Théorie des endomorphismes complètement continus.

Par Masuo HUKUHARA et Yasutaka SIBUYA.

Dans la théorie des endomorphismes complètement continus, l'hypothèse essentiellement utilisée est la suivante: il existe un voisinage dont l'image par l'endomorphisme est compacte au sens de M. Fréchet. Il serait donc naturel de les étudier dans l'espace $(\mathfrak{L})$ linéaire. Nous étudierons quelques propriétés de l'espace $(\mathfrak{L})$ de Fréchet dans le chapitre I et celles de l'espace $(\mathfrak{L})$ linéaire dans le chapitre II. Enfin dans les chapitres suivants nous établirons les théorèmes de Riesz et de Schauder en nous plaçant dans l'espace $(\mathfrak{L})$ linéaire.

I. Espace $(\mathfrak{L})$ de Fréchet.

1. Espaces abstraits. Nous dirons qu'un ensemble ou espace est muni d'une topologie s'il y a un règle qui fait correspondre à chaque partie E une partie dite l'adhérence et notée par $\overline{E}$. Nous supposons les conditions suivantes remplies:

(i) $$E \subseteqq \overline{E};$$

(ii) $$A \subseteqq B \Rightarrow \overline{A} \subseteqq \overline{B}.$$

Un ensemble qui coïncide avec son adhérence est dit *fermé*. Un ensemble dont le complémentaire est fermé est dit *ouvert*. Un point qui n'appartient pas à l'adhérence du complémentaire de E est *point intérieur* de E. Un point qui est intérieur au complémentaire de E est *point extérieur* de E. Un point qui n'est pas intérieur ni extérieur est *point frontière*.

Il est bien connu que l'on a les propositions suivantes:

1.1 *L'intersection d'une famille d'ensembles fermés est un ensemble fermé; la réunion d'une famille d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

1.2 *La réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés est un ensemble fermé et l'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert pourvu que l'on ait la condition suivante:*

(iii) $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

2. Espace $(\mathfrak{B})$. Espace $(\mathfrak{B})$ est un espace $\mathfrak{R}$ où la topologie est définie par une famille des systèmes d'ensembles $\{\mathfrak{B}(x); x \in \mathfrak{R}\}$. L'ensemble appartenant à $\mathfrak{B}(x)$ est supposé contenir x. Il est appelé *voisinage* de x et $\mathfrak{B}(x)$ le *système fondamental de voisinages* de x. a est un point adhérent de E, si chaque voisinage de a contient au moins un point de E. L'espace $(\mathfrak{B})$ remplie évidemment les conditions (i) et (ii). On sait en outre que l'on a les propositions suivantes:

2.1 ***Pour que l'espace*** $(\mathfrak{V})$ ***remplisse la condition*** (iii), ***il faut et il suffit que l'on ait la condition:***

(iii′) Si $V_1(x)$ et $V_2(x)$ appartiennent à $\mathfrak{V}(x)$, il existe un voisinage $V(x)\in\mathfrak{V}(x)$ contenu dans leur intersection.

2.2 ***Pour qu'un espace muni d'une topologie soit un espace*** $(\mathfrak{V})$, ***il faut et il suffit que l'on ait*** (i), (ii) ***et***

(iv) $$\overline{0}=0\,.$$

Démontrons par exemple la suffisance de la condition de la proposition 2.2.

On prend pour $\mathfrak{V}(x)$ le système formé de tous les ensembles à l'intérieur desquels se trouve x. D'après (iv), $\mathfrak{V}(x)$ n'est pas vide, car il contient l'espace lui-même. Si E est contenu dans le complémentaire de $V(a)$, a n'appartient pas à $\overline{E}$.

Réciproquement, si a n'appartient pas à $\overline{E}$, a est un point intérieur du complémentaire de E. Le complémentaire de E appartient donc à $\mathfrak{V}(a)$. Par suite la topologie initiale est identique à celle qui est définie par la famille des systèmes $\{\mathfrak{V}(x);\ x\in\mathfrak{R}\}$.

Il peut arriver que deux familles des systèmes de voisinages définissent la même topologie. Dans ce cas, ces deux familles des systèmes de voisinages sont dites *équivalentes*. On sait que l'on a la proposition:

2.3 ***Pour que deux familles des systèmes d'ensembles*** $\{\mathfrak{V}(x);\ x\in\mathfrak{R}\}$ ***et*** $\{\mathfrak{V}'(x);\ x\in\mathfrak{R}\}$ ***soient équivalentes, il faut et il suffit que l'on ait la condition suivante:***

A chaque $V(x)$ de $\mathfrak{V}(x)$ on peut faire correspondre un $V'(x)$ de $\mathfrak{V}'(x)$ contenu dans le précédent et réciproquement.

Un système d'ensembles $\mathfrak{V}'(x)$ satisfaisant à cette condition est appelé encore *système fondamental de voisinages* de x.

3. L'espace $(\mathfrak{L})$. *Espace* $(\mathfrak{L})$ est un espace où la topologie est définie par une famille des systèmes de suites $\{\mathfrak{S}(x);\ x\in\mathfrak{R}\}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

I. La suite $\{x_n\}$ telle que $x_n=x$ appartient à $\mathfrak{S}(x)$;

II. Une suite partielle de la suite $\in\mathfrak{S}(x)$ appartient à $\mathfrak{S}(x)$;

III. $\mathfrak{S}(x)\cap\mathfrak{S}(y)=0$ pour $x\neq y$.

Le point adhérent de E est un point x tel que l'on puisse extraire de E une suite $\in\mathfrak{S}(x)$. L'espace $(\mathfrak{L})$ est un espace $(\mathfrak{V})$, car il remplie évidemment les conditions (i), (ii) et (iv). Il pourra arriver que deux familles des systèmes de suites $\{\mathfrak{S}(x);\ x\in\mathfrak{R}\}$ et $\{\mathfrak{S}'(x);\ x\in\mathfrak{R}\}$ définissent la même topologie. On dit alors qu'elles sont *équivalentes*. On peut vérifier sans peine les propositions suivantes:

3.1 *L'espace* $(\mathfrak{L})$ *est un espace* $(\mathfrak{V})$ *satisfaisant à la condition* (iii').

3.1' *Dans l'espace* $(\mathfrak{L})$, *la réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés est un ensemble fermé, et l'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

3.2 *Pour que deux familles des systèmes de suites* $\{\mathfrak{S}(x); x \in \mathfrak{R}\}$ *et* $\{\mathfrak{S}'(x); x \in \mathfrak{R}\}$ *soient équivalentes, il faut et il suffit que l'on ait la condition suivante:*

De chaque suite $\in \mathfrak{S}(x)$ on peut extraire une suite partielle $\in \mathfrak{S}'(x)$ et réciproquement.

