Sur les équations différentielles périodiques non linéaires.

Par Masuo Hukuhara.

Récemment nous nous occupions surtout des études des équations différentielles périodiques non linéaires. Nous voulons maintenant expliquer notre méthode en complétant quelques-uns de nos résultats. Le procédé de recherches se compose en général de deux parties: intégration formelle et la démonstration de la convergence ou de l'asymptoticité des relations formelles.

I. Intégration formelle.

1. Soit

$$dx_j/dt = f_j(t, x_1, \cdots, x_n) \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{1.1}$$

le système des équations différentielles données. Nous supposons remplie l'hypothèse suivante: on a les développements[1]

$$f_j(t, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(t) x_k + \sum'' f_{jk_1\cdots k_n}(t)\, x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \tag{1.2}$$

uniformément pour $-\infty < t < \infty$, $|x_1|, \cdots, |x_n| < \delta$, où les coefficients $f_{jk}(t)$ et $f_{jk_1\cdots k_n}(t)$ sont des fonctions continues admettant la même période ω.

Supposons que les équations (1.1) se changent en

$$d\eta_j/dt = h_j(t, \eta_1, \cdots, \eta_n) \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{1.3}$$

par une transformation formelle à coefficients périodiques[2]

$$x_j \approx \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)\, \eta_k + \sum'' p_{jk_1\cdots k_n}(t)\, \eta_1^{k_1} \cdots \eta_n^{k_n} \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{1.4}$$

et que l'on sait intégrer les équations transformées (1.3). Si l'on porte la solution de celles-ci dans la transformation formelle (1.4), on obtient une solution formelle des équations données (1.1). Il s'agit donc de trouver une transformation formelle qui amène les équations données en des équations de la forme la plus simple.

2. Considérons les équations différentielles linéaires

$$dx_j/dt = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(t) x_k \qquad (j=1, 2, \cdots, n). \tag{2.1}$$

---

1) $\sum^{(m)}$ signifie la sommation étendue à tous les termes de degrés au moins égaux à m.

2) $\approx$ montre que la relation est purement formelle.

Si l'on représente par $\vec{x}, \vec{x}', F(t)$ les matrices $(x_j), (x_j'), (f_{jk}(t))$, on peut écrire $\vec{x}' = F(t)\vec{x}$.

Désignons par $\Phi(t)$ la matrice formée de n solutions. On a alors $\Phi'(t) = F(t)\,\Phi(t)$. Si C est une matrice formée des constantes, on a $(\Phi(t)C)' = F(t)\Phi(t)C$ de sorte que $\Phi(t)C$ est aussi une matrice formée de n solutions. D'autre part, $\Phi(t+\omega)$ est une matrice formée de n solution. Supposons, par exemple, que $\Phi(t)$ satisfasse à la condition initiale $\Phi(0) = I$ (matrice unité). Alors $\Phi(t)\,\Phi(\omega)$ et $\Phi(t+\omega)$ prennent la même valeur initiale $\Phi(\omega)$ pour $t=0$. Elles coïncident donc identiquement: $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\,\Phi(\omega)$. Si l'on pose $\Psi(t) = \Phi(t)C$, on a $\Psi(t+\omega) = \Psi(t)\Gamma$, où $\Gamma = C^{-1}\,\Phi(\omega)C$. On peut donc déterminer C de manière que Γ prenne la forme canonique de Jordan. Considérons d'autre part une matrice $\Lambda(t)$ qui satisfait à la relation $\Lambda(t+\omega) = \Lambda(t)\Gamma$. On voit immédiatement que $\Theta(t) = \Lambda(t)\,\Psi(t)^{-1}$ admet la période ω: $\Theta(t+\omega) = \Theta(t)$. Si l'on fait le changement de variables $\vec{y} = \Theta(t)\vec{x}$, on obtient un système d'équations dont n solutions forment la matrice $\Lambda(t)$. Nous dirons que l'on peut choisir la matrice $\Lambda(t)$ de manière que les équations en $\vec{y}$ soient à coefficients constants: $\vec{y}' = A\vec{y}$.

