Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel, II.

Par Masuo HUKUHARA.

CHAPITRE V. EXISTENCE DES SUPPLÉMENTAIRES

Soient $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$ deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathfrak{K}$ conjugués l'un à l'autre. Un endomorphisme L de $\mathfrak{R}$ sera appelé endomorphisme gauche. Le correspondant de x par L sera désigné par Lx. Un endomorphisme L' de $\mathfrak{R}^*$ sera appelé endomorphisme droit. Le correspondant de u^* par L' sera désigné par u^*L'. Si l'on a

$$(u^*L')x = u^*(Lx) ,$$

l'un des endomorphismes L, L' est l'adjoint de l'autre. Pour désigner l'adjoint d'un endomorphisme L, nous employons la même lettre L, de sorte que l'on a l'associativité

$$(u^*L)x = u^*(Lx)$$

et nous dirons que L est un endomorphisme de $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*)$.

Nous avons défini l'endomorphisme supplémentaire d'un endomorphisme (gauche) L comme un endomorphisme $\underline{L}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $\quad L\underline{L} = I$ dans N_1 et $\underline{L}L = I$ dans $\underline{N}_1$;

(ii) $\quad L\{\underline{N}^n\} \subseteqq \underline{N}^{n+1}$, $\underline{L}\{N^n\} \subseteqq N^{n+1}$;

(iii) $\quad L\{\underline{N}_n\} \subseteqq \underline{N}_{n-1}$, $\underline{L}\{N_n\} \subseteqq N_{n-1}$;

où

$$N_n = L^n\{\mathfrak{R}\} , \quad N^n = L^{-n}\{o\} ,$$
$$\underline{N}_n = \underline{L}^n\{\mathfrak{R}\} , \quad \underline{N}^n = \underline{L}^{-n}\{o\} .$$

La connaissance d'un endomorphisme supplémentaire $\underline{L}$ élucide la construction de l'endomorphisme L. Il y a donc lieu de se demander: dans quel cas peut-on affirmer l'existence d'un endomorphisme supplémentaire? Nous nous limiterons seulement à l'étude du cas de min $\{\mu, \nu\} < \infty$.

I. Endomorphismes gauches supplémentaires

56. Considérons d'abord, le cas de $\mu = 0$, $\nu = \infty$. Nous prenons un sous-espace supplémentaire N_0^∞ de N_1, et définissons l'endomorphisme $\underline{L}$ comme un endomorphisme qui coïncide avec O dans N_0^∞ et $\underline{L} = L^{-1}$ dans N_1. La correspondance de $\mathfrak{R}$ à N_1 par L étant biunivoque, on a $\underline{N}_1 = \mathfrak{R}$, et la condition (i) est remplie. On a de plus

$$\underline{L}\{N_n\} = N_{n-1} .$$

Puisque $\underline{N}_1 = \mathfrak{R}$, on a $\underline{N}_n = \mathfrak{R}$ pour tous les entiers positifs n. La condition (iii) est donc vérifiée.

$\mu=0$ étant équivalente à $N^\nu=\{o\}$, on a les deuxièmes inclusions de la condition (ii). Il nous reste à vérifier les premières inclusions de (ii).

Si l'on pose

$$N_n^\infty = L^n\{N_0^\infty\} ,$$

on a

$$N_n \oplus N_{n-1}^\infty = N_{n-1} ,$$

c'est ce que l'on voit sans peine par l'induction relative à n. On a évidemment

$$N_0^\infty \oplus N_1^\infty \oplus \cdots \oplus N_{n-1}^\infty \oplus N_n = \mathfrak{R} ,$$

d'où l'on déduit

$$N^n = N_0^\infty \oplus N_1^\infty \oplus \cdots \oplus N_{n-1}^\infty .$$

Par suite,

$$L\{N^n\} = N_1^\infty \oplus \cdots \oplus N_n^\infty \subset \underline{N}^{n+1} . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Considérons ensuite le cas de $\mu=\infty$, $\nu=0$. Soit $\underline{N}_1$ un sous-espace supplémentaire de N^1. L fait correspondre $\underline{N}_1$ à $\mathfrak{R}$ d'une maniére biunivoque. La relation $\underline{L}Lx=x$ pour $x\in \underline{N}_1$ définit un endomorphisme $\underline{L}$ dans $\mathfrak{R}$. Les raisonnements ci-dessus nous montrent que L et $\underline{L}$ sont supplémentaires l'un à l'autre.

57. Avant d'aller plus loin, établissons quelques lemmes.

Lemme 1. *Soit L un endomorphisme tel que $L\{A\}\subseteq A$, $L\{B\}\subseteq B$, $\mathfrak{R}$ étant la somme directe de A et de B. Si un endomorphisme $\underline{L}$ est supplémentaire à L dans chacun des sous-espaces A et B, $\underline{L}$ est supplémentaire à L dans $\mathfrak{R}$.*

Posons

$$A_n = L^n\{A\} , \quad A^n = \{x\in A;\ L^n x = o\} = A \odot L^{-n}\{o\} ,$$
$$B_n = L^n\{B\} , \quad B^n = \{x\in B;\ L^n x = o\} = B \odot L^{-n}\{o\} .$$

Définissons de même les sous-espaces $\underline{A}^n$, $\underline{A}_n$, $\underline{B}^n$, $\underline{B}_n$ par rapport à $\underline{L}$. Puisque l'on a $\underline{L}L=I$ dans chacun des sous-espaces A_1 et B_1, on a cette relation dans N_1, car

$$N_1 = L\{\mathfrak{R}\} = L\{A\oplus B\} = A_1 \oplus B_1 .$$

On verra de même que l'on a $\underline{L}L=I$ dans $\underline{N}_1 = \underline{L}\{\mathfrak{R}\}$.