Nous dirons *système fondamental de suites* en x tout système $\mathfrak{S}'(x)$ satisfaisant à cette condition.

3.3 *L'ensemble ne contenant qu'un nombre fini de points est fermé.*

Il est évident que l'ensemble formé d'un seul point coïncide avec son adhérence. 3.3 est donc la conséquence de 3.1'.

4. Sous-espaces. *Sous-espace* d'un espace $\mathfrak{R}$ est un ensemble R où la topologie est définie en faisant correspondre à une partie E de R la partie $\overline{E} \cap R$.

4.1 *Soient* $\mathfrak{R}$ *un espace* $(\mathfrak{V})$ *et* R *un sous-espace. Si* $\{\mathfrak{V}(x); x \in \mathfrak{R}\}$ *est la famille des systèmes fondamentaux de voisinages dans* $\mathfrak{R}$, $\{R \cap \mathfrak{V}(x); x \in R\}$ *est la famille des systèmes fondamentaux de voisinages dans* R.

En effet, si $a \in R$ est un point adhérent d'une partie E de R, $R \cap V(x)$, où $V(x) \in \mathfrak{V}(x)$, contient au moins un point de E et réciproquement.

4.2 *Soient* $\mathfrak{R}$ *un espace* $(\mathfrak{L})$ *et* R *un sous-space.* R *est aussi un espace* $(\mathfrak{L})$ *et si* $\mathfrak{S}(x)$ *est le système fondamental de suites en* x *dans* $\mathfrak{R}$, *le système* $R \cap \mathfrak{S}(x)$ *des suites* $\in \mathfrak{S}(x)$ *contenues dans* R *est le système fondamental de suites en* x *dans* R.

En effet, si $a \in R$ est un point adhérent d'une partie E de R, on peut extraire de E une suite $R \cap \mathfrak{S}(a)$ et réciproquement.

5. Convergence. Si chaque voisinage de a contient presque tous les a_n, nous dirons que la suite $\{a_n\}$ *converge* vers a. Nous écrirons alors

$$\lim a_n = a \qquad \text{ou} \qquad a_n \to a .$$

5.1 *Si la suite* $\{a_n\}$ *converge vers* a, *sa suite partielle converge vers* a.

Cette proposition est évidente.

5.2 *La suite convergeant vers* a *est caractérisée par cette propriété:*

De toute suite partielle extraite de la suite on peut extraire une suite partielle appartenant à $\mathfrak{S}(a)$.

Nécessité de la condition. Il suffit de montrer que l'on peut extraire d'une suite $\{a_n\}$ convergeant vers a une suite partielle appartenant à $\mathfrak{S}(a)$.

S'il y a une infinité de n pour lesquels $a_n = a$, on peut extraire de la suite une suite partielle $\{a'_n\}$ telle que $a'_n = a$ pour tous les n. Cette suite partielle appartient à $\mathfrak{S}(a)$.

S'il n'y a qu'un nombre fini de n pour lesquels $a_n = a$, on peut supposer sans perdre la généralité que tous les a_n soient différents de a. a est un point adhérent de l'ensemble A formé des points a_n. On peut extraire de A une suite $\{a'_n\} \in \mathfrak{S}(a)$. On aura $a'_n = a_{k_n}$, $k_n \to \infty$. Car si la suite $\{k_n\}$ était bornée, a'_n représenterait un même point $b\,(\neq a)$ pour une infinité de n. On pourrait alors extraire de la suite $\{a'_n\} \in \mathfrak{S}(a)$ une suite partielle $\in \mathfrak{S}(b)$.

Puisque $k_n \to \infty$, on pourra extraire de la suite $\{a'_n\}$ une suite partielle $\{a''_n\}$ qui est en même temps une suite partielle de $\{a_n\}$. $\{a'_n\}$ appartenant à $\mathfrak{S}(a)$, $\{a''_n\}$ lui appartient.

SUFFISANCE DE LA CONDITION. Si la suite $\{a_n\}$ ne converge pas vers a, il existe un voisinage $V(a)$ tel que a_n n'appartient pas à $V(a)$ pour une infinité de n. On peut alors extraire de $\{a_n\}$ une suite partielle $\{a'_n\}$ dont aucun point n'appartient à $V(a)$. Alors, on ne peut extraire de $\{a'_n\}$ aucune suite partielle $\in \mathfrak{S}(a)$.

5.2′ *Une suite $\in \mathfrak{S}(a)$ converge vers a.*

Car la suite satisfait évidemment à la condition de la proposition 5.2.

5.2″ ***Si de toute suite partielle extraite de la suite $\{a_n\}$ on peut extraire une suite partielle convergeant vers a, la suite $\{a_n\}$ converge vers a.***

Car la condition de la proposition 5.2 est remplie.

5.3 ***Si une suite $\{a_n\}$ converge vers a et si $a \neq b$, il existe un voisinage $V(b)$ de b tel que $a_n \notin V(b)$ pour presque tous les n.***

Il existe au plus un nombre fini de n pour lesquels on a $a_n = b$. Nous pouvons donc supposer sans perdre la généralité que $a_n \neq b$ pour tous les n. Soit A l'ensemble formé des points a_n. Si chaque voisinage $V(b)$ contenait au moins un des points a_n, b serait un point adhérent de A. On pourrait donc extraire de A une suite $\{a'_n\} \in \mathfrak{S}(b)$. On pourrait alors extraire de $\{a'_n\}$ une suite partielle $\{a''_n\}$ qui est en même temps une suite partielle de $\{a_n\}$. $\{a''_n\}$ appartiendrait alors à $\mathfrak{S}(b)$. Mais $\{a''_n\}$ convergeant vers a, on pourrait en extraire une suite partielle $\in \mathfrak{S}(a)$. C'est absurde.

6. Continuité. Soint $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ deux espaces ($\mathfrak{L}$) de Fréchet. Une application F de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}'$ est dite *continue* en a si l'on a

$$\lim F(a_n) = F(\lim a_n) \tag{6.1}$$

pour toutes les suites $\{a_n\}$ convergeant vers a.

6.1 ***Pour qu'une application F de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}'$ soit continue en a, il faut et il suffit que l'on ait (6.1) pour $\{a_n\} \in \mathfrak{S}(a)$.***

Soit $\{a_n\}$ une suite convergeant vers a. Il suffit de montrer, d'après 5.2″, que l'on puisse extraire d'une suite partielle quelconque $\{F(a'_n)\}$ de $\{F(a_n)\}$ une suite partielle convergeant vers $F(a)$. $\{a'_n\}$ convergeant vers a, on peut en extraire une suite partielle $\{a''_n\} \in \mathfrak{S}(a)$. $\{F(a''_n)\}$ est une suite partielle de $\{F(a'_n)\}$ et converge vers $F(a)$.