Considérons d'abord le cas de $\Gamma = \rho\, I + E$.[3] Si l'on pose

$$\log(I+\sigma\,E) = \sigma\,E - \frac{\sigma^2 E^2}{2} + \frac{\sigma^3 E^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2}\,\frac{\sigma^{n-1}E^{n-1}}{n-1},$$

on a

$$e^{\log(I+\sigma E)} = I + \sigma\,E,$$

où

$$e^X = I + \frac{X}{1\,!} + \frac{X^2}{2\,!} + \cdots + \frac{X^m}{m\,!} + \cdots$$

$U(u) = e^{u\log(I+\sigma E)}$ est la matrice solution de l'équation

$$U'(u) = \log(I+\sigma\,E)\;U(u)$$

satisfaisant à la condition initiale $U(0) = I$. On a de plus $U(u+1) = U(u)\,(I+\sigma\,E)$. Par suite, si l'on pose $\Lambda(t) = e^{\lambda u}U(u)$ $(u = t/\omega)$, on a $\Lambda(t+\omega) = e^{\lambda\omega}\Lambda(t)\,(I+\sigma\,E)$. Pour que l'on obtienne la relation voulue $\Lambda(t+\omega) = \Lambda(t)(\rho\,I+E)$, il suffit de déterminer ρ, σ par les relations $e^{\lambda\omega} = \rho$, $\sigma = 1/\rho$. On a de plus

$$\Lambda'(t) = \frac{1}{\omega}\,(\lambda\,I + \log(I+\sigma\,E))\Lambda(t),$$

de sorte que $\vec{y}$ satisfait aux équations à coefficients constants.

Dans le cas général, on peut écrire

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & O & \cdots & O \\ O & \Gamma_2 & \cdots & O \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ O & O & \cdots & \Gamma_m \end{pmatrix},$$

3) E désigne la matrice dont les éléments sont nuls sauf les $n-1$ éléments, égaux à 1, qui se trouvent immédiatement au-dessous de la diagonale.

où chacune des matrices Γ_j a la forme $\rho_j I+E$. On peut donc déterminer les matrices $A_j(t)$ de manière que

$$A_j(t+\omega)=A_j(t)(\rho_j I+E), \quad A_j'(t)=A_j A_j(t),$$

où A_j est une matrice constante. Si l'on pose

$$A(t)=\begin{pmatrix} A_1(t) & O & \cdots & O \\ O & A_2(t) & \cdots & O \\ & \cdots\cdots & & \\ O & O & \cdots & A_m(t) \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ & \cdots\cdots & & \\ O & O & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

on a évidemment $A(t+\omega)=A(t)\Gamma$, $A'(t)=AA(t)$. Les équations en $\vec{y}$ peuvent alors s'écrire sous la forme matricielle: $\vec{y}'=A\vec{y}$.

Si l'on fait une transformation linéaire à coefficients constants $\vec{y}=P\vec{z}$, on obtient $\vec{z}'=P^{-1}AP\vec{z}$, et on peut déterminer P de manière que $P^{-1}AP$ ait la forme canonique de Jordan. La relation entre $\vec{x}$ et $\vec{z}$ est $\vec{x}=\Theta(t)P\vec{z}$. C'est une transformation linéaire à coefficients périodiques. Par suite nous avons le

Lemme. *On peut déterminer une transformation linéaire à coefficients périodiques de manière que les coefficients des équations transformées forment une matrice constante de forme canonique de Jordan.*

On peut donc écrire les équations transformées sous la forme

$$dy_j/dt=\lambda_j y_j+\delta_{j-1}y_{j-1} \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

où λ_j, δ_{j-1} sont des constantes et si $\delta_{j-1}\neq 0$ on a $\lambda_j=\lambda_{j-1}$. On peut supposer de plus que $\lambda_j\equiv\lambda_k \pmod{2\pi i/\omega}$ entraîne $\lambda_j=\lambda_k$. En effet, si l'on a $\lambda_j\equiv\lambda_1$ pour $j=1,\cdots,m$ et $\lambda_k\not\equiv\lambda_1$ pour $k=m+1,\cdots,n$, on obtient les équations

$$dz_j/dt=\lambda_1 z_j+\delta_{j-1}z_{j-1} \qquad (j=1,2,\cdots,m),$$

$$dz_k/dt=\lambda_k z_k+\delta_{k-1}z_{k-1} \qquad (k=m+1,\cdots,n),$$

en faisant la transformation

$$y_j=e^{(\lambda_j-\lambda_1)t}z_j \quad (j=1,\cdots,m), \qquad y_k=z_k \quad (k=m+1,\cdots,n)$$

et les coefficients de la transformation admettent la période ω.

Appliquons la même transformation aux équations données (1.1). Si

$$dy_j/dt=g_j(t,y_1,\cdots,y_n) \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2.2}$$

sont les équations transformées, les développements des seconds membres prennent la forme

$$g_j(t,y_1,\cdots,y_n)=\lambda_j y_j+\delta_{j-1}y_{j-1}+\sum{}'' g_{jk_1\cdots k_n}(t)\,y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n}$$

et les coefficients $g_{jk_1\cdots k_n}(t)$ admettent encore la période ω. Nous pouvons donc supposer, sans perdre la généralité, que les développements des seconds membres de (1.1) sont

$$f_j(t,x_1,\cdots,x_n)=\lambda_j x_j+\delta_{j-1}x_{j-1}+\sum{}'' f_{jk_1\cdots k_n}(t)\,x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} \tag{2.3}$$

