Sur un système d'équations différentielles ordinaires à coefficients presque-périodiques et contenant des paramètres.

Par Yasutaka SIBUYA.

Introduction.

1. Soit

(1.1) $$dx_j/dt = f_j(x_1, \cdots, x_n; t) \qquad (j=1, \cdots, n)$$

un système d'équations différentielles en variables complexes $x_1, \cdots, x_n$ dont les seconds membres se développent suivant les puissances croissantes de $x_1, \cdots, x_n$ pour

(1.2) $$||x|| \equiv \max_{j=1}^{n} |x_j| < \delta \quad (\delta > 0), \qquad -\infty < t < +\infty .$$

Supposons que tous les coefficients de f_j sont continues et admettent une période commune $\omega > 0$ par rapport à t, et que l'origine est un point d'équilibre:

(1.3) $$f_j(0, \cdots, 0; t) = 0 \qquad (j=1, \cdots, n).$$

Soit

(1.4) $$x_j = \phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_p) \qquad (j=1, \cdots, n)$$

une solution de (1.1) contenant des constantes complexes arbitraires $\eta_1, \cdots, \eta_p$, où les $\phi_j(t; \eta)$ sont continues en t, η, et holomorphes en η pour

(1.5) $$||\eta|| < \delta' \qquad (\delta' > 0), \qquad 0 \leq t < +\infty ;$$

de plus, supposons

(1.6) $$\phi_j(t; 0) = 0 \qquad (j=1, \cdots, n),$$

et

(1.7) $$|\phi_j(t; \eta)| \leq M \qquad (j=1, \cdots, n)$$

pour (1.5), où M est une constante positive indépendante de t et de η.

Dans ce présent mémoire, *nous allons élucider comment on peut trouver de pareilles solutions de* (1.1).

2. Nous avons démontré antérieurement que, *sous les hypothèses de n° 1, la solution* (1.4) *s'approche asymptotiquement d'une solution presque-périodique de* (1.1) *pour* $t \to +\infty$[1]. Celle-ci dépend aussi analytiquement d'un certain nombre

1) Y Sibuya [1; Théorème I].

de constantes arbitraires. Pour trouver de pareilles solutions presque-périodiques, on peut utiliser, sauf certains cas très singuliers, la même méthode que nous avons employée pour obtenir les solutions périodiques de (1.1)[2]. Donc, sauf des cas exceptionnels que nous laisserons de côté, on peut supposer que l'on ait trouvé une solution de (1.1)

$$x_j=\varphi_j(t;\zeta_1,\cdots,\zeta_r)\qquad (j=1,\cdots,n) \tag{2.1}$$

les $\varphi_j(t;\zeta)$ étant continues en t, ζ, holomorphes en ζ et, uniformément pour ζ, presque-périodiques par rapport à t dans un domaine

$$\|\zeta\|<\delta'\quad(\delta'>0),\qquad -\infty<t<+\infty. \tag{2.2}$$

Alors, *notre problème se réduit à trouver la solution de* (1.1) *qui s'approche asymptotiquement de la solution presque-périodique* (2.1) *pour* $t\to+\infty$.

3. Pour aborder le problème ci-dessus, il faut d'abord étudier les équations aux variations, obtenues en posant dans (1.1) $x_j=y_j+\varphi_j(t;\zeta)$ et en négligeant les termes de degrés supérieurs en y_j. Elles sont les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques et contenant des paramètres $\zeta_1,\cdots,\zeta_r$. Nous avons déjà étudié précisément les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques et contenant des paramètres[3], mais notre méthode exposée là ne s'applique pas aux équations à coefficients presque-périodiques. Donc, nous étudierons de telles équations différentielles linéaires dans la section I, en supposant que *leurs coefficients se réduisent aux constantes pour* $\zeta=0$.

4. Dans la section II, en posant dans (1.1) $x_j=y_j+\varphi_j(t;\zeta)$, nous considérerons les équations en y. Elles sont les équations non linéaires à coefficients presque-périodiques et contenant des paramètres $\zeta_1,\cdots,\zeta_r$. À l'aide des résultats de la section I, on pourrait obtenir aisément la solution de ces équations qui tendent vers l'origine $y=0$ pour $t\to+\infty$. Cette solution correspond à la solution de (1.1) qui s'approche asymptotiquement de la solution presque-périodique (2.1).