Si $x\in N^n$, et si l'on écrit $x=x'+x''$, $x'\in A$, $x''\in B$, on doit avoir $x'\in A^n$, $x''\in B^n$, de sorte que

$$N^n = A^n \oplus B^n .$$

On a alors

$$\begin{aligned} \underline{L}\{N^n\} &= \underline{L}\{A^n\} \oplus \underline{L}\{B^n\} \\ &\subseteq A^{n+1} \oplus B^{n+1} = N^{n+1} . \end{aligned}$$

On verra de même que l'on a

$$L\{\underline{N}^n\} \subseteq \underline{N}^{n+1} .$$

La condition (ii) est donc vérifiée.

$$N_n = L^n\{\mathfrak{N}\} = L^n\{A \obar B\} = A_n \obar B_n ,$$
$$\underline{L}\{N_n\} = \underline{L}\{A_n\} \obar \underline{L}\{B_n\} \subseteqq A_{n-1} \obar B_{n-1} = N_{n-1} .$$

On a de même
$$L\{\underline{N}_n\} \subseteqq \underline{N}_{n-1} .$$

La condition (iii) est donc vérifiée.

Réciproquement, on a le

Lemme 2. *Soient L et $\underline{L}$ des endomorphismes de $\mathfrak{N} = A \obar B$ supplémentaires l'un à l'autre. Si l'on a*

$$L\{A\} \subseteqq A , \quad L\{B\} \subseteqq B ,$$
$$\underline{L}\{A\} \subseteqq A , \quad \underline{L}\{B\} \subseteqq B ,$$

les endomorphismes L et $\underline{L}$ dont les domaines sont restreints à A ou à B sont encore supplémentaires l'un à l'autre.

En effet, si l'on pose

$$A_n = L^n\{A\} , \quad A^n = A \odot L^{-n}\{o\} , \quad B_n = L^n\{B\} , \quad B^n = B \odot L^{-n}\{o\} ,$$
$$\underline{A}_n = \underline{L}^n\{A\} , \quad \underline{A}^n = A \odot \underline{L}^{-n}\{o\} , \quad \underline{B}_n = \underline{L}^n\{B\} , \quad \underline{B}^n = B \odot \underline{L}^{-n}\{o\} ,$$

on a sans peine

$$N_n = A_n \obar B_n , \quad N^n = A^n \obar B^n ,$$
$$\underline{N}_n = \underline{A}_n \obar \underline{B}_n , \quad \underline{N}^n = \underline{A}^n \obar \underline{B}^n .$$

A_1 étant compris dans N_1, on a $\underline{L}L = I$ dans A_1. De même, on a $L\underline{L} = I$ dans $\underline{A}_1$.

$$\underline{L}\{A_n\} \subseteqq A \odot \underline{L}\{N_n\} \subseteqq A \odot N_{n-1} = A_{n-1} .$$

On voit de même

$$L\{\underline{A}_n\} \subseteqq \underline{A}_{n-1} , \quad \underline{L}\{A^n\} \subseteqq A^{n+1} , \quad L\{\underline{A}^n\} \subseteqq \underline{A}^{n+1} .$$

Donc L et $\underline{L}$ considérés comme endomorphismes de A sont supplémentaires l'un à l'autre.

58. Supposons maintenant $\mu < \infty$, $\nu = \infty$.

Prenons un sous-espace N_0^∞ supplémentaire à $C_1^\mu = N^\mu \oplus N_1$, et posons

$$N_n^\infty = L^n\{N_0^\infty\} \qquad (n = 1, 2, \cdots) . \tag{58.1}$$

La correspondance de N_n^∞ à N_{n+1}^∞ par L est biunivoque. On voit sans peine, par l'induction relative à n, la relation

$$N_n = \{D_n^{\mu-n} \oplus N_{n+1}\} \obar N_n^\infty , \tag{58.2}$$

qui deviendra

$$N_n = N_{n+1} \obar N_n^\infty$$

pour $n \geqq \mu$. On en déduit immédiatement

$$C_n^\mu = C_{n+1}^\mu \oplus N_n^\infty .$$

Si x appartient à $C_{n+1}^\mu \odot N_n^\infty$, il peut s'écrire

$$x = x' + x'' , \quad x' \in N^{\mu} , \quad x'' \in N_{n+1} .$$

x et x'' peuvent s'écrire

$$x = L^n y , \quad x'' = L^n y'' , \quad y \in N_0^{\infty} , \quad y'' \in N_1$$

et l'on a

$$x' = L^n(y - y'') \in N^{\mu} .$$

On a donc

$$y' = y - y'' \in N^{\mu} ,$$
$$y = y' + y'' \in C_1^{\mu} \odot N_0^{\infty} = \{o\} .$$