3. Faisons le changement de variables

$$x_j = y_j + \sum_N p_{jk_1\cdots k_n}(t)\, y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n} \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

où $\sum_N$ désigne la sommation étendue à tous les termes de degré N. On a alors, en négligeant les termes de degrés supérieurs à N,

$$\begin{aligned} y_j' &= f_j(t, x_1,\cdots,x_n) - \sum_N p'_{jk_1\cdots k_n}(t)\, x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} \\ &\quad - \sum_N \sum_l p_{jk_1\cdots k_n}(t)\left(k_l \lambda_l + k_l \delta_{l-1}\frac{x_{l-1}}{x_l}\right) x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} + \cdots \\ &= f_j(t, y_1,\cdots,y_n) \\ &\quad - \sum_N \left(\sum k_l\lambda_l - \lambda_j\right) p_{jk_1\cdots k_n}(t)\, y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n} - \sum_N p'_{jk_1\cdots k_n}(t)\, y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n} \\ &\quad + \sum_N \delta_{j-1}\, p_{j-1,k_1\cdots k_n}(t)\, y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n} - \sum_N (k_l+1)\,\delta_{l-1}\, p_{j\cdots k_{l-1}-1,\,k_l+1\cdots}(t)\, y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n}. \end{aligned}$$

Si les développements des seconds membres sont

$$g_j(t, y_1,\cdots,y_n) = \lambda_j y_j + \delta_{j-1} y_{j-1} + \sum{}'' g_{jk_1\cdots k_n}(t)\, y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n},$$

on a $g_{jk_1\cdots k_n}(t) = f_{jk_1\cdots k_n}(t)$ pour $k_1+\cdots+k_n<N$ et

$$\begin{aligned} (3.1) \qquad g_{jk_1\cdots k_n}(t) &= f_{jk_1\cdots k_n}(t) - p'_{jk_1\cdots k_n}(t) - \left(\sum k_l\lambda_l - \lambda_j\right) p_{jk_1\cdots k_n}(t) \\ &\quad + \delta_{j-1}\, p_{j-1,k_1\cdots k_n}(t) - \sum (k_l+1)\,\delta_{l-1}\, p_{j\cdots k_{l-1}-1,\,k_l+1\cdots}(t) \end{aligned}$$

pour $k_1+\cdots+k_n=N$. Nous ordonnons les coefficients comme il suit:

Considérons deux coefficients $p_{k_0k_1\cdots k_n}(t)$ et $p_{k_0'k_1'\cdots k_n'}(t)$. Il existe alors un indice l tel que $k_j=k_j'$ pour $j<l$ mais $k_l \neq k_l'$. Si par exemple $k_l<k_l'$, nous disons que le coefficient $p_{k_0k_1\cdots k_n}(t)$ antécède $p_{k_0'k_1'\cdots k_n'}(t)$.

Supposons que les coefficients $p_{j'k_1'\cdots k_n'}(t)$ qui antécèdent $p_{jk_1\cdots k_n}(t)$ ait été définis de manière qu'ils admettent une période ω. Si l'on considère la relation (3.1) comme l'équation qui détermine le coefficient $p_{jk_1\cdots k_n}(t)$, elle a la forme suivante

$$p'(t) + \lambda\, p(t) = F(t) - g(t),$$

où $F(t)$ est une fonction connue admettant la période ω. Supposons que $g(t)$ admette la période ω. Si $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi i/\omega}$, cette équation admet une solution avec la période ω. Si $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi i/\omega}$, il faut et il suffit, pour que cette équation admette une solution périodique, que l'on ait

$$\int_0^\omega e^{\lambda t}[F(t) - g(t)]\, dt = 0.$$

La quantité correspondant à λ est dans notre cas $\sum k_l\lambda_l - \lambda_j$. Par suite, si $\lambda_j \not\equiv \sum k_l\lambda_l \pmod{2\pi i/\omega}$, on peut déterminer $p_{jk_1\cdots k_n}(t)$ de manière qu'il admette la période ω en posant $g_{jk_1\cdots k_n}(t)=0$. Si $\lambda_j \equiv \sum k_l\lambda_l \pmod{2\pi i/\omega}$, on pose

$$g_{jk_1\cdots k_n}(t) = g_{jk_1\cdots k_n} \exp\{(\lambda_j - \sum k_l\lambda_l)t\}.$$

On peut alors déterminer la constante $g_{jk_1\cdots k_n}$ de manière que l'on ait pour $p_{jk_1\cdots k_n}(t)$ satisfaisant à la relation (3.1) une fonction admettant la période ω.