I. Les équations linéaires.

5. Théorème 1. Soit donné un système d'équations linéaires

$$d\vec{x}/dt=A(t;\zeta_1,\cdots,\zeta_r)\vec{x} \tag{5.1}$$

où $\vec{x}$ est un vecteur à n composants complexes et $A(t;\zeta)$ est une matrice continue en tous les arguments, holomorphe en ζ et, uniformément pour ζ, presque-périodique par rapport à t dans un domaine $\mathfrak{D}_\delta$.[4] Supposons que la

2) Y. Sibuya [2], [1; Lemme III et Théorème III].
3) Y. Sibuya [3].
4) Nous désignerons par $\mathfrak{D}_\delta$ un domaine
$$\|\zeta\|<\delta\quad(\delta>0),\qquad -\infty<t<+\infty.$$

matrice $A_0 \equiv A(t;0)$ soit indépendante de t et soit de la forme canonique de Jordan:

$$
A_0 = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_s \end{pmatrix} \tag{5.2}
$$

$$
A_k = \lambda_k E_{n_k} + D_k \qquad (k=1,\cdots,s)^{5)};
$$

les λ_k sont des valeurs caractéristiques de A_0 différentes l'une de l'autre et les D_k sont des matrices carrées de la forme

$$
D_k = \begin{pmatrix} 0 & & & O \\ \delta_1^k & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & \delta_{n_k-1}^k & 0 \end{pmatrix} \qquad (k=1,\cdots,s),
$$

où $\delta_j^k = 1$ ou 0. De plus, on peut supposer même, sans perdre la généralité, les λ_k réels.

Considérons une transformation linéaire

$$
\vec{x} = P(t;\zeta_1,\cdots,\zeta_r)\vec{y}, \tag{5.3}
$$

où $P(t;\zeta)$ est une matrice carrée continue en t, ζ, holomorphe en ζ et, uniformément pour ζ, presque-périodique par rapport à t dans $\mathfrak{D}_{\delta'}$, $P(t;0)$ étant identiquement égale à E. Soit

$$
d\vec{y}/dt = B(t;\zeta_1,\cdots,\zeta_r)\vec{y} \tag{5.4}
$$

les équations en $\vec{y}$. $B(t;\zeta)$ admet la même propriété que celle de $A(t;\zeta)$. En particulier, on a

$$
B(t;0) = A_0. \tag{5.5}
$$

Correspondant à l'expression (5.2) de A_0, nous écrivons

$$
B(t;\zeta) = \begin{pmatrix} B_{11}(t;\zeta), & \cdots, & B_{1s}(t;\zeta) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \\ B_{s1}(t;\zeta), & \cdots, & B_{ss}(t;\zeta) \end{pmatrix}. \tag{5.6}
$$

Théorème 1. *En choisissant une transformation* (5.3) *convenablement, on peut donner à la matrice $B(t;\zeta)$ la forme*

$$
B(t;\zeta) = \begin{pmatrix} B_{11}(t;\zeta), & O, & O, & \cdots, & O, & O \\ O, & B_{22}(t;\zeta), & O, & \cdots, & O, & O \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ O, & O, & O, & \cdots, & O, & B_{ss}(t;\zeta) \end{pmatrix}. \tag{5.7}
$$

5) E_m est la matrice-unité à m dimensions; en particulier, $E = E_n$.

c'est-à-dire on peut annuler les $B_{jk}(t;\zeta)$ pour $j\neq k$.

6. La démonstration du théorème 1. Posons d'abord

$$A(t;\zeta)=A_0+\sum_{\sigma(\mathfrak{p})\geqq 1} A_{\mathfrak{p}}(t)\,\zeta_1^{p_1}\cdots\zeta_r^{p_r},$$

$$B(t;\zeta)=A_0+\sum_{\sigma(\mathfrak{p})\geqq 1} B_{\mathfrak{p}}(t)\,\zeta_1^{p_1}\cdots\zeta_r^{p_r},$$

$$P(t;\zeta)=E+\sum_{\sigma(\mathfrak{p})\geqq 1} P_{\mathfrak{p}}(t)\,\zeta_1^{p_1}\cdots\zeta_r^{p_r},$$

où $\mathfrak{p}=(p_1,\cdots,p_r)$ et $\sigma(\mathfrak{p})=p_1+\cdots+p_r$.