On a par suite $y = o$, $x = o$, et

$$C_n^{\mu} = C_{n+1}^{\mu} \oplus N_n^{\infty} . \tag{58.3}$$

La relation

$$\mathfrak{R} = C_n^{\mu} \oplus N_0^{\infty} \oplus \cdots \oplus N_{n-1}^{\infty} \tag{58.4}$$

est vraie pour $n=1$. Si nous supposons cette relation vraie, on obtient, en y remplaçant C_n^{μ} par le second membre de (58.3), la relation (58.4), où n est remplacé par $n+1$. Cette relation subsiste donc pour tous les entiers positifs n. En y posant $n = \mu$, nous obtenons

$$\mathfrak{R} = N^{\mu} \oplus \{N_{\mu} \oplus N_0^{\infty} \oplus \cdots \oplus N_{\mu-1}^{\infty}\} .$$

Un élément quelconque x appartenant à

$$N^{\mu} \odot \{N_{\mu} \oplus N_0^{\infty} \oplus \cdots \oplus N_{\mu-1}^{\infty}\}$$

peut s'écrire

$$x = x' + x'' , \quad x' \in N_{\mu} , \quad x'' \in N_0^{\infty} \oplus \cdots \oplus N_{\mu-1}^{\infty} .$$

$x - x' = x''$ appartenant à

$$C_{\mu}^{\mu} \odot \{N_0^{\infty} \oplus \cdots \oplus N_{\mu-1}^{\infty}\} = \{o\} ,$$

on a $x'' = o$ et

$$x = x' \in N^{\mu} \odot N_{\mu} = \{o\} .$$

On a donc finalement

$$\mathfrak{R} = N^{\mu} \oplus N_{\mu} \oplus N_0^{\infty} \oplus \cdots \oplus N_{\mu-1}^{\infty} .$$

Dans le sous-espace $A = N^{\mu}$, L est un endomorphisme d'ordre μ. Dans le sous-espace $B = N_{\mu} \oplus N_0^{\infty} \oplus \cdots \oplus N_{\mu-1}^{\infty}$, L est un endomorphisme pour lequel $\mu = 0$. L admet donc un endomorphisme supplémentaire $\underline{L}$ dans chacun des sous-espaces A et B. L admet donc, d'après le lemme 1 du n° 57, un endomorphisme supplémentaire $\underline{L}$ dans $\mathfrak{R}$.

59. Avant d'étudier le cas de $\mu = \infty$, $\nu < \infty$, nous remarquons que l'on a le

Lemme. *Si l'on a*

$$L\{A \oplus B\} = A' \oplus B' , \quad L\{A\} = A' , \quad L\{B\} = B' ,$$

on peut trouver un sous-espace B_0 tel que

$$B_0 \subseteqq B\ ,\quad A \oplus B = A \oplus B_0\ ,\quad L\{B_0\} = B'\ .$$

Considérons une base $\mathfrak{B}$ de B'. A chaque élément b' de $\mathfrak{B}$, on peut faire correspondre un élément $b \in B$ tel que $Lb = b'$. L'ensemble $\mathfrak{B}_1$ de ces éléments b engendre un sous-espace B_1, et l'on a

$$B_1 \subseteqq B\ ,\quad A \odot B_1 = \{o\}\ ,\quad L\{B_1\} = B'\ .$$

On voit sans peine

$$\mathfrak{R} = \{A \oplus B_1\} \oplus N^1\ ,$$

où nous avons supposé $\mathfrak{R} = A \oplus B$, ce qui ne restreint point la généralité. On peut donc trouver un sous-espace B_2 tel que

$$\mathfrak{R} = A \oplus B_1 \oplus B_2\ ,\quad B_2 \subseteqq N^1\ .$$

Il suffit alors de prendre $B_0 = B_1 \oplus B_2$.

60. Considérons maintenant le cas de $\mu = \infty$, $\nu < \infty$. Le théorème 16.1 montre que l'on a

$$\mathfrak{R} = N^\nu \oplus N_\nu\ .$$

Si l'on considère L comme un endomorphisme dans N_n, le nombre correspondant à ν devient $\nu - n$. On a donc

$$N_n = D_n^{\nu-n} \oplus N_\nu\ ,$$

où $D_n^{\nu-n} = N^{\nu-n} \odot N_n$, et en particulier

$$N_{\nu-1} = D_{\nu-1}^1 \oplus N_\nu\ .$$

Il existe donc un sous-espace A_0 tel que

$$N_{\nu-1} = A_0 \oplus N_\nu\ ,\quad A_0 \subseteqq D_{\nu-1}^1\ .$$

Or on a

$$N_{\nu-1} = L\{N_{\nu-2}\}\ ,\quad N_{\nu-2} = D_{\nu-2}^2 \oplus N_{\nu-1}\ ,\quad L\{D_{\nu-2}^2\} = D_{\nu-1}^1\ .$$

Il existe donc un sous-espace A_1 tel que

$$N_{\nu-2} = A_1 \oplus N_{\nu-1}\ ,\quad A_1 \subseteqq D_{\nu-2}^2\ ,\quad L\{A_1\} = A_0\ .$$