4. Une transformation formelle générale

(4.1) $$x_j \approx \eta_j + \sum'' p_{jk_1\cdots k_n}(t)\, \eta_1^{k_1}\cdots\eta_n^{k_n} \qquad (j=1, 2,\cdots, n)$$

peut être considérée comme le produit d'une suite de transformations

(4.2.2) $$x_j = y_{2j} + \sum_2 p_{2,jk_1\cdots k_n}(t)\, y_{21}^{k_1}\cdots y_{2n}^{k_n}$$

....

(4.2.K) $$y_{K-1,j} = y_{K,j} + \sum_K p_{K,jk_1\cdots k_n}(t)\, y_{K1}^{k_1}\cdots y_{Kn}^{k_n}$$

....

$$(j=1, 2,\cdots, n)\,.$$

Soient

$$x_j = y_{Nj} + \sum'' p_{N,jk_1\cdots k_n}(t)\, y_{N1}^{k_1}\cdots y_{Nn}^{k_n} \qquad (j=1, 2,\cdots, n)$$

les relations entre $\vec{x}$ et $\vec{y}_N$. On voit sans peine

$$p_{N,jk_1\cdots k_n}(t) = p_{K,jk_1\cdots k_n}(t) \qquad \text{pour} \qquad N \geqq K = k_1 + \cdots + k_n\,.$$

Posons donc

$$p_{jk_1\cdots k_n}(t) = p_{K,jk_1\cdots k_n}(t)\,.$$

Nous dirons que la transformation (4.1) est le produit formel de la suite de transformations (4.2.2),$\cdots$, (4.2.K),$\cdots$. Désignons par

(4.3.N) $$dy_{Nj}/dt = h_{Nj}(t, y_{N1},\cdots, y_{Nn}) \qquad (j=1, 2,\cdots, n)$$

les équations en $\vec{y}_N$ et par

$$h_{Nj}(t, y_{N1},\cdots, y_{Nn}) = \lambda_j y + \delta_{j-1}\, y_{N,j-1} + \sum'' h_{N,jk_1\cdots k_n}(t)\, y_{N1}^{k_1}\cdots y_{Nn}^{k_n}$$

les développements de h_{Nj} en séries entières de $y_{N1},\cdots, y_{Nn}$. Les équations (4.3.N) se changent en (4.3.N+1) par la transformation (4.2.N+1). On a donc

$$h_{N,jk_1\cdots k_n}(t) = h_{K,jk_1\cdots k_n}(t) \qquad \text{pour } N \geqq K = k_1 + \cdots + k_n\,.$$

Si l'on pose

$$h_{jk_1\cdots k_n}(t) = h_{K,jk_1\cdots k_n}(t)\,,$$

et si (1.3) sont les équations formelles en $\eta_1,\cdots, \eta_n$, on a

(4.4) $$h_j(t, \eta_1,\cdots, \eta_n) \approx \lambda_j \eta_1 + \delta_{j-1}\, \eta_{j-1} + \sum'' h_{jk_1\cdots k_n}(t)\, \eta_1^{k_1}\cdots\eta_n^{k_n}\,.$$

D'après ce que nous avons déjà démontré, on peut déterminer $p_{K,jk_1\cdots k_n}(t)$ de manière que l'on ait

(4.5) $$h_{jk_1\cdots k_n}(t) = b_{jk_1\cdots k_n} \exp\{(\lambda_j - \sum k_l\,\lambda_l)t\}\,,$$

où $b_{jk_1\cdots k_n}$ est une constante et s'annule pour $\lambda_j \not\equiv \sum k_l \lambda_l \pmod{2\pi i/\omega}$. On peut donc énoncer le

Théorème. *On peut déterminer la transformation formelle périodique* (4.1) *de manière que, si* (4.4) *sont les développements des seconds membres des équations transformées, on ait* (4.5), *où* $b_{jk_1\cdots k_n}$ *est une constante qui s'annule pour* $\lambda_j \not\equiv \sum k_l\, \lambda_l \pmod{2\pi i/\omega}$.

II. Convergence de la solution formelle.

5. Nous nous posons maintenant dans l'hypothèse suivante:

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \lambda_j=0 & & (j=1,2,\cdots,r) \\ \lambda_j\neq 0 & (\mathrm{mod}\ 2\pi i/\omega) & (j=r+1,\cdots,n) \\ \delta_j=1 & & (j\neq r_1,\cdots,r_m,\leqq r) \\ \delta_j=0 & & (j=r_1,\cdots,r_m,\leqq r) \end{cases}$$

et nous cherchons d'abord une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une solution formelle

$$(5.2)\qquad x_j\approx\psi_j(t,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

où

$$(5.3)\qquad \psi_j(t,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\sum{}'\,\psi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\,\eta_1^{k_1}\cdots\eta_\rho^{k_\rho}\qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

en supposant remplies les relations formelles

$$(5.4)\qquad \psi_j(0,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\psi_j(\omega,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\qquad (j\neq 1,r_1+1,\cdots,r_{m-1}+1).$$

Théorème. *Pour la convergence de la solution formelle* (5.2), *il faut et il suffit que les séries*

$$(5.5)\qquad \int_0^\omega\psi_j(t,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\,dt\approx\sum{}'\,\eta_1^{k_1}\cdots\eta_\rho^{k_\rho}\int_0^\omega\psi_{jk_1\cdots k_n}(t)\,dt\qquad (j=r_1,\cdots,r_m)$$

convergent.