Correspondant à l'expression (5.2) de A_0, nous écrivons

$$B_{\mathfrak{p}}(t)=\begin{pmatrix} B_{\mathfrak{p}11}(t), & \cdots, & B_{\mathfrak{p}1s}(t) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \\ B_{\mathfrak{p}s1}(t), & \cdots, & B_{\mathfrak{p}ss}(t)\end{pmatrix},$$

$$P_{\mathfrak{p}}(t)=\begin{pmatrix} P_{\mathfrak{p}11}(t), & \cdots, & P_{\mathfrak{p}1s}(t) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \\ P_{\mathfrak{p}s1}(t), & \cdots, & P_{\mathfrak{p}ss}(t)\end{pmatrix}.$$

Alors, les conditions (5.7) sont remplacées par les conditions

$$B_{\mathfrak{p}jk}(t)=O \qquad (j\neq k). \tag{6.1}$$

Entre les matrices A, B, P, on a la relation

$$\partial P(t;\zeta)/\partial t=A(t;\zeta)\,P(t;\zeta)-P(t;\zeta)\,B(t;\zeta),$$

d'où

$$dP_{\mathfrak{p}}(t)/dt=A_0P_{\mathfrak{p}}(t)-P_{\mathfrak{p}}(t)A_0-B_{\mathfrak{p}}(t)+H_{\mathfrak{p}}(t),$$

ou, en vertu de (6.1),

$$\begin{cases} dP_{\mathfrak{p}jk}(t)/dt=A_jP_{\mathfrak{p}jk}(t)-P_{\mathfrak{p}jk}(t)A_k+H_{\mathfrak{p}jk}(t) & (j\neq k), \\ dP_{\mathfrak{p}jj}(t)/dt=A_jP_{\mathfrak{p}jj}(t)-P_{\mathfrak{p}jj}(t)A_j+H_{\mathfrak{p}jj}(t) \\ \qquad -B_{\mathfrak{p}jj}(t); \end{cases} \tag{6.2}$$

les $H_{\mathfrak{p}}(t)$ et $H_{\mathfrak{p}jk}(t)$ sont définis par les relations

$$H_{\mathfrak{p}}(t)=A_{\mathfrak{p}}(t)+\sum_{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}_1}(t)\,P_{\mathfrak{p}_2}(t)-\sum_{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}} P_{\mathfrak{p}_1}(t)\,B_{\mathfrak{p}_2}(t)$$

$$=\begin{pmatrix} H_{\mathfrak{p}11}(t), & \cdots, & H_{\mathfrak{p}1s}(t) \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \\ H_{\mathfrak{p}s1}(t), & \cdots, & H_{\mathfrak{p}ss}(t)\end{pmatrix},$$

la sommation étant étendue à toutes les paires $(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2)$ telles que $\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}$ et que $0<\sigma(\mathfrak{p}_j)<\sigma(\mathfrak{p})$ $(j=1,2)$.

On peut prendre

$$B_{\mathfrak{p}jj}(t)=H_{\mathfrak{p}jj}(t),$$

$$P_{\mathfrak{p}jj}(t)=O,$$

$$P_{\mathfrak{v}jk}(t)=\int_{\infty(j,k)}^{0} e^{-\Lambda_j s}\, H_{\mathfrak{v}jk}(t+s)\, e^{\Lambda_k s}\, ds$$

$$(j \neq k;\quad \infty(j,k)=\operatorname{sgn}(\lambda_j-\lambda_k)\cdot\infty)\,.$$

Les matrices $P_{\mathfrak{v}jk}(t)$ et $B_{\mathfrak{v}jk}(t)$ sont presque-périodiques. De cette manière, on peut trouver deux séries formelles $P(t;\zeta)$ et $B(t;\zeta)$. Notre théorème sera établi complètement, si l'on montre que les deux séries ainsi obtenues sont convergentes.

D'abord, il existe une constante positive α telle que l'on ait

$$\|P_{\mathfrak{v}}(t)\| \leqq \alpha\, H_{\mathfrak{v}}\ ^{6)} \tag{6.3}$$

pour $-\infty<t<+\infty$, où $H_{\mathfrak{v}}=\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}\|H_{\mathfrak{v}}(t)\|$. En outre, on a

$$\|B_{\mathfrak{v}}(t)\| \leqq H_{\mathfrak{v}} \tag{6.4}$$

pour $-\infty<t<+\infty$.

Supposons que la série

$$\sum_{\sigma(\mathfrak{v})\geqq 1} A_{\mathfrak{v}}(t)\, \zeta_1^{p_1}\cdots\zeta_r^{p_r}$$

soit majorée par une série à coefficients réels positifs

$$\Phi(\zeta_1,\cdots,\zeta_r)=\sum_{\sigma(\mathfrak{v})\leqq 1} \Phi_{\mathfrak{v}}\, \zeta_1^{p_1}\cdots\zeta_r^{p_r}\,.$$