On voit de même qu'il existe un sous-espace A_2 tel que

$$N_{\nu-3} = A_2 \oplus N_{\nu-2}\ ,\quad A_2 \subseteqq D_{\nu-3}^3\ ,\quad L\{A_2\} = A_1\ ,$$

et ainsi de suite. On aura finalement

$$\mathfrak{R} = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_{\nu-1} \oplus N_\nu\ ,$$
$$L\{A_n\} = A_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots, \nu-1)\ .$$

L est dans le sous-espace $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_{\nu-1}$ un endomorphisme d'ordre ν et dans le sous-espace $B = N_\nu$ un endomorphisme pour lequel $\nu = 0$. A et B étant supplémentaire l'un à l'autre, L admet un endomorphisme supplémentaire L dans

$\mathfrak{N}$.

Nous avons donc le

Théorème 60.1. *Un endomorphisme gauche L tel que* $\min\{\mu, \nu\} < \infty$ *admet un endomorphisme gauche supplémentaire $\underline{L}$.*

II. Endomorphismes supplémentaires en deux sens

61. Considérons un endomorphisme L de $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ d'ordre fini. Nous posons

$$M_q{}^p = N_\nu \oplus \sum_{\neq (p,q)} \oplus N_s{}^r \tag{61.1}$$

où la sommation est étendue à toutes les paires ordonnées (r, s) différentes de (p, q). Le théorème 43.1 montre que s'il existe un endomorphisme supplémentaire L admettant son adjoint, on peut déterminer les $N_q{}^p$ de manière que l'on ait

$$\mathfrak{N}^* = {}_\nu N^* \oplus \sum_{p,q} \oplus {}_\perp M_q{}^p \ . \tag{61.2}$$

Nous voulons montrer que, pour l'existence d'un endomorphisme $\underline{L}$ de $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ supplémentaire à L, il suffiit que l'on ait (61.2) et ${}_\nu\tilde{N}^* = {}_\nu N^*$.

D'après le théorème 26.3, on a $\tilde{M}_q{}^p = M_q{}^p$. Une combinaison linéaire quelconque M des sous-espaces $N_q{}^p$ et N_ν étant l'intersection d'une certaine famille des sous-espaces N^ν et $M_q{}^p$, le théorème 26.2 donne $\tilde{M} = M$. Si donc on pose

$${}_q{}^pN^* = {}_\perp M_{p-1}^{q+1} \ , \quad {}_q{}^pM^* = {}_\perp N_{p-1}^{q+1} \ , \tag{61.3}$$

on a

$${}_q{}^pN_\perp{}^* = M_{p-1}^{q+1} \ , \quad {}_q{}^pM_\perp{}^* = N_{p-1}^{q+1} \ . \tag{61.4}$$

Si $u^* \in {}_{q-1}^{p+1}N^*$, $x \in M_{p-1}^{q+1}$, on a

$$(u^*L)x = u^*(Lx) = 0 \ ,$$

car $Lx \in M_p{}^q \perp {}_{q-1}^{p+1}N^*$. On a donc

$$\{{}_{q-1}^{p+1}N^*\}L \subseteqq {}_q{}^pN^* \ . \tag{61.5}$$

On verra de même

$$\{{}_q{}^1N^*\}L = \{o^*\} \ . \tag{61.5'}$$

Avant d'aller plus loin, établissons le

Lemme. *Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des sous-espaces tels que*

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n = \mathfrak{N} \ , \tag{61.6}$$

$${}_1A^* \oplus {}_2A^* \oplus \cdots \oplus {}_nA^* = \mathfrak{N}^* \ , \tag{61.7}$$

où

$${}_iA^* = {}_\perp B_i \ , \quad B_i = \sum_{k \neq i} \oplus A_k \ .$$

Si

$$C = \sum_{k \leq i} \oplus A_k \ ,$$

on a

$$ {}_{\perp}C = \sum_{k>i} \textcircled{\scriptsize I}\, {}_kA^* \,. $$

Si l'on pose ${}_iB^* = {}_{\perp}A_i$, on a évidemment ${}_iB^* \supset {}_kA^*$ $(k \neq i)$. ${}_{\perp}C$ étant l'intersection de ${}_1B^*, \cdots, {}_iB^*$, ${}_{\perp}C$ contient ${}_kA^*$ $(k > i)$.

De même, si

$$ D = \sum_{k \leq i} \textcircled{\scriptsize I} A_k \,, $$

${}_{\perp}D$ contient ${}_kA^*$ $(k \leq i)$. Puisque

$$ {}_{\perp}C \odot {}_{\perp}D = {}_{\perp}\{C \textcircled{\scriptsize I} D\} = {}_{\perp}\mathfrak{N} = \{o^*\} \,, $$

la relation (61.7) exige que l'on ait

$$ {}_{\perp}C = \sum \textcircled{\scriptsize I}\, {}_kA^* \,, \quad {}_{\perp}D = \sum_{k \leq i} \textcircled{\scriptsize I}\, {}_kA^* \,. $$ C.Q.F.D.