Soit

$$(5.6)\qquad x_j=\varphi_j(t,\xi_1,\cdots,\xi_n)\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

la solution qui satisfait aux conditions initiales $x_j(0)=\xi_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$. Elle est holomorphe pour $0\leqq t\leqq\omega$, $|\xi_1|<\delta,\cdots,|\xi_n|<\delta$ par rapport à $\xi_1,\cdots,\xi_n$ et s'annule pour $\xi_1=\cdots=\xi_n=0$. Le déterminant fonctionnel par rapport à $\xi_1,\cdots,\xi_n$ des premiers membres des relations

$$(5.7)\qquad \zeta_j-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\varphi_j(t,\xi_1,\cdots,\xi_n)\,dt=0\qquad (j=r_1,\cdots,r_m),$$

$$(5.8)\qquad \xi_j-\varphi_j(\omega,\xi_1,\cdots,\xi_n)=0\qquad (j\neq 1,r_1+1,\cdots,r_{m-1}+1)$$

n'est pas nul. Ces relations déterminent donc $\xi_1,\cdots,\xi_n$ comme fonctions holomorphes de $\zeta_{r_1},\cdots,\zeta_{r_m}$ dans le voisinage de $(0,\cdots,0)$:

$$(5.9)\qquad \xi_j=\chi_j(\zeta_{r_1},\cdots,\zeta_{r_m})\qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

En portant ces expressions dans (5.6), on obtient une solution

$$(5.10)\qquad x_j=\Phi_j(t,\zeta_{r_1},\cdots,\zeta_{r_m})\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

dépendant de m constantes arbitraires. Cette solution contient toutes les solutions périodiques partant d'un point assez voisin de l'origine.

6. Cela posé, revenons à la démonstration du théorème. La nécessité de la condition étant évidente, démontrons seulement la suffisance.

Posons

$$\psi_j^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\psi_j(0,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\,.$$

En portant dans (5.6) les expressions formelles

$$\xi_j\approx\psi_j^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\qquad\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

et en ordonnant suivant les puissances de $\eta_1,\cdots,\eta_\rho$, on obtient une solution formelle

$$x_j\approx\Psi_j(t,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\qquad\qquad(j=1,2,\cdots,n)\,,\tag{6.1}$$

où

$$\Psi_j(t,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\varphi_j(t,\psi_1^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho),\cdots,\psi_n^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho))\,.\tag{6.2}$$

On a

$$\Psi_j(0,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\psi_j^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\,,$$

de sorte que les solutions formelles (5.2) et (6.1) satisfont aux mêmes conditions initiales. Par suite

$$\psi_j(t,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\Psi_j(t,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\qquad\qquad(j=1,2,\cdots,n)\,.\tag{6.3}$$

Posons

$$\zeta_j=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\psi_j(t,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\,dt\qquad\qquad(j=r_1,\cdots,r_m)\,,\tag{6.4}$$

où les seconds membres sont, d'après l'hypothèse, des séries convergentes. En remarquant (6.2) et (6.3), on obtient

$$\zeta_j\approx\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\varphi_j(t,\psi_1^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho),\cdots,\psi_n^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho))\,dt\quad(j=r_1,\cdots,r_m)\,,\tag{6.5}$$

et (5.4), (6.2) et (6.3) entraînent

$$\psi_j^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\varphi_j(\omega,\psi_1^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho),\cdots,\psi_n^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho))\tag{6.6}$$
$$(j\neq 1,r_1+1,\cdots,r_{m-1}+1)\,.$$

Si l'on remplace dans (5.7) et (5.8) les ξ_j par ψ_j^0, on obtient ces relations formelles. Les relations (5.9) sont les conséquences de (5.7) et (5.8). Par suite on a les identités formelles

$$\psi_j^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\chi_j(\zeta_{r_1},\cdots,\zeta_{r_m})\qquad\qquad(j=1,2,\cdots,n)\tag{6.7}$$

si l'on remplace les ζ_j par les seconds membres de (6.5). Si l'on ordonne les seconds membres de (6.5) suivant les puissances entières de $\eta_1,\cdots,\eta_\rho$, on obtient les seconds membres de (6.4) qui sont des séries convergentes. (6.2) et (6.3) entraînent

$$\psi_j(t,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\varphi_j(t,\psi_1^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho),\cdots,\psi_n^0(\eta_1,\cdots,\eta_\rho))\,.\tag{6.8}$$

Les séries (5.3) sont donc convergentes.