Soit Ψ la solution de l'équation

$$\Psi=\Phi+\alpha\{\Phi\Psi+\Psi^2\}\,,$$

telle que $\Psi(0,\cdots,0)=0$. Si l'on pose

$$\Psi(\zeta)=\sum_{\sigma(\mathfrak{v})\geqq 1} \Psi_{\mathfrak{v}}\, \zeta_1^{p_1}\cdots\zeta_r^{p_r}\,,$$

on a les relations

$$\Psi_{\mathfrak{v}}=\Phi_{\mathfrak{v}}+\alpha\{\sum_{\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2=\mathfrak{v}} \Phi_{\mathfrak{v}_1}\Psi_{\mathfrak{v}_2}+\sum_{\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2=\mathfrak{v}} \Psi_{\mathfrak{v}_1}\Psi_{\mathfrak{v}_2}\}\,,$$

d'où l'on a

$$H_{\mathfrak{v}} \leqq \Psi_{\mathfrak{v}}$$

Par conséquent, en vertu de (6.3) et de (6.4), les deux séries $P(t;\zeta)$ et $B(t;\zeta)$ sont convergentes, c. q. f d.

7. Les équations non homogènes. En vertu du théorème 1, si l'on applique une transformation presque-périodique convenable (5.3) au système (5.1), le système transformé se compose d'un certain nombre des systèmes, chacun d'eux admettant les valeurs caractéristiques toutes égales. Considérons donc

$$\begin{aligned} & d\vec{y}/dt=B(t;\zeta)\vec{y}\,, \\ & B(t;\zeta)=\lambda E+D+\sum_{\sigma(\mathfrak{v})\leqq 1} B_{\mathfrak{v}}(t)\, \zeta_1^{p_1}\cdots\zeta_r^{p_r}\,, \end{aligned} \tag{7.1}$$

---

6) Pour une matrice A, $\|A\|$ désigne $\sup\{\|A\vec{x}\|\,;\,\|\vec{x}\|=1\}$.

où λ est une constante réelle et D une matrice carrée dont les éléments d_{jk} sont égaux à zéro si $k \neq j-1$. Posons $d_{jj-1}=\delta_j$ $(j=2,\cdots,n)$. Supposons $\lambda \neq 0$.

Considérons la matrice $Y=\Phi(t;s;\zeta)$ qui satisfait aux relations $Y(0)=E$ et

$$dY/dt=B(t+s;\zeta)Y. \tag{7.2}$$

Si l'on pose $\Psi(t;s;\zeta)=e^{\lambda t}\,\Phi(t;s;\zeta)^{-1}$, la matrice $Y=\Psi(t;s;\zeta)$ satisfait à l'équation $dY/dt=-Y(B(t+s;\zeta)-\lambda E)$ et on a l'inégalité

$$||\Psi(t;s;\zeta)||\leqq e^{\frac{1}{2}|\lambda t|}$$

pour $-\infty<t<+\infty$, pourvu que

$$||B(t;\zeta)-\lambda E||\leqq \frac{1}{2}\,|\lambda|.$$

Par conséquent, si δ' (>0) et $\max\limits_{j=2}^{n}|\delta_j|$ sont assez petits, on a l'inégalité

$$||\Phi(t;s;\zeta)^{-1}||\leqq e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \tag{7.3}$$

pour $\lambda t>0$, $||\zeta||<\delta'$.

Cela posé, considérons les équations non homogènes

$$d\vec{y}/dt=B(t;\zeta)\vec{y}+\vec{b}(t;\zeta), \tag{7.4}$$

où

$$\vec{b}(t;\zeta)=\sum \vec{b}_{\mathfrak{p}}(t)\,\zeta_1^{p_1}\cdots\zeta_r^{p_r},$$

les $\vec{b}_{\mathfrak{p}}(t)$ étant presque-périodiques. Alors, en vertu de (7.3),

$$\vec{p}(t;\zeta)=\int_{\infty(\lambda)}^{0}\Phi(s;t;\zeta)^{-1}\,\vec{b}(t+s;\zeta)\,ds \tag{7.5}$$

est une seule solution presque-périodique de (7.4) si $\lambda\neq 0$, $\infty(\lambda)$ désignant $\mathrm{sgn}(\lambda)\cdot\infty$. De plus, en vertu de (7.3), on a l'inégalité

$$||\vec{p}(t;\zeta)||\leqq 2|\lambda|^{-1}\sup_{\mathfrak{D}_{\delta'}}||\vec{b}(t;\zeta)||, \tag{7.6}$$

si δ' (>0) et $\max\limits_{j=2}^{n}|\delta_j|$ sont assez petits.