A l'aide de ce lemme, on déduit immédiatement

$$ (61.8) \qquad {}^mN^* = \sum_{p \leq m} \textcircled{\scriptsize I}\, {}_q{}^pN^* \,, $$

$$ (61.9) \qquad {}_nN^* = {}_{\nu}N^* \textcircled{\scriptsize I} \sum_{q \leq n} \textcircled{\scriptsize I}\, {}_q{}^pN^* \,. $$

Les sous-espaces ${}_q{}^pN^*$ et ${}_{\nu}N^*$ étant linéairement indépendants, on a

$$ {}_n{}^mD^* = {}^mN^* \odot {}_nN^* = \sum_{p \leq m} \sum_{q \leq n} \textcircled{\scriptsize I}\, {}_q{}^pN^* \,. $$

Par suite, on a

$$ {}^mN^* = {}_0{}^mN^* \textcircled{\scriptsize I} \{ {}^{m-1}N^* \oplus {}_1{}^mD^* \} \,. $$

Les sous-espaces ${}^{\nu}N^*$ est alors la somme directe des sous-espaces $\{{}_0{}^mN^*\}L^n$ ($n = 0, 1, \cdots, m-1$; $n = 1, 2, \cdots, \nu$). La relation (61.5) entraîne

$$ \{{}_0{}^mN^*\}L^n \subseteqq {}^{m-n}_{\;\;n}N^* \,. $$

(61.8) montre que ${}^{\nu}N^*$ est la somme directe des sousespaces ${}_q{}^pN^*$ $(p+q \leq \nu)$. On a donc nécessairement l'égalité

$$ \{{}_0{}^mN^*\}L^n = {}^{m-n}_{\;\;n}N^* \,, $$

et la correspondance de ${}_0{}^mN^*$ à ${}^{m-n}_{\;\;n}N^*$ par L^n est biunivoque.

Cela posé, nous pouvons définir un endomorphisme $\underline{L}$ de manière que l'on ait:

(i) $L\underline{L} = I$ dans N_1 et ${}_1\underline{N}^*$, et $\underline{L}L = I$ dans N_1 et ${}_1N^*$;

(ii) $\underline{L}\{N_{\nu}\} = N_{\nu}$, $\quad \{{}_{\nu}N^*\}\underline{L} = {}_{\nu}N^*$,

$\underline{L}\{N_q{}^p\} = N^{p+1}_{q-1}$, $\quad \{{}_q{}^pN^*\}\underline{L} = {}^{p+1}_{q-1}N^*$;

(iii) $\underline{L} = O$ dans $N_0{}^m$ et ${}_0{}^mN^*$.

Il nous reste à démontrer la relation

$$ (61.10) \qquad (u^*\underline{L})x = u^*(\underline{L}x) \,. $$

Supposons par exemple que $u^* \in {}_q{}^rN^*$, $x \in N_s{}^r$. Si $q = 0$, le premier membre est 0. Si $s = 0$, le second membre est aussi 0. Si $s > 0$, $\underline{L}x$ appartient à N^{r+1}_{s-1}, et r étant positif, on a $N^{r+1}_{s-1} \perp {}_0{}^pN^*$. Le second membre est donc aussi 0. Si $q > 0$, $s > 0$, nous posons $v^* = u^*\underline{L}$, $y = \underline{L}x$. On a alors $u^* = v^*L$, $x = Ly$. Par suite

$$(u^*\underline{L})x = v^*(Ly) = (v^*L)y = u^*(\underline{L}x) .$$

On verra de même que l'on a (61.10) dans chacun des cas: $u^* \in {}_q{}^pN^*$, $x \in N_\vee$; $u^* \in {}_\vee N^*$, $x \in N_s{}^r$; $u^* \in {}_\vee N^*$, $x \in N_\vee$. On a donc (61.10) pour $u^* \in \mathfrak{N}$ et $x \in \mathfrak{N}$. On obtient ainsi le

Théorème 61.1. *Pour qu'un endomorphisme L de $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ d'ordre fini admette un endomorphisme de $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ supplémentaire à L, il faut et il suffit que, en déterminant les sous-espaces $N_q{}^p$ convenablement, on ait ${}_q\tilde{N}^* = {}_qN^*$ et* (61.2), *où $M_q{}^p$ sont les sous-espaces définis par* (61.1).

On pourra vérifier sans peine que si $\dim N^\vee < \infty$, les conditions de ce théorème sont remplies.

62. Considérons un endomorphisme gauche L tel que $\mu < \infty$, $\nu = \infty$. S'il existe un endomorphisme gauche $\underline{L}$ supplémentaire à L, on a $\underline{\mu} = \infty$, $\underline{\nu} = \mu$.