6.2 *Pour qu'une application F de R dans R' soit continue en a, il faut et il suffit que l'on ait la condition suivante:*

A chaque voisinage $V'(a')$ de $a'=F(a)$, on peut faire correspondre un voisinage $V(a)$ de a dont l'image par F est contenue dans $V'(a')$: $F\{V(a)\} \subseteq V'(a')$.

La suffisance de la condition étant évidente, nous démontrons seulement la nécessité de la condition. Pour cela nous supposons qu'il n'existe aucun voisinage de a dont l'image $F\{V(a)\}$ est contenue dans $V'(a')$. On peut alors faire correspondre à chaque voisinage $V(a)$ un point $a_V \in V(a)$ dont l'image n'appartient pas à $V'(a')$. a est un point adhérent de l'ensemble A formé des points a_V. On peut donc en extraire une suite $\{a_n\}$ convergeant vers a. Aucune des images des a_n n'appartient à $V'(a')$. Par suite la suite $\{F(a_n)\}$ ne converge pas vers $F(a)$.

II. Espace ($\mathfrak{L}$) linéaire.

7. Uniformité. Un espace ($\mathfrak{L}$) de Fréchet est dit *espace* ($\mathfrak{L}$) *linéaire* s'il est un espace vectoriel sur un corps de nombres complexes (ou réels) et s'il jouit des propriétés suivantes:

IV. $\{x_n\}\in\mathfrak{S}(x)$, $\{y_n\}\in\mathfrak{S}(y)$ entraînent $\{x_n+y_n\}\in\mathfrak{S}(x+y)$;

V. $\{x_n\}\in\mathfrak{S}(x)$, $\alpha_n\to\alpha$ entraînent $\{\alpha_n x_n\}\in\mathfrak{S}(\alpha x)$.

7.1 *Si nous désignons par $\mathfrak{S}$ le système $\mathfrak{S}(o)$, on a*

$$\mathfrak{S}(a)=\{\{x_n+a\}\,;\ \{x_n\}\in\mathfrak{S}\}\,;$$

$\sigma\{\mathfrak{S}\}=\{\{\sigma a_n\}\,;\{a_n\}\in\mathfrak{S}\}$ *coïncide avec $\mathfrak{S}$ pour $\sigma\neq 0$.*

Si $\{a_n\}\in\mathfrak{S}$, on a $\{a_n+a\}\in\mathfrak{S}(a)$ et réciproquement, d'où résulte la première partie de la proposition. Si $\{a_n\}\in\mathfrak{S}$, on a $\{\sigma a_n\}\in\sigma\{\mathfrak{S}\}$ et réciproquement, d'où résulte la deuxième partie de la proposition.

7.2 *Si $\mathfrak{V}$ est un système fondamental de voisinages de o, $\sigma\{\mathfrak{V}\}=\{\sigma\{V\}\,;\ V\in\mathfrak{V}\}$ ($\sigma\neq 0$) est aussi un système fondamental de voisinages de o et $\mathfrak{V}(a)=\{Va\,;\ V\in\mathfrak{V}\}$, où Va désigne $\{x+a\,;\ x\in V\}$, est un système fondamental de voisinages de a.*

C'est la conséquence immédiate de la proposition 6.2 et des propriétés IV, V.

Nous désignerons dorénavant par $\mathfrak{V}a$ le système fondamental de voisinages de a: $\{Va\,;\ V\in\mathfrak{V}\}$. De même nous écrirons $\mathfrak{S}a$ au lieu de $\mathfrak{S}(a)$ en supprimant les parenthèses.

7.3 *Si les séries $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ et $\{\alpha_n\}$ sont convergentes, les séries $\{x_n+y_n\}$ et $\{\alpha_n x_n\}$ sont convergentes et l'on a*

$$\lim\,(x_n+y_n)=\lim x_n+\lim y_n\,,$$

$$\lim\,(\alpha_n\, x_n)=\lim \alpha_n\ \lim x_n\,.$$

C'est la conséquence immédiate des proposition 5.2, IV et V

7.4 *Soient $V\in\mathfrak{B}$ et $\{a_n\}$ une suite convergente. Il existe alors deux indices m et n tels que $a_n-a_m\in V$.*

En effet, si p est un entier quelconque mais déterminé, la suite $\{a_{n+p}\}$ converge vers le même point limite que $\{a_n\}$ et la suite $\{a_n-a_{n+p}\}$ converge vers o. a_n-a_{n+p} appartient donc à V pour n assez grand.

Remarque. $m-n$ peut prendre une valeur entière quelconque.

8. Ensembles bornés et ensembles compacts. Un ensemble E est dit *borné* si la condition suivante est remplie:

Quelles que soient la suite $\{a_n\}$ extraite de E et une suite de nombres $\{\varepsilon_n\}$ convergeant vers 0, on a $\varepsilon_n a_n\to o$.

8.1 *Si E est un ensemble borné et si V est un voisinage de o, on a $\sigma\{E\}\subseteq V$ pour σ assez petit.*

Supposons le contraire. On peut trouver une suite de nombres $\{\varepsilon_n\}$ convergeant vers 0 et telle que $\varepsilon_n\{E\}$ ne soit pas contenu dans V. On peut donc extraire de E une suite de points $\{a_n\}$ telle que $\varepsilon_n a_n\notin V$. Par suite $\{\varepsilon_n a_n\}$ ne converge pas vers o et E n'est pas borné.

Un ensemble E est dit *compact* si l'on peut extraire d'une suite quelconque extraite de E une suite partielle convergente.

8.2 *Un ensemble compact est borné.*

Soient $\{a_n\}$ une suite extraite d'un compact E et $\{\varepsilon_n\}$ une suite convergeant vers 0. Soit $\{\varepsilon'_n a'_n\}$ une suite partielle quelconque de $\{\varepsilon_n a_n\}$. $\{a'_n\}$ étant une suite extraite de E, on peut en extraire une suite partielle convergente $\{a''_n\}$. Soit $\{\varepsilon''_n\}$ la suite partielle correspondante de $\{\varepsilon'_n\}$. La suite $\{\varepsilon''_n a''_n\}$ converge vers o. Par suite, d'après 5.2″, la suite $\{\varepsilon_n a_n\}$ converge vers o.