II. Les équations non linéaires.

8. Préliminaires. On peut supposer, sans perdre la généralité, que les seconds membres $f_j(x;t)$ de (1.1) soient de la forme

$$f_j(x;t)=\mu_j x_j+\delta_j x_{j-1}+\sum_{\sigma(\mathfrak{p})\geqq 2} f_{j\mathfrak{p}}(t)\,x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}\text{ [7]}, \tag{8.1}$$

où les $f_{j\mathfrak{p}}(t)$ admettent la période $\omega>0$; les μ_j et δ_j sont des constantes telles que $\delta_j\neq 0$ entraîne $\mu_{j-1}=\mu_j$.

7) $\mathfrak{p}=(p_1,\cdots,p_n)$, $\sigma(\mathfrak{p})=p_1+\cdots+p_n$.

Supposons

$$\Re\mu_j<0 \quad (1\leqq j\leqq q), \qquad \geqq 0 \quad (j>q). \tag{8.2}$$

Comme nous avons supposé au n° 1 que la solution (1.4) satisfasse aux conditions (1.6), il serait naturel de supposer que la solution presque-périodique (2.1) aussi satisfasse aux conditions

$$\varphi_j(t\,;0)=0 \qquad (j=1,\cdots,n). \tag{8.3}$$

Cela posé, considérons la transformation de la forme

$$x_j=e^{i\nu_j t}\,y_j+\varphi_j(t\,;\zeta) \qquad (j=1,\cdots,n), \tag{8.4}$$

où $\nu_j=\Im\mu_j\,(j=1,\cdots,n)$. Alors, on obtient les equations différentielles en y_j

$$\begin{aligned} dy_j/dt&=F_j(y\,;t\,;\zeta)\\ &=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t\,;\zeta)\,y_k+\sum_{\sigma(\mathfrak{p})\geqq 2}F_{j\mathfrak{p}}(t\,;\zeta)\,y_1^{p_1}\cdots y_n^{p_n}\,; \end{aligned} \tag{8.5}$$

les $a_{jk}(t\,;\zeta)$ et $F_{j\mathfrak{p}}(t\,;\zeta)$ sont des fonctions continues en t, ζ, holomorphes en ζ et, uniformément pour ζ, presque-périodiques par rapport à t dans $\mathfrak{D}_{\delta'}$.

Comme les $a_{jk}(t\,;\zeta)$ remplissent les conditions

$$a_{jk}(t\,;0)=\begin{cases}\Re\mu_j\equiv\lambda_j & (k=j),\\ \delta_j & (k=j-1),\\ 0 & (k\neq j,\,j-1),\end{cases} \tag{8.6}$$

en vertu du théorème 1, il suffit de considérer le cas où

$$a_{jk}(t\,;\zeta)=0 \qquad (\lambda_j\neq\lambda_k). \tag{8.7}$$

Proposons-nous maintenant de trouver une solution de (8.5)

$$y_j=\phi_j(t\,;\eta_1,\cdots,\eta_\rho\,;\zeta_1,\cdots,\zeta_r) \qquad (j=1,\cdots,n), \tag{8.8}$$

qui contient des constantes complexes arbitraires $\eta_1,\cdots,\eta_\rho$; les $\phi_j(t\,;\eta\,;\zeta)$ sont continues en t, η, ζ et holomorphes en η, ζ pour

$$||\eta||<\delta'', \qquad ||\zeta||<\delta'', \qquad 0\leqq t<+\infty, \tag{8.9}$$

et satisfont aux conditions

$$\phi_j(t\,;0\,;0)=0 \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{8.10}$$

pour $0\leqq t<+\infty$, et aux conditions

$$\lim_{t\to+\infty}\phi_j(t\,;\eta\,;\zeta)=0 \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{8.11}$$

uniformément pour $||\eta||<\delta''$, $||\zeta||<\delta''$.

9. La réduction formelle. Soit

$$dz_j/dt=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t\,;\zeta)\,z_k+\sum_{\sigma(\mathfrak{p})\geqq 2}G_{j\mathfrak{p}}(t\,;\zeta)\,z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n} \tag{9.1}$$

le système d'équations en variables z définies par

$$y_j=z_j+\sum_{\sigma(\mathfrak{p})=N}P_{j\mathfrak{p}}(t\,;\zeta)\,z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n} \qquad (N\geqq 2), \tag{9.2}$$

les $P_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)$ jouissant de la propriété analogue à celle des $F_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)$. Alors, par calcul élémentaire, on obtiendra les relations

$$G_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)=F_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta) \qquad (\sigma(\mathfrak{p})<N), \tag{9.3}$$

et

$$\begin{aligned} G_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)=&F_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)-P'_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t;\zeta)P_{k\mathfrak{p}'}(t;\zeta)\\ &-P_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)\sum_{k=1}^{n}p_k a_{kk}(t;\zeta)\\ &-\sum_{h\neq k}(p_h+1)a_{hk}(t;\zeta)P_{j\,\mathfrak{p}+\mathfrak{c}_h-\mathfrak{c}_k}(t;\zeta) \qquad (\sigma(\mathfrak{p})=N), \end{aligned} \tag{9.4}$$

