (1.1) linéairement indépendantes. En particulier, si A_{00} n'admet que de valeurs caractéristiques simples, on y retrouvera le résultat classique déjà cité ci-dessus. De plus, en général, pour étudier les propriétés asymptotiques des solutions du système (1.1), on pourra supposer sans perdre la généralité que les valeurs caractéristiques de (3.1) sont toutes égales, ce qui réduira le problème au cas assez simple.

4. Quant à une équation différentielle ordinaire linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\varepsilon^n d^n y/dx^n + \sum_{k=1}^{n} p_k(x, \varepsilon)\varepsilon^{n-k} d^{n-k}y/dx^{n-k} = 0\,, \tag{4.1}$$

où les $p_k(x, \varepsilon)$ sont des fonctions holomorphes par rapport à x, ε pour (1.2) et développables asymptotiquement en des séries

$$p_k(x, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{k\nu}(x)\varepsilon^\nu \qquad (k=1, \cdots, n) \tag{4.2}$$

dans le domaine (1.2) pour $\varepsilon\to 0$, les $p_{k\nu}(x)$ étant holomorphes par rapport à x ($|x|<\delta_0$), on obtiendra immédiatement de notre théorème le

Corollaire. *Supposons que l'on ait*

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} p_{k0}(0)\lambda^{n-k} = \prod_{j=1}^{s} (\lambda-\lambda_j)^{n_j}\,, \qquad (\lambda_j \neq \lambda_k\,;\ j\neq k)\,. \tag{4.3}$$

Alors, si l'on choisit δ, ρ, α convenablement, on peut réduire (4.1), *par un changement de variable y, à coefficients développables asymptotiquement comme ci-dessus dans le domaine* (2.1), *aux s équations différentielles linéaires de la forme*

$$\varepsilon^{n_j} d^{n_j} z_j/dx^{n_j} + \sum_{k=1}^{n_j} q_{jk}(x, \varepsilon)\varepsilon^{n_j-k} d^{n_j-k} z_j/dx^{n_j-k} = 0 \qquad (j=1, \cdots, s)\,, \tag{4.4}$$

où, dans le domaine (2.1), *on a*

$$q_{jk}(x, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{jk\nu}(x)\varepsilon^\nu\,, \tag{4.5}$$

et

$$\begin{cases} \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} p_{k0}(x)\lambda^{n-k} = \prod_{j=1}^{s} \left(\lambda^{n_j} + \sum_{k=1}^{n_j} q_{jk0}(x)\lambda^{n_j-k}\right), \\ \lambda^{n_j} + \sum_{k=1}^{n_j} q_{jk0}(0)\lambda^{n_j-k} = (\lambda-\lambda_j)^{n_j} \qquad (j=1, \cdots, s)\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

On aura donc un résultat plus précis qu'un théorème de M. R. E. Langer[6].

5. Le lemme fondamental. Pour établir le théorème du n° 3, il faut démontrer un lemme concernant les équations différentielles ordinaires non linéaires

$$\varepsilon^\sigma dv_j/dx = f_j(x, v_1, \cdots, v_m, \varepsilon) \qquad (j=1, \cdots, m)\,, \tag{5.1}$$

dont les seconds membres sont des séries entières de $v_1, \cdots, v_m$ uniformément

(6) R.E. Langer [3].

convergentes pour

$$(5.2) \qquad |x|<\delta_0, \quad 0<|\varepsilon|<\rho_0, \quad |\arg\varepsilon|<\alpha_0, \quad ||v||<\delta_0'; \text{[7]}$$

les coefficients des séries $f_j(x, v, \varepsilon)$ sont supposés holomorphes par rapport à x, ε pour (1.2) et développables asymptotiquement, dans le domaine (1.2) pour $\varepsilon\to 0$, en des séries entières de ε à coefficients holomorphes par rapport à x ($|x|<\delta_0$). En négligeant les termes de $f_j(x, v, \varepsilon)$ de degrés supérieurs en v, on obtiendra les fonctions linéaires de v:

$$(5.3) \qquad a_j(x, \varepsilon)+\sum_{k=1}^{m} a_{jk}(x, \varepsilon)v_k \qquad (j=1, \cdots, m);$$

soient

$$(5.4) \qquad a_{jk}(x, \varepsilon)\simeq\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{jk\nu}(x)\varepsilon^\nu \qquad (j, k=1, \cdots, m)$$

les développements de $a_{jk}(x, \varepsilon)$.

Supposons la matrice constante $A=(a_{jk0}(0))$ de la forme canonique de Jordan, c'est-à-dire

$$(5.5) \qquad a_{jk0}(0)=\begin{cases} \mu_j & (k=j), \\ \delta_j & (k=j-1), \\ 0 & (k\neq j, j-1), \end{cases}$$

où $\delta_j\neq 0$ entraîne $\mu_{j-1}=\mu_j$.