8.3 *Si E est compact et si V est un voisinage, on peut extraire de E un nombre fini de points $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de manière que*

$$E\subseteq Va_1\cup Va_2\cup\cdots\cup Va_n.$$

Supposons le contraire. On peut alors extraire de E une suite $\{a_n\}$ telle que

$$a_{n+1}\notin Va_1\cup Va_2\cup\cdots\cup Va_n.$$

Si $m<n$, a_n n'appartient pas à Va_m. Par suite a_n-a_m n'appartient pas à V. D'après 7.4, on ne peut extraire de la suite $\{a_n\}$ une suite partielle convergente. Donc E n'est pas compact.

9. Sous-espaces linéaires. On dit ainsi le sous-espace qui est lui-même un espace vectoriel. Dorénavant, dans le cas de l'espace vectoriel, nous dirons simplement sous-espace au lieu de dire sous-espace linéaire. On a évidemment la proposition:

9.1 *Pour qu'un ensemble M dans un espace $(\mathfrak{L})$ linéaire soit un sous-espace, il faut et il suffit que $x\in M$, $y\in M$ entraînent $\alpha x+\beta y\in M$ pour les nombres quelconques α, β.*

L'expression: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$, est une ***combinaison linéaire*** de a_1, $a_2, \cdots, a_n$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un nombre fini de points appartenant à A est un sous-espace, que nous appelons ***sous-espace engendré par A***. Si toutes les combinaisons linéaires de points de A ne s'annulent que si leurs coefficients sont tous nuls, A est dit ***base*** (***algébrique***) du sous-espace M engendré par A. n points sont dits ***linéairement indépendants***, si aucun de ces points n'est une combinaison linéaire des autres. Si A ne contient qu'un nombre fini n de points linéairement indépendants, n est la ***dimension*** du sous-espace M. Nous écrirons alors $n = \dim M$.

A étant un ensemble, nous désignons par $Aa, \sigma\{A\}$ les ensembles

$$Aa = \{x+a\,;\, x \in A\}, \qquad \sigma\{A\} = \{\sigma x\,;\, x \in A\}.$$

A et B étant deux ensembles, nous désignons par $A \oplus B$ l'ensemble

$$A \oplus B = \{x+y\,;\, x \in A, y \in B\}.$$

Si, A et B étant deux sous-espaces, l'intersection $A \cap B$ ne contient que o, $A \oplus B$ est appelé la ***somme directe*** de A et de B. Nous écrirons dans ce cas $A \textcircled{\scriptsize{|}} B$ au lieu de $A \oplus B$. Si $A \textcircled{\scriptsize{|}} B = \mathfrak{R}$, l'un quelconque des sous-espaces A et B est un ***sous-espace supplémentaire*** de l'autre. Si $n = \dim B$, n est la ***codimension*** de A et on écrit $n = \operatorname{codim} A$.

Si, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ étant des sous-espaces, on a

$$\{A_1 \oplus \cdots \oplus A_k\} \cap A_{k+1} = \{o\}$$

pour $k = 1, 2, \cdots, n-1$, ces n sous-espaces sont dits ***linéairement indépendants***,

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$$

est appelé la somme directe de $A_1, A_2, \cdots, A_n$ et nous la désignerons par $A_1 \textcircled{\scriptsize{|}} A_2 \textcircled{\scriptsize{|}} \cdots \textcircled{\scriptsize{|}} A_n$.

9.2 *Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont des sous-espaces linéairement indépendants et si $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ est une permutation de $(1, 2, \cdots, n)$, l'intersection*

$$\{A_{j_1} \oplus \cdots \oplus A_{j_k}\} \cap \{A_{j_{k+1}} \oplus \cdots \oplus A_{j_n}\}$$

ne contient que o.

Pour démontrer la proposition par l'induction relative à n, nous la supposons vraie pour n diminué de l'unité. Nous pouvons supposer que $j_n = n$. Si l'on pose

$$A = A_{j_1} \oplus \cdots \oplus A_{j_k}, \; B = A_{j_{k+1}} \oplus \cdots \oplus A_{j_{n-1}}, \; C = A_{j_n},$$

on a $A \cap B = \{o\}$ par hypothèse et la relation à démontrer devient

$$A \cap \{B \oplus C\} = \{o\}.$$

Considérons un point quelconque a appartenant au premier membre. a peut s'écrire $a = b + c$, $b \in B$, $c \in C$. On a alors

$$c = a - b \in \{A \textcircled{\scriptsize{|}} B\} \cap C = \{o\}.$$

Par suite $c = o$, $a = b \in A \cap B = \{o\}$, d'où $a = o$.

10. Espace à la dimension finie. Démontrons la proposition

10.1 *Un espace* ($\mathfrak{L}$) *linéaire* $\mathfrak{R}$ *à la dimension finie* n *est homéomorphe à l'espace euclidien* $\mathfrak{E}_n$ *à la dimension* n.

Soit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ une base de l'espace $\mathfrak{R}$. A un point

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n$$

on fait correspondre le point X de $\mathfrak{E}_n$ dont les coordonnées sont $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$. Si une suite de points $\{X_k\}$ de $\mathfrak{E}_n$ converge vers X, les coordonnées $\xi_1^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)}$ de X_k convergent respectivement vers les coordonnées $\xi_1, \cdots, \xi_n$ de X. Par suite la suite correspondante $\{x_k\}$ dans $\mathfrak{R}$ converge vers le correspondant x de X.

Considérons ensuite le cas de

$$\rho_k^2 = |\xi_1^{(k)}|^2 + |\xi_2^{(k)}|^2 + \cdots + |\xi_n^{(k)}|^2 \to \infty .$$

Désignons par y_k le point $\dfrac{1}{\rho_k} x_k$ et par $\{Y_k\}$ le correspondant dans $\mathfrak{E}_n$. On peut extraire de la suite $\{Y_k\}$ une suite partielle convergente $\{Y_k'\}$ et le point limite Y est différent de l'origine. La suite partielle correspondante $\{y_k'\}$ de $\{y_k\}$ convergerait vers un point $\neq o$. Par suite la suite $\{x_k\}$ ne peut converger vers aucun point, car si elle convergeait, la suite $\{y_k'\}$ convergerait vers o.

On en conclut facilement que si la suite $\{x_k\}$ est convergente, la suite $\{X_k\}$ est bornée. On peut extraire d'une suite partielle quelconque $\{X_k'\}$ une suite partielle convergente. Son point limite X est le correspondant de $x = \lim x_k$. La suite $\{X_k\}$ converge donc vers X.

10.2 *Un sous-espace à la dimension finie est fermé.*

Soit R un sous-espace à la dimension finie n. S'il existait un point adhérent a de R n'appartenant pas à R, le sous-espace R à la dimension $n+1$ et contenant R et a serait homéomorphe à l'espace euclidien $\mathfrak{E}_{n+1}$ à la dimension $n+1$. Par cette homéomorphie, le sous-espace $\mathfrak{E}_n$ de $\mathfrak{E}_{n+1}$ qui correspond à R contiendrait une suite qui convergerait vers un point A n'apparatenant pas à $\mathfrak{E}_n$.