Si $x \in N^\mu$, on a

$$\underline{L}^\mu L^{\mu+1} \underline{L} x = L \underline{L}^{\mu+1} L^\mu x = o ,$$

d'où il résulte

$$L^{\mu+1} \underline{L} x \in N_{\mu+1} \odot \underline{N}^\mu = \{o\} .$$

On a par suite

$$\underline{L} x \in N^{\mu+1} = N^\mu ,$$

ce qui montre

$$\underline{L}\{N^\mu\} \subseteqq N^\mu .$$

On a alors

$$\underline{L}^\mu x = N^\mu \odot \underline{N}_\mu = \{o\}$$

pour $x \in N^\mu$. On a donc $N^\mu \subseteqq \underline{N}^\mu$ et le sous-espace[1] $N^\wedge = N^\infty \odot \underline{N}^\infty$ coïncide avec N^μ. On a de plus

$$N^\mu = \sum_{p+q<\mu} \oplus N_q{}^p , \quad N_q{}^p = L^q\{N_0{}^{p+q}\} .$$

Si $x = \sum x_q{}^p$ (mod A), on a $Lx = \sum Lx_q{}^p$ (mod A). On peut échanger les rôles de L et de $\underline{L}$. On a donc $\underline{L}x = \sum \underline{L}x_q{}^p$ (mod A). A étant le sous-espace formé des vecteurs x tels que $x_q{}^p = o$, on a

$$\underline{L}\{A\} \subseteqq A , \quad L\{A\} \subseteqq A .$$

Si L et $\underline{L}$ admettent leurs adjoints, On a de même

$${}^\mu\underline{N}^* = {}^\wedge N^* = \sum \oplus {}_q{}^pN^* , \quad {}_q{}^pN^* = \{{}^{p+q}_{\;0}N^*\}L^q .$$

En vertu du théorème 50.2, on a

$$\mathfrak{N} = N^\wedge \oplus {}^\wedge N_\perp{}^* , \quad \mathfrak{N}^* = {}^\wedge N^* \oplus {}_\perp N^\wedge ,$$

${}^\wedge N^*{}_\perp$, ${}_\perp N^\wedge$ coïncidant avec A, A^*. Puis le théorème 26.3 entraîne

$$\tilde{N}^\wedge = N^\wedge , \quad {}^\wedge\tilde{N}^* = {}^\wedge N^* .$$

1) Dorénavant, nous écrirons $N^\wedge$, $N_\infty^\wedge$, $N_\vee^\infty$, $N_\wedge$, $N^\vee$, $N_\vee$, $\cdots$ au lieu de $N^{\infty\infty}$, $N_\infty{}^\infty$ $N_\infty{}^\infty$, $N_{\infty\infty}$, $N^\wedge \oplus N_\infty^\wedge \oplus N_\vee^\infty$, $N_\wedge \oplus N_\infty^\wedge \oplus N_\vee^\infty$, $\cdots$

$N^{\wedge}$ et ${}^{\wedge}N^*$ sont conjugués ainsi que ${}_{\perp}N^{\wedge}$ et ${}^{\wedge}N_{\perp}^*$. L et $\underline{L}$ sont supplémentaires l'un à l'autre dans $(N^{\wedge}, {}^{\wedge}N^*)$ ainsi que dans $({}^{\wedge}N_{\perp}^*, {}_{\perp}N^{\wedge})$. Si on les considère dans $(N^{\wedge}, {}^{\wedge}N^*)$, leurs ordres sont égaux à μ. Si on les considère dans $({}^{\wedge}N_{\perp}^*, {}_{\perp}N^{\wedge})$, les nombres correspondant à μ, ν deviennent 0, ∞. Il nous reste donc à étudier le cas de $\min\{\mu, \nu\}=0$.

63. Considérons le cas de $\mu=0$, $\nu=\infty$. Si $\underline{L}$ est son supplémentaire, on a

$$N^{\infty}=\{o\}\,, \quad N_{\infty}=\mathfrak{N}\,, \quad {}_{\infty}N^*=\mathfrak{N}^*\,, \quad {}^{\infty}\underline{N}^*=\{o^*\}$$

et puis

$$N^{\wedge}=\{o\}\,, \quad N^{\vee}_{\infty}=\{o\}\,, \quad N^{\infty}_{\vee}=\underline{N}^{\infty}\,, \quad N_{\wedge}=N_{\infty}\,,$$
$${}^{\wedge}N^*=\{o^*\}\,, \quad {}^{\vee}_{\infty}N^*={}^{\infty}N^*\,, \quad {}^{\infty}_{\vee}N^*=\{o^*\}\,, \quad {}_{\wedge}N^*={}_{\infty}\underline{N}^*\,.$$

D'après le théorème 52.3, on a $A=\mathfrak{N}$, $A^*=\mathfrak{N}^*$. Le théorème 54.2 montre ensuite que N^{∞}_{n-1} et ${}_{\infty}{}^{n}N^*$ sont conjugués. Si l'on pose

$$M_{\infty}{}^{m}=N_{m}\oplus\sum_{n=0}^{m-2}\oplus N_{n}{}^{\infty}\,, \tag{63.1}$$

$$M^{m} \;=\sum_{n=0}^{m-1}\oplus N_{n}{}^{\infty}\,, \tag{63.1'}$$

on a

$${}_{\perp}M_{\infty}{}^{m}={}_{\infty}{}^{m}N^*\,, \tag{63.2}$$

$${}_{\perp}M^{m} \;={}_{m}\underline{N}^*\,. \tag{63.2'}$$

La relation (63.2′) est évidente, car $M^{m}=\underline{N}^{m}$. Le premier membre de (63.2) contient évidemment le second. Pour démontrer l'inclusion réciproque, prenons un vecteur quelconque

$$u^*\equiv\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\infty}{}^{n}u^* \qquad (\mathrm{mod}\ {}_{\infty}\underline{N}^*).$$

$M_{\infty}{}^{m}$ contient les sous-espaces $N_{n}{}^{\infty}$ pour lesquels $n \geqq m-1$. $u^* \perp N_{n}{}^{\infty}$ entraîne ${}^{n+1}_{\infty}u^*=o^*$. Alors $u^*-{}_{\infty}{}^{m}u^*$ est orthogonal à

$$N_{m}\oplus\underline{N}^{m}=\mathfrak{N}\,. \tag{63.3}$$

On a donc $u^*={}_{\infty}{}^{m}u^*$.