Alors, notre lemme s'énonce comme il suit:

Lemme 1. *Supposons*

$$(5.6) \qquad \mu_j\neq 0 \qquad (j=1, \cdots, m);$$

soient

$$(5.7) \qquad v_j\approx\sum_{\nu=1}^{\infty} p_{j\nu}(x)\varepsilon^\nu \qquad (j=1, \cdots, m) \text{[8]}$$

une solution formelle de (5.1) *à coefficients holomorphes par rapport à* x ($|x|<\delta_0$).

Alors, si l'on choisit le domaine (2.1) *convenablement, il existe une solution de* (5.1)

$$(5.8) \qquad v_j=p_j(x, \varepsilon) \qquad (j=1, \cdots, m),$$

dont les seconds membres sont holomorphes par rapport à x, ε *pour* (2.1) *et développables asymptotiquement en séries formelles* (5.7) *dans le domaine* (2.1) *pour* $\varepsilon\to 0$.

Ce lemme sera démontré plus tard par une méthode analogue que M. M. Hukuhara a donnée dans un de ses mémoires.[9]

Au cours de préparation de ce présent mémoire, nous avons profité beaucoup de travaux de M. le Prof. Masuo Hukuhara et de MM. Rudolph E. Langer et Wolfgang Wasow.

(7) $||v||=\max\{|v_1|, \cdots, |v_m|\}$.
(8) $\approx$ désigne une égalité formelle.
(9) M. Hukuhara [1].

I. Réduction formelle.

6. Soit $P_0(x)$ une matrice carrée à n dimensions, holomorphe par rapport à x ($|x|<\delta_0$); supposons $P_0(0)=E$.

Par le changement de variables

$$\vec{y}=P_0(x)\vec{u}\,, \tag{6.1}$$

l'équation (1.1) devient

$$\varepsilon^\sigma d\vec{u}/dx=C(x,\,\varepsilon)\vec{u}\,, \tag{6.2}$$

où la matrice

$$C(x,\,\varepsilon)=P_0(x)^{-1}A(x,\,\varepsilon)P_0(x)-\varepsilon^\sigma P_0(x)^{-1}dP_0(x)/dx\,, \tag{6.3}$$

est holomorphe par rapport à x, ε pour (1.2) et développable asymptotiquement, dans le domaine (1.2) pour $\varepsilon\to0$, en une série entière de ε à coefficients holomorphes, si δ_0 est assez petit.

Soit

$$C(x,\,\varepsilon)\simeq\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu(x)\varepsilon^\nu \tag{6.4}$$

le développement de la matrice $C(x,\,\varepsilon)$. Alors, en vertu de (6.3), on a

$$C_0(x)=P_0(x)^{-1}A_0(x)P_0(x)\,. \tag{6.5}$$

Par conséquent, on peut déterminer la matrice $P_0(x)$ de manière que $C_0(x)$ soit de la forme

$$C_0(x)=\begin{bmatrix} C_{01}(x), & O\;, & O\,, & \cdots, & O\,, & O \\ O\;, & C_{02}(x), & O\,, & \cdots, & O\,, & O \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ O\;, & O\;, & O\,, & \cdots, & O\,, & C_{0s}(x) \end{bmatrix}, \tag{6.6}$$

où $C_{0j}(x)$ est une matrice carrée à n_j dimensions.[10] Puisque

$$C_0(0)=A(0)=A_{00}\,,$$

on a

$$C_{0j}(0)=\overset{\circ}{A}_j \qquad (j=1,\,\cdots,\,s)\,. \tag{6.7}$$

7. Considérons une matrice carrée formelle à n dimensions

$$Q(x,\,\varepsilon)\approx E+\sum_{\nu=1}^{\infty}Q_\nu(x)\varepsilon^\nu\,, \tag{7.1}$$

les $Q_\nu(x)$ étant holomorphes si $|x|$ est assez petit.

Par le changement formel de variables

$$\vec{u}\approx Q(x,\,\varepsilon)\vec{z}\,, \tag{7.2}$$

l'équation (6.2) devient

$$\varepsilon^\sigma d\vec{z}/dt\approx B(x,\,\varepsilon)\vec{z}\,, \tag{7.3}$$

(10) Y. Sibuya [4; Théorème I.1].

et l'on a les relations formelles

$$\varepsilon^{\sigma} dQ(x, \varepsilon)/dx \approx C(x, \varepsilon)Q(x, \varepsilon) - Q(x, \varepsilon)B(x, \varepsilon) \tag{7.4}$$

et

$$B(x, \varepsilon) \approx C_0(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(x)\varepsilon^\nu . \tag{7.5}$$

Les matrices $Q_\nu(x)$ et $B_\nu(x)$ doivent satisfaire aux equations de la forme

$$C_0(x)Q_\nu(x) - Q_\nu(x)C_0(x) = B_\nu(x) - H_\nu(x), \tag{7.6}$$

$H_\nu(x)$ étant un polynome de $B_\mu(x)$, $Q_\mu(x)$ et $dQ_\mu(x)/dx$ $(\mu<\nu)$, à coefficients holomorphes par rapport à x pour $|x|<\delta_0$.