où $\mathfrak{c}_k=(\delta_{k1},\cdots,\delta_{kn})$; $\delta_{jk}=1$ $(j=k)$, 0 $(j\neq k)$. En vertu de (8.7), les $P_{k\mathfrak{p}'}(t;\zeta)$ qui se trouvent dans le second membre de (9.4) sont tels que $\lambda_k-\lambda(\mathfrak{p}')=\lambda_j-\lambda(\mathfrak{p})$, où $\lambda(\mathfrak{p})=\sum_{k=1}^{n}p_k\lambda_k$. On en conclut, d'après le résultat du n°7, que, si l'on choisit les $P_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)$ convenablement, on peut annuler tous les $G_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)$ tels que $\lambda_j\neq\lambda(\mathfrak{p})$. Donc, nous pouvons énoncer le

Théorème 2. *On peut réduire les équations* (8.5) *formellement aux équations de la forme*

$$\begin{aligned} &dz_j/dt\approx\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t;\zeta)z_k+\sum_{\sigma(\mathfrak{p})\geqq 2}G_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n}\text{ [8]},\\ &G_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)=0 \qquad (\lambda_j\neq\lambda(\mathfrak{p})), \end{aligned} \tag{9.5}$$

par une transformation formelle presque-périodique

$$y_j\approx z_j+\sum_{\sigma(\mathfrak{p})\geqq 2}P_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n}, \tag{9.6}$$

où les $P_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)$ sont continues en t, ζ, holomorphes en ζ et, uniformément pour ζ, presque-périodiques par rapport à t dans $\mathfrak{D}_{\delta_{j\mathfrak{p}}}$, chacun des $\delta_{j\mathfrak{p}}$ (>0) pouvant dépendre de l'indice $(j;\mathfrak{p})$ respectivement.

10. La solution formelle. Soient $G_j(z;t;\zeta)$ les seconds membres de (9.5). Puisque $G_{j\mathfrak{p}}(t,\zeta)=0$ pour $\lambda_j\neq\lambda(\mathfrak{p})$, en vertu de (8.2), on a facilement

$$G_j(z_1,\cdots,z_q,\ 0,\cdots,0;t;\zeta)\approx 0 \tag{10.1}$$

pour $j>q$. De plus,

$$G_j(z_1,\cdots,z_q,0,\cdots,0;t;\zeta) \qquad (j=1,\cdots,q)$$

sont des polynomes de $z_1,\cdots,z_q$.

Soit

$$z_j=\Phi_j(t;C_1,\cdots,C_q;\zeta) \qquad (j=1,\cdots,q) \tag{10.2}$$

la solution du système des équations

$$dz_j/dt=G_j(z_1,\cdots,z_q,0,\cdots,0;t;\zeta) \qquad (j=1,\cdots,q), \tag{10.3}$$

8) $\approx$ désigne l'égalité formelle.

telle que $z_j(0)=C_j$. Alors, en vertu de (10.1), le système des fonctions définies par

$$z_j=\begin{cases}\Phi_j(t;C;\zeta) & (j=1,\cdots,q),\\ 0 & (j>q),\end{cases}\tag{10.4}$$

satisfait aux équations (9.5). En remplaçant les z_j par (10.4) dans les seconds membres de (9.6), on obtient une solution formelle de (8.5):

$$y_j\approx P_j(\Phi_1,\cdots,\Phi_q;t;\zeta) \qquad (j=1,\cdots,n),\tag{10.5}$$

les $P_j(z_1,\cdots,z_q;t;\zeta)$ étant des séries formelles obtenues de (9.6) en y posant $z_j=0$ $(j>q)$.

En vertu de la forme des seconds membres de (10.3), on peut démontrer, par le raisonnement analogue à celui de n°7, que l'on a

$$\Phi_j(t;C;\zeta)=o(e^{\frac{1}{2}\lambda t})\tag{10.6}$$

pour $t\to+\infty$ pourve que $||\zeta||$ soit assez petit, où

$$\lambda=\max_{j=1}^{q}\lambda_j<0.\tag{10.7}$$

Donc, si la solution formelle (10.5) est convergente, nous obtiendrons une solution de (8.5) qui tend vers l'origine $y=0$ pour $t\to+\infty$, pourvu que $||C||$ et $||\zeta||$ soient assez petits. De plus, cette solution (10.5) donnera la forme analytique la plus générale des solutions de (8.5) qui jouissent des propriétés énumérées à la fin de n°8. Donc, il reste à démontrer la convergence de cette solution formelle (10.5).