III. Solutions périodiques.

7. Cherchons la transformation périodique formelle

$$(7.1)\qquad y_j \approx \hat{y}_j + \sum'' p_{jk_1\cdots k_n}(t)\, \hat{y}_1^{k_1}\cdots\hat{y}_n^{k_n} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

qui amène les équations formelles

$$(7.2)\qquad dy_j/dt \approx h_j(t, y_1,\cdots,y_n) \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

en les équations

$$(7.3)\qquad d\hat{y}_j/dt \approx \hat{h}_j(t, \hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_n) \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

où

$$(7.4)\quad h_j(t, y_1,\cdots,y_n) \approx \lambda_j y_j + \delta_{j-1} y_{j-1} + \sum'' b_{jk_1\cdots k_n} y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n} \exp((\lambda_j - \sum k_l\lambda_l)t),$$

$$(7.5)\qquad \hat{h}(t, \hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_n) \approx \lambda_j \hat{y}_j + \delta_{j-1}\hat{y}_{j-1} + \sum'' \hat{b}_{jk_1\cdots k_n} \hat{y}_1^{k_1}\cdots\hat{y}_n^{k_n} \exp((\lambda_j - \sum k_l\lambda_l)t),$$

$b_{jk_1\cdots k_n}$ et $\hat{b}_{jk_1\cdots k_n}$ étant des constantes qui s'annulent pour $\lambda_j \not\equiv \sum k_l\lambda_l$ (mod $2\pi i/\omega$).

Lemme. *La condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire la transformation* (7.1) *s'écrit*

$$(7.6)\qquad p_{jk_1\cdots k_n}(t) = p_{jk_1\cdots k_n} \exp((\lambda_j - \sum k_l\lambda_l)t),$$

où $p_{jk_1\cdots k_n}$ *sont des constantes qui sont nulles pour* $\lambda_j \not\equiv \sum k_l\lambda_l$ (mod $2\pi i/\omega$).

Supposons d'abord que l'on ait (7.6). Si l'on pose $y_j = z_j e^{\lambda_j t}$, $\hat{y}_j = \hat{z}_j e^{\lambda_j t}$, on aura

$$(7.7)\qquad z_j \approx \hat{z}_j + \sum'' p_{jk_1\cdots k_n} \hat{z}_1^{k_1}\cdots\hat{z}_n^{k_n} \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

$$(7.8)\qquad dz_j/dt = \delta_{j-1} z_{j-1} + \sum'' b_{jk_1\cdots k_n} z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

et les équations en $\hat{z}_j$ sont à coefficients constants:

$$(7.9)\qquad d\hat{z}_j/dt = \delta_{j-1}\hat{z}_{j-1} + \sum'' \hat{b}_{jk_1\cdots k_n} \hat{z}_1^{k_1}\cdots\hat{z}_n^{k_n} \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

On obtient donc pour les $\hat{h}_j$ les développements (7.5) et, d'après la périodicité, $\hat{b}_{jk_1\cdots k_n}$ s'annule pour $\lambda_j \not\equiv \sum k_l\lambda_l$ (mod $2\pi i/\omega$).

Pour démontrer la réciproque, supposons que l'on ait les développements (7.5), et de plus que l'on ait (7.6) pour $K = k_1 + \cdots + k_n < N$.

Si l'on pose[4)]

$$y_j = z_j + \sum_2^{N-1} p_{jk_1\cdots k_n}(t) z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n} \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

on obtient

$$dz_j/dt = \lambda_j z_j + \delta_{j-1} z_{j-1} + \sum'' c_{jk_1\cdots k_n} z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n} \exp((\lambda_j - \sum k_l\lambda_l)t) \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

4) $\sum\limits_m^N$ signifie la sommation étendue à tous les termes de degrés au moins égaux à m et au plus égaux à N.

les $c_{jk_1\cdots k_n}$ étant des constantes qui sont nulles pour $\lambda_j \not\equiv \sum k_l \lambda_l \pmod{2\pi i/\omega}$. On a de plus[5]

$$z_j = \hat{y}_j + \sum_N p_{jk_1\cdots k_n}(t)\, \hat{y}_1^{k_1}\cdots \hat{y}_n^{k_n} + [\hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_n\,;\, t]_{N+1}\,.$$

La transformation inverse est alors

$$\hat{y}_j = z_j - \sum_N p_{jk_1\cdots k_n}(t)\, z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n} + [z_1, \cdots, z_n\,;\, t]_{N+1}\,.$$