10.2′ *Si*

$$|\xi_1^{(k)}|^2 + |\xi_2^{(k)}|^2 + \cdots + |\xi_n^{(k)}|^2 \to \infty ,$$

la suite des points

$$x_k = \xi_1^{(k)} a_1 + \xi_2^{(k)} a_2 + \cdots + \xi_n^{(k)} a_n \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

ne peut converger vers aucun point.

10.3 *Si* M *est un sous-espace fermé, et si* A *est un sous-espace à la dimension finie* n, $A \oplus M$ *est un sous-espace fermé.*

Pour démontrer cette proposition par l'induction relative à n, il suffit de considérer seulement le cas où A est engendré par un seul point a n'appartenant pas à M. Si y est un point adhérent de $A \oplus M$, on peut extraire de $A \oplus M$ une suite $\{\alpha_n a + x_n\}$ $(x_n \in M)$ convergeant vers y. Si la suite $\{\alpha_n\}$ est bornée, on peut en extraire une suite convergente $\{\alpha_n'\}$. Si $\{x_n'\}$ est la suite partielle correspondante de $\{x_n\}$, $\{\alpha_n' a + x_n'\}$ converge vers y, et $\{\alpha_n' a\}$ convergeant vers un point αa de A, $\{x_n'\}$ converge vers un point x qui appartient à M. $y=\alpha a + x$ est alors un point de $A \oplus M$. L'hypothèse qu'il existe une suite partielle bornée de $\{\alpha_n\}$ entraîne la même conclusion.

Si l'on avait $|\alpha_n| \to \infty$, $\left\{a + \frac{1}{\alpha_n} x_n\right\}$ convergerait vers o, et $\left\{\frac{1}{\alpha_n} x_n\right\}$ convergerait vers $-a$. M étant fermé, a appartiendrait à M contrairement à l'hypothèse.

11. Espace quotient. Soient $\mathfrak{R}$ un espace vectoriel et M un sous-espace. L'ensemble des classes

$$Mx = \{x+y\,;\, y \in M\}$$

forme un espace vectoriel appelé ***espace quotient*** et désigné par $\mathfrak{R}/M$ si l'on y définit l'addition et la multiplication par

$$Mx + My = M(x+y), \qquad \lambda(Mx) = M(\lambda x).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $Mx = My$ est que $x-y$ appartienne à M. Nous écrirons dans ce cas $x \equiv y \pmod{M}$.

E étant un ensemble dans $\mathfrak{R}$, nous désignons par $M\{E\}$ l'ensemble

$$M\{E\} = \{Mx\,;\, x \in E\}$$

et par ME la réunion des classes de $M\{E\}$: $ME = M \oplus E$. $\Phi = \{a_n\}$ étant une suite dans $\mathfrak{R}$, nous désignons par $M\{\Phi\}$ la suite correspondante dans $\mathfrak{R}/M$: $M\{\Phi\} = \{Ma_n\}$.

Soit $\mathfrak{R}$ un espace $(\mathfrak{L})$ linéaire. Nous désignons par $\mathfrak{S}(Mx)$ le système

$$\mathfrak{S}(Mx) = \{M\{\Phi\},\, \Phi \in \mathfrak{S}x\}\,.$$

Si $\Phi = \{a_n\}$, Φx désigne la suite $\Phi x = \{a_n + x\}$. On a alors

$$\mathfrak{S}(Mx) = \{M\{\Phi x\}\,;\, \Phi \in \mathfrak{S}\}\,.$$

Si Φ' est une suite partielle de la suite Φ, $M\{\Phi'\}$ est une suite partielle de $M\{\Phi\}$. Si de plus M est fermé, on a

$$\mathfrak{S}(Mx) \cap \mathfrak{S}(My) = 0$$

pour $Mx \neq My$. En effet, considérons une suite $M\{\Phi\} = \{Ma_n\}$ appartenant au premier membre. On peut écrire

$$a_n \equiv a_n' + x \equiv a_n'' + y \qquad \pmod{M},$$

$\{a_n'\}$ et $\{a_n''\}$ appartenant à $\mathfrak{S}$. On a donc

$$a_n' - a_n'' = y - x + c_n\,,$$

c_n appartenant à M. La suite $\{a_n' - a_n''\}$ appartenant à $\mathfrak{S}$, la suite $\{c_n\}$ converge vers $x-y$. M étant supposé fermé, $x-y$ appartient à M.

Par suite, si M est un sous-espace fermé, la famille des systèmes de suites $\{\mathfrak{S}(Mx)\,;\, Mx \in \mathfrak{R}/M\}$ définit une topologie appelée ***topologie quotient*** dans $\mathfrak{R}/M$.

Et on voit que l'espace quotient est un espace ($\mathfrak{L}$) linéaire, c'est-à-dire qu'il satisfait aux conditions analogues à IV et V.

11.1 *Si M est un sous-espace fermé de l'espace ($\mathfrak{L}$) linéaire $\mathfrak{R}$ et si $\mathfrak{V}$ est un système fondamental de voisinages dans $\mathfrak{R}$,*

$$\mathfrak{V}(M)=\{M\{V\};\, V\in\mathfrak{V}\}$$

est un système fondamental de voisinages dans l'espace quotient $\mathfrak{R}/M$.

Soit Ma une classe adhérente de l'ensemble $M\{E\}$. On peut extraire de $M\{E\}$ une suite $M\{\Phi a\}\in\mathfrak{S}(Ma)$. Un voisinage quelconque Va de a contient presque tous les points de Φa. $M\{Va\}$ contient donc au moins une classe de $M\{E\}$.

Réciproquement, supposons que chaque voisinage $M\{Va\}$ contient au moins un élément de $M\{E\}$. On peut supposer $E=M\oplus E$, car $M\{M\oplus E\}=M\{E\}$. Va contient alors au moins un point de E. a est donc un point adhérent de E, et on peut extraire de E une suite $\Phi a\in\mathfrak{S}a$. $M\{\Phi a\}$ est une suite extraite de $M\{E\}$ et appartient à $\mathfrak{S}(Ma)$.

12. Espace avec voisinage compact. Démontrons d'abord la proposition:

12.1 *Soient M un sous-espace fermé, E un ensemble tel que $M\{E\}$ est borné dans $\mathfrak{R}/M$ et N un sous-espace à la dimension finie. Si $M\cap N=\{o\}$, l'ensemble*

$$\{x\in N;\, E\cap Mx\neq o\}$$

est borné.