11. La convergence de la solution formelle. Posons d'abord

$$H_j(y_1,\cdots,y_n;t;\zeta)=F_j(y;t;\zeta)-\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t;\zeta)y_k \qquad (j=1,\cdots,n),$$

$$K_j(z_1,\cdots,z_q;t;\zeta)=G_j(z_1,\cdots,z_q,0,\cdots,0;t;\zeta)$$
$$-\sum_{k=1}^{q}a_{jk}(t;\zeta)z_k \qquad (j=1,\cdots,q)$$

et désignons par $P_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)$, $H_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)$ et $K_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)$ les coefficients des développements de $P_j(z;t;\zeta)$, $H_j(P_1,\cdots,P_n;t;\zeta)$ et $K_j(z;t;\zeta)$ suivant les puissances entières en $z_1,\cdots,z_q$ respectivement, où $\mathfrak{p}$ désigne $(p_1,\cdots,p_q)$.

Alors, les séries $P_j(z;t;\zeta)$ satisfont formellement aux relations

$$\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t;\zeta)P_k-\sum_{\nu=1}^{q}\frac{\partial P_j}{\partial z_\nu}\sum_{k=1}^{q}a_{\nu k}(t;\zeta)z_k-\frac{\partial P_j}{\partial t}\tag{11.1}$$
$$-\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial P_j}{\partial z_k}K_k(z;t;\zeta)+H_j(P;t;\zeta)\approx 0 \qquad (j=1,\cdots,n),$$

d'où il résulte

$$(11.2)\qquad dP_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)/dt=\sum_{k=1}^{n}P_{k\mathfrak{p}}(t;\zeta)\,a_{jk}(t;\zeta)-P_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)\sum_{k=1}^{q}p_k\,a_{kk}(t;\zeta)$$
$$-\sum_{h\neq k}(p_h+1)\,a_{hk}(t;\zeta)\,P_{j\,\mathfrak{p}+\mathfrak{e}_h-\mathfrak{e}_k}(t;\zeta)$$
$$+H_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)-\sum_{k=1}^{q}\sum_{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}+\mathfrak{e}_k}p_{1k}\,P_{j\mathfrak{p}_1}(t;\zeta)\,K_{k\mathfrak{p}_2}(t;\zeta)\,.$$

Les $P_{h\mathfrak{p}'}(t;\zeta)$ qui se trouvent dans l'expression

$$(11.3)\qquad H_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)-\sum_{k=1}^{q}\sum_{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}+\mathfrak{e}_k}p_{1k}\,P_{j\mathfrak{p}_1}(t;\zeta)\,K_{k\mathfrak{p}_2}(t;\zeta)$$

sont tels que $\sigma(\mathfrak{p}')<\sigma(\mathfrak{p})$, et les $P_{h\mathfrak{p}'}(t;\zeta)$ dans l'expression

$$\sum_{k=1}^{n}P_{k\mathfrak{p}}(t;\zeta)\,a_{jk}(t;\zeta)-P_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)\sum_{k=1}^{q}p_k\,a_{kk}(t;\zeta)$$
$$-\sum_{h\neq k}(p_h+1)\,a_{hk}(t;\zeta)\,P_{j\,\mathfrak{p}+\mathfrak{e}_h-\mathfrak{e}_k}(t;\zeta)$$

sont tels que

$$(11.4)\qquad \lambda_h-\lambda(\mathfrak{p}')=\lambda_j-\lambda(\mathfrak{p})\,,\qquad \sigma(\mathfrak{p}')=\sigma(\mathfrak{p})\,,$$

où $\lambda(\mathfrak{p})$ désigne $\sum_{k=1}^{q}p_k\lambda_k$.

Soit N le nombre des indices $(h,\mathfrak{p}')$ satisfaisant à la condition (11.4), et rangeons de tels indices dans un certain ordre. Alors, nous pouvons écrire les équations (11.2) de la forme

$$d\vec{P}(t;\zeta)/dt=A(t;\zeta)\,\vec{P}(t;\zeta)+\vec{B}(t;\zeta)\,,$$

où $\vec{P}$ et $\vec{B}$ sont des vecteurs à N dimensions dont les éléments sont les $P_{h\mathfrak{p}'}(t;\zeta)$ et les expressions (11.3) respectivement; $A(t;\zeta)$ sont une matrice carrée à N dimension et les éléments diagonaux de la matrice constante $A_0\equiv A(t;0)$ sont tous égaux à $\lambda_j-\lambda(\mathfrak{p})$.