Correspondant à la forme (3.2) de la matrice A_{00}, les matrices $Q_\nu(x)$ peuvent s'écrire

$$Q_\nu(x) = \begin{bmatrix} Q_{\nu 11}(x), & Q_{\nu 12}(x), & \cdots, & Q_{\nu 1s}(x) \\ Q_{\nu 21}(x), & Q_{\nu 22}(x), & \cdots, & Q_{\nu 2s}(x) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ Q_{\nu s1}(x), & Q_{\nu s2}(x), & \cdots, & Q_{\nu ss}(x) \end{bmatrix}. \tag{7.7}$$

Alors, puisque l'on a (6.6) et (6.7), et que les λ_j sont différentes les unes des autres, on peut déterminer $Q_\nu(x)$ de manière que l'on ait

$$Q_{\nu jj}(x) = O \qquad (j=1, \cdots, s), \tag{7.8}$$

et que $B_\nu(x)$ soit de la forme

$$B_\nu(x) = \begin{bmatrix} B_{\nu 1}(x), & O, & O, & \cdots, & O, & O \\ O, & B_{\nu 2}(x), & O, & \cdots, & O, & O \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ O, & O, & O, & \cdots, & O, & B_{\nu s}(x) \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

où $B_{\nu j}(x)$ est une matrice carrée à n_j dimensions. On a donc le

Lemme 2. *On peut déterminer une matrice formelle $Q(x, \varepsilon)$ de manière que le développement* (7.1) *satisfasse aux conditions* (7.8) *et que, par la transformation formelle* (7.2), *le système* (6.2) *se réduise au système* (7.3) *de la forme*

$$B(x, \varepsilon) \approx \begin{bmatrix} B_1(x, \varepsilon), & O, & O, & \cdots, & O, & O \\ O, & B_2(x, \varepsilon), & O, & \cdots, & O, & O \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ O, & O, & O, & \cdots, & O, & B_s(x, \varepsilon) \end{bmatrix}, \tag{7.10}$$

où $B_j(x, \varepsilon)$ est une matrice carrée à n_j dimensions.

II. Réduction analytique.

8. **Préliminaires.** Nons allons réduire le théorème du n° 3 au lemme 1 du n° 5.

Considérons la transformation formelle (7.2) obtenue dans le lemme 2.

Posons d'abord

$$C(x,\ \varepsilon)=C_0(x)+\hat{C}(x,\ \varepsilon)\ ; \tag{8.1}$$

$$Q(x,\ \varepsilon)\approx E+\hat{Q}(x,\ \varepsilon)\ ; \tag{8.2}$$

$$B(x,\ \varepsilon)\approx C_0(x)+\hat{B}(x,\ \varepsilon)\ . \tag{8.3}$$

On a alors

$$\hat{C}(x,\ \varepsilon)\simeq\sum_{\nu=1}^{\infty}C_\nu(x)\varepsilon^\nu\ ; \tag{8.4}$$

$$\hat{Q}(x,\ \varepsilon)\approx\sum_{\nu=1}^{\infty}Q_\nu(x)\varepsilon^\nu\ ; \tag{8.5}$$

$$\hat{B}(x,\ \varepsilon)\approx\sum_{\nu=1}^{\infty}B_\nu(x)\varepsilon^\nu\ . \tag{8.6}$$

Correspondant à la forme (3.2) de la matrice A_{00}, les matrices $\hat{C}(x,\ \varepsilon)$ et et $\hat{Q}(x,\ \varepsilon)$ s'écrivent

$$\hat{C}(x,\ \varepsilon)=\begin{bmatrix} \hat{C}_{11}(x,\ \varepsilon), & \hat{C}_{12}(x,\ \varepsilon), & \cdots, & \hat{C}_{1s}(x,\ \varepsilon) \\ \hat{C}_{21}(x,\ \varepsilon), & \hat{C}_{22}(x,\ \varepsilon), & \cdots, & \hat{C}_{2s}(x,\ \varepsilon) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ \hat{C}_{s1}(x,\ \varepsilon), & \hat{C}_{s2}(x,\ \varepsilon), & \cdots, & \hat{C}_{ss}(x,\ \varepsilon) \end{bmatrix}, \tag{8.7}$$

et

$$\hat{Q}(x,\ \varepsilon)\approx\begin{bmatrix} \hat{Q}_{11}(x,\ \varepsilon), & \hat{Q}_{12}(x,\ \varepsilon), & \cdots, & \hat{Q}_{1s}(x,\ \varepsilon) \\ \hat{Q}_{21}(x,\ \varepsilon), & \hat{Q}_{22}(x,\ \varepsilon), & \cdots, & \hat{Q}_{2s}(x,\ \varepsilon) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ \hat{Q}_{s1}(x,\ \varepsilon), & \hat{Q}_{s2}(x,\ \varepsilon), & \cdots, & \hat{Q}_{ss}(x,\ \varepsilon) \end{bmatrix} \tag{8.8}$$

respectivement.