Supposons le contraire. On pourrait extraire de N une suite de points $\{x_n\}$ dont l'image dans l'espace euclidien s'écarte à l'infini et telle que $E\cap Mx_n\neq 0$. On pourrait supposer de plus que $\varepsilon_n x_n\to a\neq o$, $\{\varepsilon_n\}$ tendant vers 0. Par suite $\varepsilon_n(Mx_n)\to Ma$, et a n'appartenant pas à M, Ma est différent de M. Or, $M\{E\}$ étant borné, $\varepsilon_n(Mx_n)\to M$. On a donc une contradiction.

12.2 *Soient M un sous-espace fermé et E un ensemble tel que $M\{E\}$ est borné dans $\mathfrak{R}/M$ et ne coïncide pas avec M. On peut alors faire correspondre à un nombre positif σ plus petit que 1 un point $b\in E$, tel que $(\sigma\{E\})b\cap M=0$.*

Soit a un élement de E n'appartenant pas à M. L'ensemble $\{|\lambda|;\, M(\lambda a)\cap E\neq 0\}$ étant borné, sa borne supérieure α est finie. 1 appartenant à cet ensemble, α est au moins égal à 1. On peut trouver une suite de nombres $\{\alpha_n\}$ et une suite de points $\{a_n\}$ telles que $|\alpha_n|\to\alpha$, $a_n\in M$, $b_n=\alpha_n a+a_n\in E$. Il suffit de montrer que l'on a $(\sigma\{E\})b_n\cap M=0$ pour un certain n. Supposons donc le contraire.

Il existerait donc un point $y_n\in M\cap(\sigma\{E\})b_n$. On en déduirait $\frac{1}{\sigma}(y_n-b_n)\in E$. Or, on a

$$\frac{1}{\sigma}(y_n-b_n)=-\frac{\alpha_n}{\alpha}a+\frac{1}{\sigma}(y_n-a_n),\quad \frac{1}{\sigma}(y_n-a_n)\in M,$$

d'où

$$E \cap M\left(-\frac{\alpha_n}{\alpha}a\right) \neq 0.$$

Par suite on aurait $|\alpha_n| \leqq \sigma\alpha$, qui n'est pas compatible avec $|\alpha_n| \to \alpha$.

12.3 *S'il existe un voisinage compact V, l'espace est à la dimension finie.*

Supposons la dimension de l'espace infinie. Prenons un point quelconque $a_1 \in V$. Nous supposons définis n points linéairement indépendants $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Soit M_n le sous-espace engendré par $a_1, a_2, \cdots, a_n$. σ étant donné $(0 < \sigma < 1)$, on pourrait trouver, d'après 12.2, un point $a_{n+1} \subset V$ tel que $(\sigma\{V\})a_{n+1} \cap M_n = 0$. On pourrait de la suite $\{a_n\}$ extraire une suite convergente $\{a_n'\}$. $\{a_n' - a'_{n+1}\}$ convergeant vers o, on aurait $a_n' - a'_{n+1} \in \sigma\{V\}$ pour n assez grand. Or, si M' est le sous-espace engendré par $a_1', \cdots, a_n'$, on a $(\sigma\{V\})a'_{n+1} \cap M' = 0$ qui est équivalente à $\sigma\{V\} \cap M'(-a'_{n+1}) = 0$. a_n' appartenant à M', $a_n' - a'_{n+1}$ n'appartiendrait pas à $\sigma\{V\}$. C'est une contradiction.

III. Endomorphismes complètement continus.

13. Continuité d'un opérateur linéaire. Soit L un opérateur linéaire qui applique un espace $(\mathfrak{L})$ linéaire $\mathfrak{R}$ dans un espace $(\mathfrak{L})$ linéaire $\mathfrak{R}'$. Il est évident que la continuité de L en o entraîne celle de L en un autre point quelconque. On peut donc définir la continuité de L par la propriété:

$$Lx_n \to o' \qquad \text{pour} \qquad \{x_n\} \in \mathfrak{S}.$$

13.1 *Pour qu'un opérateur linéaire L soit continu, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie:*

A chaque voisinage V' de o', on peut faire correspondre un voisinage V de o tel que $L\{V\} \subseteqq V'$.

C'est la conséquence immédiate de la proposition 6.2.

Si L' est un opérateur linéaire qui applique $\mathfrak{R}'$ dans un espace $(\mathfrak{L})$ linéaire $\mathfrak{R}''$, le produit $L'L$ sera défini par la relation: $(L'L)x = L'(Lx)$. Si L et L' sont continus, leur produit est aussi continu.

Si K est un opérateur linéaire qui applique $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}'$, la somme $L+K$ sera définie par la relation $(L+K)x = Lx + Kx$. Si L et K sont continus, leur somme est aussi un opérateur linéaire continu; c'est la conséquence de la proposition 7.3.

L'opérateur L est dit *complètement continu*, s'il existe un voisinage V dont l'image $V' = L\{V\}$ est compacte.

13.2 *Un opérateur linéaire complètement continu L est continu.*

En effet, soit U' un voisinage quelconque de o'. D'après 8.1 et 8.2, on aura $\sigma\{V'\} \subseteqq U'$ pour un certain nombre $\sigma \neq 0$. $\sigma\{V\}$ est un voisinage de o dont l'image par L est contenue dans U'.

13.3 *Si l'un des opérateurs linéaires continus L et L' est complètement continu, $L'L$ est aussi complètement continu.*

Si L est complètement continu, il existe un voisinage V dont l'image

$V'=L\{V\}$ est compacte. L' étant continu, l'image $L'\{V'\}$ est compact.

Si L' est complètement continu, il existe un voisinage U' dont l'image $L'\{U'\}$ est compacte. D'après la continuité de L, il existe un voisinage V dont l'image $V'=L\{V\}$ est contenue dans U'. Alors l'image de V par $L'L$ est compacte.

13.4 *Si L et K sont complètement continus, $L+K$ est aussi complètement continu.*

D'après 3.1, il existe un voisinage V dont les images $L\{V\}$ et $K\{V\}$ sont compactes. Soit Φ une suite quelconque extraite de V. On peut en extraire une suite partielle Φ' dont l'image par L est convergente. On peut en extraire une suite partielle Φ'' dont l'image par K est convergente. $L\{\Phi''\}$, $K\{\Phi''\}$ étant convergentes, $(L+K)\{\Phi''\}$ est convergente.

13.5 *Si M et N sont des sous-espaces fermés tels que $M\supseteqq N$, M est un opérateur linéaire continu de $\mathfrak{R}/N$ dans $\mathfrak{R}/M$.*

Un voisinage quelconque de M est $M\{V\}$, où V désigne un voisinage quelconque de o. $N\{V\}$ est un voisinage de N, dont l'image par M est $M\{N\{V\}\}=MN\{V\}=M\{V\}$.