Par suite

$$\begin{aligned} d\hat{y}_j/dt = \lambda_j z_j + \delta_{j-1}{}' z_{j-1} &+ \sum{}'' c_{jk_1\cdots k_n}\, z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n} \exp((\lambda_j - \sum k_l \lambda_l)t) \\ &- \sum_N p'_{jk_1\cdots k_n}(t)\, z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n} \\ &- \sum_N \sum_l \Big(k_l \lambda_l + k_l \delta_{l-1} \frac{z_{l-1}}{z_l}\Big) p_{jk_1\cdots k_n}(t)\, z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n} + \cdots \end{aligned}$$

et puis

$$\hat{b}_{jk_1\cdots k_n} = c_{jk_1\cdots k_n}$$

pour $K = k_1 + \cdots + k_n < N$ et

$$\begin{aligned} &(\hat{b}_{jk_1\cdots k_n} - c_{jk_1\cdots k_n}) \exp((\lambda_j - \sum k_l \lambda_l)t) \\ &\quad = (\lambda_j - \sum k_l \lambda_l)\, p_{jk_1\cdots k_n}(t) - p'_{jk_1\cdots k_n}(t) + \delta_{j-1}\, p_{j-1,\, k_1\cdots k_n}(t) \\ &\quad - \sum (k_l + 1)\, \delta_{l-1}\, p_{jk_1\cdots k_{l-1}-1,\, k_l+1\cdots k_n}(t) \end{aligned}$$

pour $K = N$. On peut en conclure, d'après la périodicité de $p_{jk_1\cdots k_n}(t)$, que l'on a (7.6) pour $K = N$. Le lemme est donc établi.

Démontrons maintenant le

Théorème. *Il existe une transformation périodique formelle et une seule*

$$x_j = y_j + \sum{}'' q_{jk_1\cdots k_n}(t)\, y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.10}$$

qui amène les équations données en équations de la forme (7.2), *si l'on donne à*

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega q_{jk_1\cdots k_n}(t) \exp((\sum k_l \lambda_l - \lambda_j)t)\, dt = q_{jk_1\cdots k_n} \tag{7.11}$$

des valeurs quelconques données à l'avance pour $\lambda_j \equiv \sum k_l \lambda_l \pmod{2\pi i/\omega}$.

Considérons une transformation périodique particulière

$$x_j = \hat{y}_j + \sum{}'' \hat{q}_{jk_1\cdots k_n}(t)\, \hat{y}_1^{k_1}\cdots \hat{y}_n^{k_n} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)\,, \tag{7.12}$$

qui amène les équations données en les équations (7.3). Si (7.1) sont les relations entre $(y_1, \cdots, y_n)$ et $(\hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_n)$, on a (7.6). On voit sans peine que l'on a

$$q_{jk_1\cdots k_n}(t) = p_{jk_1\cdots k_n}(t) + \hat{q}_{jk_1\cdots k_n}(t) + \cdots$$

les termes non écrits ne dépendant que de $p_{jk_1'\cdots k_n'}(t)$, $\hat{q}_{jk_1'\cdots k_n'}(t)$ tels que $K' = k_1' + \cdots + k_n' < N$. Par suite

5) $[y_1, \cdots, y_n\,;\, t]_N$ représente une série entière de $y_1, \cdots, y_n$ dont les termes sont de degrés au moins égaux à N, les coefficients étant des fonctions de t.

$$(7.13)\qquad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega q_{jk_1\cdots k_n}(t)\exp\left(\left(\sum k_l\lambda_l-\lambda_j\right)t\right)dt$$

$$=p_{jk_1\cdots k_n}+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \hat{q}_{jk_1\cdots k_n}(t)\exp\left(\left(\sum k_l\lambda_l-\lambda_j\right)t\right)dt+\cdots$$

Supposons les $p_{j'k'_1\cdots k'_n}$ définis. Alors les $q_{j'k'_1\cdots k'_n}(t)$ sont définis et cette équation et la condition (7.11) déterminent $p_{jk_1\cdots k_n}$ pour $K=N$. Le théorème est donc établi.

8. Supposons que l'on ait

$$(8.1)\qquad \hat{h}_j(t,\hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_n)\approx 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

si l'on y pose $\hat{y}_j=0$ $(j\neq r_1,\cdots,r_m)$. Considérons la transformation formelle

$$(8.2)\qquad \begin{cases} y_j\approx \hat{y}_j+\sum'' p_{jh_1\cdots h_m}\hat{y}_{r_1}{}^{h_1}\cdots\hat{y}_{r_m}{}^{h_m} & (j=r_1,\cdots,r_m),\\ y_j=\hat{y}_j & (j\neq r_1,\cdots,r_m). \end{cases}$$