Puisque

$$\mathfrak{N}^*={}_{m}\underline{N}^*\oplus{}_{\infty}{}^{1}N^*\oplus{}_{\infty}{}^{2}N^*\oplus\cdots\oplus{}_{\infty}{}^{m}N^*\,, \tag{63.4}$$

on a

$$\mathfrak{N}^*={}_{\perp}M^{m}\oplus{}_{\perp}M_{\infty}{}^{1}\oplus{}_{\perp}M_{\infty}{}^{2}\oplus\cdots\oplus{}_{\perp}M_{\infty}{}^{m}\,. \tag{63.5}$$

Réciproquement, cette condition est suffisante pour l'existence d'un supplémentaire, c'est-à-dire on a le

Théorème 63.1. *Soit L un endomorphisme de $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ tel que $\mu=\nu^*=0$, $\nu=\mu^*=\infty$. Pour qu'il existe un endomorphisme de $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ supplémentaire à L, il faut et il suffit que, en déterminant convenablement le sous-espace $N_0{}^{\infty}$ supplémentaire à N_1, on ait* (63.5) *pour tous les entiers m, où*

$$L^{n}\{N_0{}^{\infty}\}=N_{n}{}^{\infty} \tag{63.6}$$

et M^m, $M_\infty{}^m$ *sont les sous-espaces définis par* (63.1), (63.1′).

Si nous définissons les sous-espaces ${}_\infty{}^m N^*$ et ${}_m\underline{N}^*$ par (63.2) et (63.2′), on a (63.4). Nous allons montrer que l'on a

$$\{{}_\infty{}^m N^*\}L = {}^{m-1}_{\infty}N^* . \tag{63.7}$$

$$\{{}_m\underline{N}^*\}L = {}_{m-1}\underline{N}^* . \tag{63.7'}$$

Si $u^* \in {}_\infty{}^m N^*$, on a $u^*x=0$ pour $x \in M_\infty{}^m$. Si $x \in M_\infty{}^{m-1}$, Lx appartient à $M_\infty{}^m$, et l'on a $u^*Lx=0$. u^*L appartient donc à ${}^{m-1}_{\infty}N^*$. On peut démontrer de même que le premier membre de (63.7′) est contenu dans le second. La relation (63.4) entraîne ensuite les égalités (63.7) et (63.7′), car $\{\mathfrak{N}_*\}L = \mathfrak{N}^*$.

Définissons un endomorphisme $\underline{L}$ dans $\mathfrak{N}$ en posant $\underline{L}=O$ dans $N_0{}^\infty$ et $\underline{L}=L^{-1}$ dans N_1. $M_\infty{}^1$ étant égal a N_1, $\underline{L}$ sera défini dans $\mathfrak{N}=N_1 \oplus N_0{}^\infty$. Comme on a vu au n° 56, L ainsi défini est un endomorphisme gauche supplémentaire à L.

Puisque

$${}_\infty{}^1 N^* = {}_1 N_1 = {}^1 N^* ,$$

la relation (63.4) devient pour $m=1$

$$\mathfrak{N}^* = {}_1\underline{N}^* \oplus {}^1 N^* ,$$

et L fait correspondre ${}_1\underline{N}^*$ à $\mathfrak{N}^*$ d'une manière biunivoque. Nous définissons $\underline{L}$ dans $\mathfrak{N}^*$ par les conditions

$$\underline{L}L = I , \quad \{\mathfrak{N}^*\}\underline{L} = {}_1\underline{N}^* .$$

Pour démontrer

$$(u^*\underline{L})x = u^*(\underline{L}x) ,$$

on remarque que l'on a $u^*\underline{L}L = u^*$ pour tous les $u^* \in \mathfrak{N}^*$ et $L\underline{L}x = x$ pour $x \in N_1$. Si l'on pose $u^*\underline{L} = v^*$, $\underline{L}x = y$, on a

$$(u^*\underline{L})x = u^*(Ly) = (v^*L)y = u^*(\underline{L}x) .$$

Dans le cas de $x \in N_0{}^\infty$, on a $\underline{L}x = o$, $u^*\underline{L} \in {}_1\underline{N}^* = {}_1 N_0{}^\infty$, et les deux membres sont nuls.

Le théorème est donc établi.

Le cas de $\mu=\infty$, $\nu=0$ peut être ramené au cas étudié en échangeant les rôles de $\mathfrak{N}$ et de $\mathfrak{N}^*$.