En vertu de (7.7), on a

$$\hat{Q}_{jk}(x,\ \varepsilon)\approx\sum_{\nu=1}^{\infty}Q_{\nu jk}(x)\varepsilon^\nu\ ; \tag{8.9}$$

en particulier, (7.8) entraîne

$$\hat{Q}_{jj}(x,\ \varepsilon)\approx O \qquad (j=1,\ \cdots,\ s)\ . \tag{8.10}$$

D'autre part, en vertu de (7.10), la matrice formelle $\hat{B}(x,\ \varepsilon)$ est de la forme

$$\hat{B}(x,\ \varepsilon)\approx\begin{bmatrix} \hat{B}_1(x,\ \varepsilon), & O, & O, & \cdots, & O, & O \\ O, & \hat{B}_2(x,\ \varepsilon), & O, & \cdots, & O, & O \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ O, & O, & O, & \cdots, & O, & \hat{B}_s(x,\varepsilon) \end{bmatrix}, \tag{8.11}$$

où $\hat{B}_j(x,\ \varepsilon)$ est une matrice carrée à n_j dimensions.

Alors, l'équation formelle (7.4) entraîne

$$\hat{B}_j(x,\ \varepsilon)\approx\hat{C}_{jj}(x,\ \varepsilon)+\sum_{h=1}^{s}\hat{C}_{jh}(x,\ \varepsilon)\hat{Q}_{hj}(x,\ \varepsilon) \qquad (j=1,\ \cdots,\ s) \tag{8.12}$$

et

$$\varepsilon^\sigma d\hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon)/dx \approx C_{0j}(x)\hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon) - \hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon)C_{0k}(x) + \hat{C}_{jk}(x, \varepsilon) + \sum_{h=1}^{s}{}' \hat{C}_{jh}(x, \varepsilon)\hat{Q}_{hk}(x, \varepsilon) - \hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon)\hat{B}_k(x, \varepsilon) \quad (j \neq k). \tag{8.13}$$

En portant (8.12) dans (8.13), on a

$$\begin{aligned}\varepsilon^\sigma d\hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon)/dx \approx{} & C_{0j}(x)\hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon) - \hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon)C_{0k}(x) + \hat{C}_{jk}(x, \varepsilon) \\ & + \sum_{h=1}^{s}{}' \hat{C}_{jh}(x, \varepsilon)\hat{Q}_{hk}(x, \varepsilon) - \hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon)\hat{C}_{kk}(x, \varepsilon) \\ & - \hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon)\sum_{h=1}^{s}{}' \hat{C}_{kh}(x, \varepsilon)\hat{Q}_{hk}(x, \varepsilon) \qquad (j \neq k).\end{aligned} \tag{8.14}$$

En remplaçant les $\hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon)$ respectivement par les matrices inconnues X_{jk}, à n_j lignes et à n_k colonnes, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires

$$\begin{aligned}\varepsilon^\sigma dX_{jk}/dx ={} & C_{0j}(x)X_{jk} - X_{jk}C_{0k}(x) + \hat{C}_{jk}(x, \varepsilon) \\ & + \sum_{h=1}^{s}{}' \hat{C}_{jh}(x, \varepsilon)X_{hk} - X_{jk}\hat{C}_{kk}(x, \varepsilon) - X_{jk}\sum_{h=1}^{s}{}' \hat{C}_{kh}(x, \varepsilon)X_{hk} \\ & (j \neq k).\end{aligned} \tag{8.15}$$

Il admet évidemment une solution formelle

$$X_{jk} \approx \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' Q_{\nu jk}(x)\varepsilon^\nu \qquad (j \neq k). \tag{8.16}$$

Si l'on considère (8.15) comme un système d'équations différentielles non linéaires en les éléments des matrices X_{jk} $(j \neq k)$, il a la forme (5.1).

Les $C_{0j}(x)$ satisfaisant à (6.7), les nombres correspondant aux μ_j sont les différences $\lambda_j - \lambda_k$. Puisque les λ_j sont différentes les unes des autres, les conditions (5.6) sont remplies pour (8.15).

Supposons donc le lemme 1 établi. Il existe alors une solution de (8.15)

$$X_{jk} = \hat{Q}_{jk}(x, \varepsilon) \qquad (j \neq k), \tag{8.17}$$

telle que les seconds membres soient holomorphes par rapport à x, ε pour (2.1) et que l'on puisse remplacer dans (8.9) l'égalité formelle $\approx$ par l'égalité asymptotique $\simeq$ pour $\varepsilon \to 0$, si δ, ρ, α sont choisis convenablement.

Remplaçons les égalités formelles $\approx$ par les égalités $=$ dans les relations (8.2), (8.11) et (8.12).