Elle satisfait à la condition du lemme du n° précédent. A la solution

$$\hat{y}_j=\begin{cases}\hat{C}_j & (j=r_1,\cdots,r_m)\\ 0 & (j\neq r_1,\cdots,r_m)\end{cases}$$

des équations (7.3) correspond la solution

$$y_j=\begin{cases}C_j & (j=r_1,\cdots,r_m)\\ 0 & (j\neq r_1,\cdots,r_m)\end{cases}$$

des équations transformées (7.2), où les C_j sont des séries formelles des $\hat{C}_j$. On peut considérer les C_j comme constantes arbitraires. On a donc

$$(8.3)\qquad h_j(t,y_1,\cdots,y_n)\approx 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

si l'on y pose $y_j=0$ $(j\neq r_1,\cdots,r_m)$.

Cela posé, on a le

Lemme. *Supposons l'existence d'une transformation périodique formelle* (7.12) *qui amène les équations données en les équations* (7.3) *telles que l'on ait* (8.1) *si l'on y pose* $\hat{y}_j=0$ $(j\neq r_1,\cdots,r_m)$. *Il existe alors une transformation périodique formelle* (7.10) *satisfaisant aux conditions* (7.11) *pour* $j=r_1,\cdots,r_m$, *et* $k_l=0$ $(l\neq r_1,\cdots,r_m)$ *et amenant les équations données aux équations* (7.2) *telles que l'on ait* (8.3) *si l'on y pose* $y_j=0$ *pour* $j\neq r_1,\cdots,r_m$.

Soit (8.2) les relations entre $(y_1,\cdots,y_n)$ et $(\hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_n)$. Si

$$k_l=\begin{cases}0 & (l\neq r_1,\cdots,r_m)\\ h_s & (l=r_s;\ s=1,\cdots,m),\end{cases}$$

les relations (7.13) deviennent

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega q_{jk_1\cdots k_n}(t)\,dt=p_{jh_1\cdots h_m}+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \hat{q}_{jk_1\cdots k_n}(t)dt+\cdots$$

Donc les conditions imposées aux coefficients $q_{jk_1\cdots k_n}(t)$ déterminent d'une seule manière les coefficients $p_{jh_1\cdots h_m}$. On définit ensuite la transformation (7.10) comme le produit des transformations (7.8) et (8.2). Cette transformation remplit toutes les conditions demandées.

9. Démontrons enfin le

Théorème. *Supposons l'existence d'une transformations périodique formelle* (7.1) *qui amène les équations données en les équations* (7.3) *telles que l'on ait* (8.1) *si l'on y pose* $\hat{y}_j=0$ $(j\neq r_1,\cdots,r_m)$. *Il existe alors une solution périodique développable en séries entières convergentes de m constantes arbitraires.*

Considérons la transformation périodique formelle (7.10) qui amène les équations données aux équations (7.2) telles que l'on ait (8.3) si l'on y pose $y_j=0$ pour $j\neq r_1,\dots,r_m$. Si donc on pose $y_j=0$ $(j\neq r_1,\dots,r_m)$, $y_{r_j}=C_j$ $(j=1,\dots,m)$, on obtient une solution périodique formelle. Posons

$$q_{jk_1\cdots k_n}(t)=\psi_{jh_1\cdots h_m}(t)$$

pour $k_l=0$ $(l\neq r_1,\dots,r_m)$ et $k_l=h_s$ $(l=r_s;\ s=1,\dots,m)$. D'après le lemme établi au n° précédent, on peut donner aux expressions

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \psi_{jh_1\cdots h_m}(t)dt \qquad (j=r_1,\dots,r_m)$$

de telles valeurs que l'on veut. On peut donc supposer que les séries

$$\sum{}'' C_1^{h_m}\dots C_m^{h_m}\int_0^\omega \psi_{jh_1\cdots h_n}(t)dt \qquad (j=r_1,\dots,r_m)$$

soient convergentes. Alors les séries formelles

$$\psi_j(t, C_1,\dots,C_m)=\begin{cases} C_j+\sum'' C_1^{h_1}\dots C_m^{h_m}\psi_{jh_1\cdots h_m}(t) & (j=r_1,\dots,r_m) \\ \sum'' C_1^{h_1}\dots C_m^{h_m}\psi_{jh_1\cdots h_n}(t) & (j\neq r_1,\dots,r_m) \end{cases}$$

sont périodiques et satisfont aux équations données. Donc, d'après le théorème établi au n° 5, ces séries sont convergentes.

Note. Nos présents résultats sont les améliorations que j'ai apportées aux résultats récents de M. Y. Sibuya à l'occasion de mes conférences tenues sur notre sujet à la Scuola Normale Superiore di Pisa, mai 1956.

6) Y. Sibuya: Sur les solutions périodiques d'un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients périodiques, ce Journal, 7 (1954), 243-254.