13.6 *Si L est complètement continu et si M et N sont des sous-espaces fermés tels que $M\supseteqq L\{N\}$, ML est un opérateur linéaire complètement continu de $\mathfrak{R}/N$ dans $\mathfrak{R}/M$.*

Il existe un voisinage V dont l'image $V'=L\{V\}$ est compacte. $N\{V\}$ est un voisinage de N dans $\mathfrak{R}/N$ et l'image de $N\{V\}$ par ML: $ML\{N\{V\}\}=M\{V'\}$ est compacte.

14. Propriétés de N^n. Soient L un endomorphisme d'un espace $(\mathfrak{L})$ linéaire $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire un opérateur linéaire qui applique $\mathfrak{R}$ dans lui-même. Nous définissons les sous-espaces N^n et N_n par $N^n=L^{-n}\{o\}$, $N_n=L^n\{\mathfrak{R}\}$, et les entiers μ et ν par

$$\mu=\inf\{n\,;N^n=N^{n+1}\}, \qquad \nu=\inf\{n\,;N_n=N_{n+1}\}.$$

Si l'on a $N^n\subset N^{n+1}$ pour tous les entiers positifs n, on pose $\mu=\infty$. De même, $\nu=\infty$ signifie que $N_n\supset N_{n+1}$ pour tous les entiers positifs n. On sait déjà que, si μ et ν sont finis, on a $\mu=\nu$. Il est à démontrer que dans le cas de $L=I-K$, où K est un endomorphisme complètement continu, μ et ν sont finis.

Si l'on pose $L^n=I-K_n$, on a

$$K_n=nK-\binom{n}{2}K^2+\cdots+(-1)^{n-2}\binom{n}{n-1}K^{n-1}+(-1)^{n-1}K^n.$$

K_n est donc complètement continu. Par suite, il existe un voisinage V_n dont l'image par K_n est compacte. Le point x de N^n est caractérisé par la relation $x=K_nx$. On a donc

$$K_n\{V_n\cap N^n\}=V_n\cap N^n,$$

et $V_n \cap N^n$ est un voisinage compact de o dans N^n. Par suite,

14.1 *La dimension de N^n est finie.*

Démontrons maintenant la proposition:

14.2 *$V_1 \cap N^n$ est compact.*

Supposons le contraire. On pourrait alors extraire de $V_1 \cap N^n$ une suite $\{x_k\}$ telle que l'on ne puisse en extraire aucune suite partielle convergente. La dimension de N^n étant finie, on pourrait déterminer $\rho_k > 0$ de manière que de la suite $\left\{\frac{1}{\rho_k} x_k\right\}$ on puisse extraire une suite partielle $\{y_k'\}$ convergeant vers un point $y \neq o$, et l'on aurait $\rho_k \to \infty$. $K\{V_1\}$ étant compact, $z_k' = Ky_k'$ convergerait vers o. On aurait donc $Ky = o$, d'où $K_n y = o$. y appartenant à N^n, on aurait $y = K_n y = o$, ce qui est absurde.

14.3 *L'entier μ est fini.*

Supposons le contraire. D'après 12.2, on peut trouver un point $a^n \in V_1 \cap N^n$ tel que

$$(\sigma\{V_1 \cap N^n\}) a^n \cap N^{n-1} = 0,$$

σ étant un nombre positif plus petit que 1. Cette relation entraîne évidemment

$$\sigma\{V_1\} \cap N^{n-1}(-a^n) = 0.$$

Le point $b^n = Ka^n$ appartient à N^n mais non à N^{n-1}. On peut extraire de la suite $\{b^n\}$ une suite partielle convergente $\{b'^n\}$. Si $m < n$, le point $x = a^n - b^n + b^m$ appartient à N^{n-1}. Par suite $b^m - b^n$ appartient à $N^{n-1}(-a^n)$ et non à $\sigma\{V_1\}$. Mais la suite $\{b'^n\}$ étant convergente, $b^m - b^n$ devrait, d'après 7.4, appartenir à $\sigma\{V_1\}$ pour les certains entiers m et n.

15. Propriétés de N_n. Soit a un point adhérent de N_1. On peut extraire de N_1 une suite $\{a_n\} \in \mathfrak{S}a$, et l'on peut écrire $a_n = Lb_n$. Si $N^1 b_n \cap V_1 \neq 0$, on peut supposer que $b_n \in V_1$. On peut extraire de la suite $\{Kb_n\}$ une suite partielle convergente $\{Kb_n'\}$. La suite $\{a_n'\}$, où $a_n' = Lb_n'$, étant une suite partielle de $\{a_n\}$, elle converge vers a. Alors la suite $\{b_n'\}$ est convergente et si b est son point limite, on a $a = Lb \in N_1$.

Il en est de même s'il existe un nombre positif σ tel que $N^1 b_n \cap \sigma\{V_1\} \neq 0$ pour une infinité de n. Supposons donc la non-existence d'un tel nombre σ.

Soit

$$\alpha_n = \inf\{\alpha\,;\, N^1 b_n \cap \sigma\{V_1\} \neq 0 \text{ pour } \alpha < \sigma < \infty\}.$$

D'après l'hypothèse, $\alpha_n \to \infty$. Il existe un nombre σ_n tel que

$$\frac{1}{2}\alpha_n < \sigma_n \leqq \alpha_n, \qquad N^1 b_n \cap \sigma_n\{V_1\} = 0$$

et l'on aurait ensuite

$$N^1 b_n \cap 2\sigma_n\{V_1\} \neq 0 \qquad \sigma_n \to \infty.$$

On peut supposer que $b_n \in 2\sigma_n\{V_1\}$. Si l'on pose $c_n = \dfrac{1}{2\sigma_n} b_n$, on peut extraire de la suite $\{Kc_n\}$ une suite partielle convergente. On peut donc supposer, sans perdre la généralité, que la suite $\{Kc_n\}$ converge vers un point c. On aurait alors

$$c_n = Kc_n + \frac{1}{2\sigma_n} a_n \to c\,, \qquad Lc_n = c_n - Kc_n \to o\,.$$

Puis on aurait $Lc = o$ et $c \in N^1$.

D'autre part, $N^1 b_n \cap \sigma_n\{V_1\} = 0$ est équivalente à $2c_n \notin N^1\{V_1\}$, et $\{c_n\}$ ne pourrait converger vers aucun point de N^1. On est arrivé ainsi à une contradiction.