Si l'on pose ensuite

$$B(x, \varepsilon) = C_0(x) + \hat{B}(x, \varepsilon), \tag{8.18}$$

le système (1.1) se réduit au système

$$\varepsilon^\sigma d\vec{z}/dx = B(x, \varepsilon)\vec{z} \tag{8.19}$$

par la transformation

$$\vec{y} = P_0(x)Q(x, \varepsilon)\vec{z}, \tag{8.20}$$

ce qui montre le théorème du n° 3.

Par conséquent, il nous reste seulement à démontrer lemme 1.

9. Construction d'un losange. Dans la suite, nous considérerons exclusivement le système (5.1).

Posons d'abord

$$\omega_j = \arg \mu_j \qquad (j=1, \cdots, m)\,; \tag{9.1}$$

on peut supposer

$$-\frac{3}{2}\pi < \omega_j \leqq \frac{1}{2}\pi \qquad (j=1, \cdots, m)\,. \tag{9.2}$$

Alors, il existe un nombre positif Θ plus petit que $\frac{1}{2}\pi$ et satisfaisant aux inégalités

$$-\frac{3}{2}\pi < \omega_j - \Theta < \frac{1}{2}\pi \qquad (j=1, \cdots, m)\,; \tag{9.3}$$

de plus, on peut supposer

$$\omega_j - \Theta \neq -\frac{1}{2}\pi \qquad (j=1, \cdots, m)\,. \tag{9.4}$$

Supposons ensuite que les ω_j satisfont aux inégalités

$$-\frac{1}{2}\pi < \omega_j - \Theta < \frac{1}{2}\pi \qquad (j=1, \cdots, m') \tag{9.5}$$

et

$$-\frac{3}{2}\pi < \omega_j - \Theta < -\frac{1}{2}\pi \qquad (j=m'+1, \cdots, m)\,. \tag{9.6}$$

Si, donc, on choisit deux nombres positifs α, β assez petits, on a les inégalités

$$-\frac{1}{2}\pi + \sigma\alpha + \beta < \omega_j - \Theta < \frac{1}{2}\pi - (\sigma\alpha + \beta) \qquad (j=1, \cdots, m') \tag{9.7}$$

et

$$-\frac{3}{2}\pi + \sigma\alpha + \beta < \omega_j - \Theta < -\frac{1}{2}\pi - (\sigma\alpha + \beta) \qquad (j=m'+1, \cdots, m)\,. \tag{9.8}$$

Posons ensuite

$$\begin{cases} x^{(1)} = \delta\, e^{-i\Theta}\,, \\ x^{(2)} = i x^{(1)} \tan \beta\,, \\ x^{(3)} = -x^{(1)}\,, \\ x^{(4)} = -x^{(2)}\,, \end{cases} \tag{9.9}$$

où δ est un nombre positif assez petit.

Alors, on a un losange dont les sommets sont les $x^{(k)}$ $(k=1, 2, 3, 4)$. L'angle au sommet $x^{(1)}$ est égale à 2β. Désignons

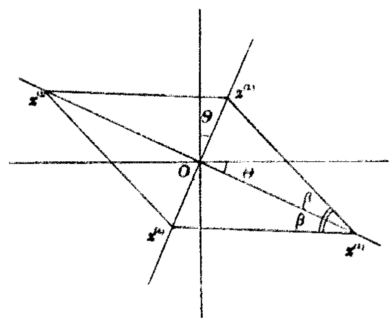

Fig. 1.

par $\mathfrak{D}(\delta)$ l'intérieur du losange. Le domaine $\mathfrak{D}(\delta)$ contient le domaine

$$(9.10) \qquad |x|<\delta',$$

si $\delta'>0$ est assez petit, tandis que le domaine

$$(9.11) \qquad |x|<\delta$$

contient $\mathfrak{D}(\delta)$, si β est assez petit.

Cela posé, démontrons le

Lemme 3. *Si l'on pose*

$$(9.12) \qquad U_j(x, \varepsilon)=\int_{x_j}^{x} \exp(-\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma)dx \qquad (j=1, \cdots, m)$$

où

$$(9.13) \qquad x_j=\begin{cases} x^{(1)} & (j=1, \cdots, m'), \\ x^{(3)} & (j=m'+1, \cdots, m), \end{cases}$$

il existe un nombre positif c satisfaisant aux inégalités

$$(9.14) \qquad |U_j(x, \varepsilon)|\leqq c|\varepsilon|^\sigma|\exp(-\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma)|$$

pour

$$(9.15) \qquad x\in\mathfrak{D}(\delta), \qquad |\arg\varepsilon|<\alpha.$$

Considérons le cas où $j=1, \cdots, m'$. La démonstration peut s'achever de la même manière dans l'autre cas.