Supposons $\lambda_j\neq\lambda(\mathfrak{p})$. Puisque les $P_{j\mathfrak{p}}(t;\zeta)$ sont presque-périodiques, d'après le raisonnement de n°7, on a l'inégalité

$$(11.5)\qquad \|\vec{P}(t;\zeta)\|\leqq 2\,|\lambda_j-\lambda(\mathfrak{p})|^{-1}\sup_{\mathfrak{D}_{\delta''}}\|\vec{B}(t;\zeta)\|\,,$$

si l'on a

$$\|A(t;\zeta)-(\lambda_j-\lambda(\mathfrak{p}))\,E_N\|\leqq\frac{1}{2}\,|\lambda_j-\lambda(\mathfrak{p})|$$

ou

$$(11.6)\qquad \left|a_{jj}(t;\zeta)-\sum_{k=1}^{q}p_k\,a_{kk}(t;\zeta)-(\lambda_j-\lambda(\mathfrak{p}))\right|+\sum_{k\neq j}|a_{jk}(t;\zeta)|$$
$$+\sum_{h\neq k}|(p_h+1)\,a_{hk}(t;\zeta)|\leqq\frac{1}{2}\,|\lambda_j-\lambda(\mathfrak{p})|$$

dans $\mathfrak{D}_{\delta''}$.

Pour obtenir les inégalitées (11.6), il faut remarquer qu'il existe une constante positive R telle que l'on ait

$$\left|\frac{1-\sigma(\mathfrak{p})}{\lambda_j-\lambda(\mathfrak{p})}\right|\leqq R \tag{11.7}$$

pour $\lambda_j\neq\lambda(\mathfrak{p})$. D'autre part, on peut supposer $\max\limits_{j=1}^{n}|\delta_j|$ aussi petit que l'on veut. Par conséquent, en vertu de (8.6), on peut choisir un nombre positif δ'' indépendant de $(j,\mathfrak{p})$ de manière que les inégalités (11.6) subsistent pour $(t,\zeta)\in\mathfrak{D}_{\delta''}$, $\lambda_j\neq\lambda(\mathfrak{p})$. On a donc, en vertu de (11.3), (11.5) et (11.7), les inégalités

$$|P_{j\mathfrak{p}}(t\,;\zeta)|\leqq 2R\left\{\sup_{\mathfrak{D}_{\delta''}}|H_{j\mathfrak{p}}(t\,;\zeta)|+\sum_{k=1}^{q}\sum_{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}+e_k}\sup_{\mathfrak{D}_{\delta''}}|P_{j\mathfrak{p}_1}(t\,;\zeta)\,K_{k\mathfrak{p}_2}(t\,;\zeta)|\right\} \tag{11.8}$$

pour $(t,\zeta)\in\mathfrak{D}_{\delta''}$, $\lambda_j\neq\lambda(\mathfrak{p})$.

Supposons que les séries H_j et K_j soient majorées par les séries $\Psi_1(y_1+\cdots+y_n)$ et $\Psi_2(z_1+\cdots+z_q)$ respectivement, où $\Psi_j(u)$ $(j=1,2)$ sont des séries d'une variable u à coefficients réels positifs ne contenant que des termes de degrés au moins égaux à deux.

Soit $X(u)$ la solution de l'équation

$$u(1+X)=u+M\{\Psi_2(u)(1+X)+\Psi_1(n\,u(1+X))\}\,,$$

ou

$$X=M\{\Psi_2(u)(1+X)+\Psi_1(n\,u(1+X))\}/u\,, \tag{11.9}$$

telle que $X(0)=0$, où M est une constante positive assez grande.

Par calcul élémentaire, on peut démontrer que les séries $P_j(z\,;t\,;\zeta)$ sont majorées par la série

$$(z_1+\cdots+z_q)\,(1+X(z_1+\cdots+z_q))\,,$$

si l'on prend la constante M de (11.9) assez grande, car les inégalités (11.8) sont remplies sauf un nombre fini des indices $(j,\mathfrak{p})$ tels que $\lambda_j=\lambda(\mathfrak{p})$. Nous avons donc démontré le

Théorème 3. *La solution formelle* (10.5) *est convergente.*

31 août, 1956.

Bibliographie.

Y. Sibuya:

[1] Sur les solutions bornées d'un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients périodiques, Jour. Fac. Sci., Univ. Tokyo, I, **7** (1956) 333–341;

[2] Sur les solutions périodiques d'un système des équations différentielles ordinaires non linérires à coefficients périodiques. ibid., **7** (1954) 245–254;

[3] Sur un système des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients périodiques et contenant des paramètres. ibid., **7** (1954) 229–241.