Donc le point a appartient toujours à N_1, et N_1 est fermé. Si l'on considère L^n au lieu de L, on obtient la proposition:

15.1 *Le sous-espace N_n est fermé.*

D'après 13.6, N_nK est un endomorphisme complètement continu de $\mathfrak{R}/N_n$, et l'on a $(N_nL)^{-1}\{N_n\} = N_{n-1}/N_n$. La dimension de N_{n-1}/N_n est donc finie. n étant arbitraire, on a la proposition:

15.2 *La codimension de N_n est finie.*

Considérons une suite $\{N_{n+1}x_k\}$ $(x_k \in V_1 \cap N_n)$. On peut extraire de la suite $\{Kx_k\}$ une suite partielle convergente $\{Kx_k'\}$. Le point limite $y = \lim Kx_k'$ appartient à N_n. Puisque $Kx_k' = x_k' - Lx_k'$, $Lx_k' \in N_{n+1}$, on a

$$N_{n+1}\, x_k' = N_{n+1}\, Kx_k' \to N_{n+1}\, y \in N_n/N_{n+1}\,.$$

Par suite, $N_{n+1}\{V_1 \cap N_n\}$ est compact dans N_n/N_{n+1}. Si $N_{n+1} \subset N_n$, $N_{n+1}\{V_1 \cap N_n\}$ ne coïncide pas avec N_{n+1}. La proposition 12.2 montre qu'il existe un point $a_n \in V_1 \cap N_n$ tel que

$$(\sigma\{V_1 \cap N_n\})a_n \cap N_{n+1} = 0\,,$$

σ étant un nombre positif plus petit que 1. Cette relation entraîne $\sigma\{V_1\} \cap N_{n+1}(-a_n) = 0$. Si $\nu = \infty$, on aurait une suite $\{a_n\}$ extraite de V_1. Posons $b_n = Ka_n$. Si $m > n$, le point $x_n = a_n - b_n + b_m$ appartient à N_{n+1} et l'on a $b_m - b_n \in N_{n+1}(-a_n)$. Par suite $b_m - b_n \notin \sigma\{V_1\}$. $\{a_n\}$ étant une suite extraite de V_1, on peut extraire de la suite $\{b_n\}$ une suite partielle convergente $\{b_n'\}$. On devrait donc avoir $b_m - b_n \in \sigma\{V_1\}$ pour les certains nombres m et n. On aboutit ainsi à une contradiction. On a par suite la proposition:

15.3 *L'entier ν est fini.*

16. Continuité du supplémentaire. Considérons en particulier le cas de $\mu = \nu = 0$. L'équation en y: $Ly = x$ admet toujours une solution et une seule que nous désignerons par $y = L^{-1}x = (I - H)x$.

16.1 *Si K est un endomorphisme complètement continu tel que $\mu = \nu = 0$ pour $L = I - K$, $H = I - L^{-1}$ est un endomorphisme complètement continu.*

On voit sans peine que L^{-1} et H sont des endomorphismes.

Pour démontrer la continuité de L^{-1}, prenons une suite $\{a_n\}\subset\mathfrak{S}$. Supposons démontrée l'existence de $\sigma>0$ tel que $b_n=L^{-1}a_n\in\sigma\{V_1\}$ pour presque tous les n. Soit $\{b_n'\}$ une suite partielle extraite de $\{b_n\}$, et posons $Lb_n'=a_n'$. On peut extraire de la suite $\{Kb_n'\}$ une suite partielle convergente $\{Kb_n''\}$. Soit b sa limite. Si l'on pose $a_n''=Lb_n''$, la suite $\{a_n''\}$ converge vers o, car elle est une suite partielle de $\{a_n\}$. On a donc $b_n''=a_n''+Kb_n''\to b$, et puis $Lb=o$, d'où $b=o$. Par suite $L^{-1}a_n\to o$, ce qui montre la continuité de L^{-1}.

Pour démontrer l'existence de σ, supposons le contraire. Posons

$$\tau_n=\inf\{\tau\,;\,b_n\in\rho\{V_1\}\ \text{pour}\ \tau<\rho<\infty\}\,.$$

On pourrait extraire de la suite $\{\tau_n\}$ une suite partielle $\{\tau_n'\}$ telle que $\tau_n'\to\infty$. Soit $\{b_n'\}$ la suite partielle correspondante de $\{b_n\}$. Il existerait un nombre σ_n' tel que $\tau_n'/2<\sigma_n'\leqq\tau_n'$, $b_n'\notin\sigma_n'\{V_1\}$. Le point $c_n'=\dfrac{1}{2\sigma_n'}b_n'$ appartenant à V_1, on pourrait extraire de la suite $\{Kc_n'\}$ une suite partielle convergente. On pourrait donc supposer, sans perdre la généralité, que $Kc_n'\to c'$. On aurait alors

$$c_n'=\frac{1}{2\sigma_n'}a_n'+Kc_n'\to c'\,,\qquad Lc'=o\,,$$

et puis $c'=o$. D'autre part, $2c_n'$ n'appartenant pas à V_1, la suite $\{c_n'\}$ ne pourrait converger vers o contrairement à $c'=o$.

L^{-1} étant continu, $V'=L\{V_1\}$ est un voisinage de o. Soit $\{a_n\}$ une suite extraite de V' et posons $b_n=L^{-1}a_n$. $\{b_n\}$ est une suite extraite de V. On peut donc extraire de la suite $\{Kb_n\}$ une suite partielle convergente $\{Kb_n\}$. Soit $\{a_n'\}$ la suite partielle correspondante de $\{a_n\}$. Or, on a $H=-KL^{-1}$. Par suite $Ha_n'=-Kb_n'$. La suite $\{Ha_n'\}$ est donc convergente. La compacité de $H\{V'\}$ est donc démontrée.

Dans le cas général, l'espace $\mathfrak{R}$ est la somme directe de N^μ et de N_ν : $\mathfrak{R}=N^\mu\oplus N_\nu$. Soit $\underline{L}=I-\underline{H}$ un endomorphisme supplémentaire de L. Dans N_ν, $\underline{L}$ est l'endomorphisme inverse de L. Par suite l'endomorphisme $\underline{H}$ restreint à N_ν est complètement continu. La dimension de N^μ étant finie, l'endomorphisme $\underline{H}$ restreint à N^μ est complètement continu aussi dans N^μ. On a donc la proposition:

16.2 *Si $K=I-L$ est un endomorphisme complètement continu et si $\underline{L}=I-\underline{H}$ est un endomorphisme supplémentaire de L, $\underline{H}$ est un endomorphisme complètement continu.*

Note. Ce présent mémoire est le manuscrit de M. Hukuhara qui a eu l'occasion de tenir cinq conférences sur notre sujet à l'Instituto Nazionale di Alta Matematica à Rome en mars-avril 1956. La plupart des résultats a été publiée sommairement dans les Proceedings of the Japan Academy, **31** (1955), 595-599.