Posons d'abord

$$(9.16) \qquad \xi=|x-x^{(1)}|, \qquad \theta=\arg(x-x^{(1)})$$

pour $x\in\mathfrak{D}(\delta)$; et puis

$$(9.17) \qquad \omega=\arg\varepsilon.$$

On a alors

$$(9.18) \qquad |U_j(x, \varepsilon)|\leqq\int_0^\xi \exp\left(-\frac{|\mu_j|}{|\varepsilon|^\sigma}\xi\cos(\omega_j+\theta-\sigma\omega)\right)d\xi \qquad (j=1, \cdots, m').$$

D'autre part, d'après la définition de $\mathfrak{D}(\delta)$, on a

$$(9.19) \qquad \pi-\Theta-\beta<\theta<\pi-\Theta+\beta$$

pour $\mathfrak{D}(\delta)$. Si, donc, on suppose $|\arg\varepsilon|<\alpha$, on aura

$$(9.20) \qquad \frac{1}{2}\pi<\omega_j+\pi-\Theta-(\sigma\alpha+\beta)<\omega_j+\theta-\sigma\omega<\omega_j+\pi-\Theta+(\sigma\alpha+\beta)<\frac{3}{2}\pi \qquad (j=1, \cdots, m')$$

pour $x\in\mathfrak{D}(\delta)$.

Par conséquent, il existe un nombre positif c' tel que

$$(9.21) \qquad -\cos(\omega_j+\theta-\sigma\omega)\geqq c' \qquad (j=1, \cdots, m')$$

pour (9.15).

En vertu de (9.18) et de (9.21), on a

(9.22) $\quad |U_j(x, \varepsilon)| \leqq (|\varepsilon|^\sigma/c'|\mu_j|)|\exp(-\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma)| \qquad (j=1, \cdots, m')$

pour (9.15), c.q.f.d.

10. Transformation du système (5.1) Supposons que le système (5.1) admet une solution formelle (5.7).

Faisons le changement de variables

(10.1) $$v_j = p_j^{(N)}(x, \varepsilon) + y_j \qquad (j=1, \cdots, m),$$

où

(10.2) $$p_j^{(N)}(x, \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{N-1} p_{j\nu}(x)\varepsilon^\nu \qquad (j=1 \cdots, m\,;\ N>1).$$

Soient

(10.3) $$\varepsilon^\sigma dy_j/dx = g_j^{(N)}(x, y_1, \cdots, y_m, \varepsilon) \qquad (j=1, \cdots, m)$$

les équations en y, dont les seconds membres sont des séries entières de y uniformément convergentes pour

(10.4) $$|x|<\delta_0, \qquad 0<|\varepsilon|<\rho_N', \qquad |\arg \varepsilon|<\alpha_0, \qquad ||y||<\delta_N'',$$

si ρ_N' et δ_N'' sont assez petits; les coefficients des séries $g_j^{(N)}(x, y, \varepsilon)$ sont holomorphes par rapport à x, ε pour

(10.5) $$|x|<\delta_0, \qquad 0<|\varepsilon|<\rho_N', \qquad |\arg \varepsilon|<\alpha_0,$$

et développables asymptotiquement, dans le domaine (10.5) pour $\varepsilon \to 0$, en des séries entières de ε à coefficients holomorphes par rapport à x ($|x|<\delta_0$). En négligeant les terms de $g_j^{(N)}(x, y, \varepsilon)$ de degrés supérieurs en y, on obtiendra les fonctions linéaires de y:

(10.6) $$b_j^{(N)}(x, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{m} b_{jk}^{(N)}(x, \varepsilon) y_k \qquad (j=1, \cdots, m)\,;$$

soient

(10.7) $$b_{jk}^{(N)}(x, \varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{jk\nu}^{(N)}(x)\varepsilon^\nu \qquad (j, k=1, \cdots, m)$$

les développements de $b_{jk}^{(N)}(x, \varepsilon)$, où $b_{jk0}^{(N)}(x) = a_{jk0}(x)$. On a alors

(10.8) $$b_{jk0}^{(N)}(0) = \begin{cases} \mu_j & (k=j), \\ \delta_j & (k=j-1), \\ 0 & (k \neq j, j-1). \end{cases}$$

D'autre part, le système (10.3) admet une solution formelle

(10.9) $$y_j \approx \sum_{\nu=N}^{\infty} p_{j\nu}(x)\varepsilon^\nu \qquad (j=1, \cdots, m).$$

Par suite, les développements de $b_j^{(N)}(x, \varepsilon)$ ne contiennent que des termes de degrés au moins égaux à N par rapport à ε.

On a donc les inégalités suivantes:

(10.10) $$|b_j^{(N)}(x, \varepsilon)| \leqq B_N |\varepsilon|^N \qquad (j=1, \cdots, m),$$

$$\text{(10.11)} \qquad \begin{cases} |b_{jj}^{(N)}(x, \varepsilon)-\mu_j| \leqq A/m & (j=1, \cdots, m), \\ |b_{jk}^{(N)}(x, \varepsilon)| \leqq A/m & (j \neq k), \end{cases}$$

pour (10.5) si δ_0 et ρ_N' sont assez petits, où B_N et A sont des constantes positives convenablement choisies; quant à A, elle n'est assujettie qu'à la condition

$$\text{(10.12)} \qquad A > m \max_{j=1}^{m} |\delta_j| .$$

De plus, par un changement linéaire de variables, on peut donner aux δ_j des valeurs aussi petites que l'on veut. Par conséquent, on peut supposer

$$\text{(10.13)} \qquad cA < 1 .$$

Cela posé, faisons le changement de variables

$$\text{(10.14)} \qquad y_j = z_j \exp(\mu_j(x-x_j)/\varepsilon_\sigma) \qquad (j=1, \cdots, m) .$$

On a alors

$$\text{(10.15)} \qquad \varepsilon^\sigma dz_j/dx = \{g_j^{(N)}(x, y, \varepsilon)-\mu_j y_j\} \exp(-\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma) \quad (j=1, \cdots, m) .$$

En vertu de (10.10) et de (10.11), on a inégalités

$$\text{(10.16)} \qquad |g_j^{(N)}(x, y, \varepsilon)-\mu_j y_j| \leqq B_N|\varepsilon|^N + A||y|| \qquad (j=1, \cdots, m)$$

pour

$$\text{(10.17)} \qquad |x| < \delta_0, \quad 0 < |\varepsilon| < \rho_N'', \quad |\arg \varepsilon| < \alpha_0, \quad ||y|| < \delta_N''',$$

si δ_0, δ_N''', ρ_N'' sont assez petits.

11. L'existence d'une solution de (10.15). Supposons δ (>0) plus petit que δ_0. Soient $\varphi_j(\varepsilon)$ des fonctions holomorphes de ε pour

$$\text{(11.1)} \qquad 0 < |\varepsilon| < \rho_0, \qquad |\arg \varepsilon| < \alpha_0,$$

et développables asymptotiquement en séries

$$\text{(11.2)} \qquad \varphi_j(\varepsilon) \simeq \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{j\nu}(x_j)\varepsilon^\nu \qquad (j=1, \cdots, m)$$

dans le domaine (11.1) pour $\varepsilon \to 0$; posons

$$\text{(11.3)} \qquad \varphi_j^{(N)}(\varepsilon) = \varphi_j(\varepsilon) - p_j^{(N)}(x_j, \varepsilon) \qquad (j=1, \cdots, m) .$$

On a alors les inégalités

$$\text{(11.4)} \qquad |\varphi_j^{(N)}(\varepsilon)| \leqq B_N'|\varepsilon|^N \qquad (j=1, \cdots, m)$$

pour (11.1), B_N' étant une constante positive.

Soit K_N une constante positive satisfaisant à l'inégalité

$$\text{(11.5)} \qquad K_N \geqq (cB_N + B_N')/(1-cA) .$$

Cela posé démontrons l'existence d'une solution de (10.15) et une seule

$$\text{(11.6)} \qquad z_j = \varphi_j^{(N)}(x, \varepsilon) \qquad (j=1, \cdots, m),$$

dont les seconds membres sont holomorphes par rapport à x, ε et satisfont aux conditions

$$\varphi_j^{(N)}(x_j, \varepsilon)=\varphi_j^{(N)}(\varepsilon) \qquad (j=1, \cdots, m), \tag{11.7}$$

et aux inégalités

$$|\varphi_j^{(N)}(x, \varepsilon)|\leqq K_N|\varepsilon|^N|\exp(-\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma)| \qquad (j=1, \cdots, m), \tag{11.8}$$

pour

$$x\in\mathfrak{D}(\delta), \qquad 0<|\varepsilon|<\rho_N, \qquad |\arg\varepsilon|<\alpha, \tag{11.9}$$

où ρ_N est une constante positive satisfaisant aux inégalités

$$\rho_N\leqq\rho_N'', \qquad K_N\rho_N^N<\delta_N'''. \tag{11.10}$$

Désignons par $\mathfrak{f}_j$ la famille des fonctions $\phi_j(x, \varepsilon)$ holomorphes par rapport à x, ε et satisfaisant à l'inégalité

$$|\phi_j(x, \varepsilon)|\leqq K_N|\varepsilon|^N|\exp(-\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma)|, \tag{11.11}$$

pour (11.9). La famille $\mathfrak{f}_j$, munie de la topologie de convergence uniforme, est convexe, fermée et compacte. Par conséquent, le produit de $\mathfrak{f}_1, \cdots, \mathfrak{f}_m$

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{f}_1\times\cdots\times\mathfrak{f}_m=\{(\phi_1, \cdots, \phi_m);\ \phi_j\in\mathfrak{f}_j\} \tag{11.12}$$

est aussi convexe, fermé et compact.

Posons ensuite

$$\Phi_j(x, \varepsilon)=\varphi_j^{(N)}(\varepsilon)+\varepsilon^{-\sigma}\int_{x_j}^x G_j(x, \phi_1, \cdots, \phi_m, \varepsilon)dx \qquad (j=1, \cdots, m) \tag{11.13}$$

pour chaque $(\phi_1, \cdots, \phi_m)$ de $\mathfrak{F}$, où les $G_j(x, z_1, \cdots, z_m, \varepsilon)$ désignent les seconds membres du système (10.15).

En vertu du lemme 3 et de (10.16), (11.5) et (10.15), les $\Phi_j(x, \varepsilon)$ aussi satisfont aux inégalités (11.8) pour (11.9). Par conséquent, on a

$$(\Phi_1, \cdots, \Phi_m)\in\mathfrak{F}. \tag{11.14}$$

Soit T la transformation qui fait correspondre $(\phi_1, \cdots, \phi_m)$ à $(\Phi_1, \cdots, \Phi_m)$. Alors, T est une transformation continue telle que

$$T\{\mathfrak{F}\}\subseteqq\mathfrak{F}. \tag{11.15}$$

Par suite, d'après le théorème d'existence de points invariants[11], il existe un point $(\varphi_1^{(N)}, \cdots, \varphi_m^{(N)})$ de $\mathfrak{F}$ tel que

$$\varphi_j^{(N)}(x, \varepsilon)=\varphi_j^{(N)}(\varepsilon)+\varepsilon^{-\sigma}\int_{x_j}^x G_j(x, \varphi_1^{(N)}, \cdots, \varphi_m^{(N)}, \varepsilon)dx \qquad (j=1, \cdots, m), \tag{11.16}$$

ce qui entraîne que

$$z_j=\varphi_j^{(N)}(x, \varepsilon) \qquad (j=1, \cdots, m) \tag{11.17}$$

est une solution de (10.15) satisfaisant aux conditions (11.7) et (11.8) pour (11.9).

Supposons ensuite qu'il existe une autre solution

(11) M. Hukuhara [2].

$$(11.18) \qquad z_j = \phi_j(x, \varepsilon) \qquad (j=1, \cdots, m)$$

satisfaisant aux conditions (11.7) et (11.8) pour (11.9) ; posons

$$(11.19) \qquad M(\varepsilon) = \max_{x, j} \{|\phi_j(x, \varepsilon) - \varphi_j^{(N)}(x, \varepsilon)| \, |\exp(\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma)|\} .$$

On a alors aisément l'inégalité

$$(11.20) \qquad M(\varepsilon) < cAM(\varepsilon) ,$$

si $|\varepsilon|$ est assez petit. On a donc, en vertu de (10.13), $M(\varepsilon)=0$, ce qui entraîne l'unicité de la solution de (10.15) satisfaisant aux conditions (11.7) et (11.8) pour (11.9).

12. Démonstration du lemme 1. D'après le résultat du numéro précédent, le système (5.1) admet une solution et une seule

$$(12.1) \qquad v_j = p_j^{(N)}(x, \varepsilon) + \varphi_j^{(N)}(x, \varepsilon) \exp(\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma) \qquad (j=1, \cdots, m) .$$

Si la solution (12.1) est indépendante de N, on a une solution de (5.1) développable asymptotiquement en des séries (5.7) dans le domaine (11.9) pour $\varepsilon \to 0$, car (11.6) satisfait aux conditions (11.8).

Par conséquent, il nous reste seulement à démontrer que (12.1) est indépendantes de N. Pour le démontrer, il suffit d'écrire

$$(12.2) \qquad \begin{aligned} & p_j^{(N')}(x, \varepsilon) + \varphi_j^{(N')}(x, \varepsilon) \exp(\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma) \\ &= p_j^{(N)}(x, \varepsilon) + \{p_j^{(N')}(x, \varepsilon) - p_j^{(N)}(x, \varepsilon)\} + \varphi_j^{(N')}(x, \varepsilon) \exp(\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma) \\ & \qquad (j=1, \cdots, m) \end{aligned}$$

pour $N < N'$. Alors,

$$(12.3) \qquad \begin{aligned} z_j = \{p_j^{(N')}(x, \varepsilon) - p_j^{(N)}(x, \varepsilon)\} \exp(-\mu_j(x-x_j)/\varepsilon^\sigma) + \varphi_j^{(N')}(x, \varepsilon) \\ (j=1, \cdots, m) \end{aligned}$$

est une solution de (10.15) satisfaisant aux conditions (11.7) et (11.8). Par conséquent, (12.3) coïncide avec (11.6), c.q.f.d.

4 avril, 1957.

Bibliographie.

1. M. Hukuhara. Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre. Mem. Fac. Eng., Kyushu Imp. Univ., **8** (1937) 249-280;

2. M. Hukuhara. Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionnel. Japanese Jour. Math., **20** (1950) 1-4;

3. R. E. Langer. On the Construction of Related Differential Equations. Trans. Amer. Math. Soc., **81** (1956) 394-410;

4. Y. Sibuya. Sur un système des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients périodiques et contenant des paramètres. Jour. Fac. Sci., Univ. Tokyo, I, **7** (1954) 229-241;

5. W. Wasow. The asymptotic theory of linear differential equations involving a parameter. Le Matematiche, Fasc. 11, 1955-X, 134-148.