CHAPITRE VI. VALEURS PROPRES

Les sous-espaces N^n, N_n et les entiers μ, ν relatifs à l'endomorphisme

$$L[\lambda] = I - \lambda K$$

dépendant de λ, nous les désignerons respectivement par $N^n[\lambda]$, $N_n[\lambda]$, $\mu[\lambda]$, $\nu[\lambda]$. Ceux qui correspondent à l'endomorphisme $-K$ seront désignés par $N^n[\infty]$, $N_n[\infty]$, $\mu[\infty]$, $\nu[\infty]$. Les valeurs propres de l'endomorphisme K sont les éléments de $\mathfrak{K}$

tels que

$$\max\{\mu[\lambda], \nu[\lambda]\} > 0 .$$

Nous appellerons espace propre relatif à la valeur propre λ le sous-espace $N^{\infty}[\lambda]$, et vecteur propre le vecteur appartenant à l'espace propre. S'il existe un endomorphisme supplémentaire $\underline{L}[\lambda]$, il est la somme directe des sous-espaces

$$N^{\wedge}[\lambda] = N^{\infty}[\lambda] \odot \underline{N}^{\infty}[\lambda] , \quad N^{\vee}_{\infty}[\lambda] = N^{\infty}[\lambda] \odot N_{\infty}[\lambda] .$$

Ceux-ci dépendent de la choix de $\underline{L}[\lambda]$, mais celui-là n'en dépend pas.

Nous appellerons espace principal relatif à λ le sous-espace $N_{\vee}[\lambda] = N^{\wedge}[\lambda] \oplus N^{\infty}_{\vee}[\lambda]$, où $N^{\infty}_{\vee}[\lambda] = \underline{N}^{\infty}[\lambda] \odot \underline{N}_{\infty}[\lambda]$, et le vecteur principal le vecteur appartenant à l'espace principal. L'espace principal dépend de la choix de l'endomorphisme supplémentaire $\underline{L}[\lambda]$.

Le but principal de ce chapitre est à associer, sous certaines conditions, à chaque vecteur une série de vecteurs principaux.

I. Espaces propres.

64. On a d'abord le

Théorème 64.1. *Si $\lambda \neq \lambda'$, on a*

$$L[\lambda]\{N^{m}[\lambda']\} = N^{m}[\lambda'] , \tag{64.1}$$

pour $m = 1, 2, \cdots, \infty$, et la correspondance par $L[\lambda]$ est biunivoque[1].

Pour démontrer (64.1), supposons d'abord $x \in N^{1}[\lambda']$. On a dans ce cas

$$L[\lambda] x = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} x , \tag{64.2}$$

d'où l'on déduit (64.1) pour $m = 1$.

Pour démontrer (64.1) par récurrence relative à m, nous supposons vraie la relation

$$L[\lambda]\{N^{m-1}[\lambda']\} = N^{m-1}[\lambda'] .$$

Remarquons que l'on a

$$\lambda' L[\lambda] - \lambda L[\lambda'] = (\lambda' - \lambda) I . \tag{64.3}$$

Si $x \in N^{m}[\lambda']$, on a $L[\lambda'] x \in N^{m-1}[\lambda']$ et la relation

$$\lambda' L[\lambda] x = \lambda L[\lambda'] x + (\lambda' - \lambda) x$$

montre que $L[\lambda] x$ appartient à $N^{m}[\lambda']$. On voit de plus que si $x \notin N^{m-1}[\lambda']$, $L[\lambda] x$ n'appartient pas à $N^{m-1}[\lambda']$.

Réciproquement, la relation

$$(\lambda' - \lambda) x = \lambda' L[\lambda] x - \lambda L[\lambda'] x$$

montre que si $x \in N^{m}[\lambda']$, x appartient à $L[\lambda]\{N^{m}[\lambda']\}$. On a donc la relation

1) L'un des nombres λ et λ' peut devenir ∞. Il en sera de même pour la suite bien que nous n'insistions pas ce point.

(64.1) et la correspondance de $N^m[\lambda']$ en lui-même par $L[\lambda]$ est biunivoque. m étant un entier positif quelconque, la relation (64.1) est aussi vraie pour $m=\infty$.

On arrivera à la même conclusion dans le cas de $\lambda=\infty$ ou de $\lambda'=\infty$, en utilisant au lieu de (64.3) les relations

(64.3′) $$\lambda' L[\infty]-L[\lambda']=-I\ ,$$

(64.3″) $$L[\lambda]-\lambda L[\infty]=I\ .$$

Théorème 64.2. *Si $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont différents les uns des autres, on a*

(64.4) $$N_\infty[\lambda_0]\supseteqq N^\infty[\lambda_1]\oplus N^\infty[\lambda_2]\oplus\cdots\oplus N^\infty[\lambda_n]\ .$$

Supposons que l'on ait

(64.5) $$x_1+x_2+\cdots+x_n=o\ ,$$

x_j appartenant à $N^\infty[\lambda_j]$. Si m est assez grand, on a $x_1\in N^m[\lambda_1]$, et puis

$$y_2+\cdots+y_n=o\ ,$$

où

$$y_j=L[\lambda_1]^m x_j \qquad (j=2, 3, \cdots, n).$$

D'après le théorème précédent, y_j appartient à $N^\infty[\lambda_j]$ et si $y_j=o$, on a $x_j=o$. On pourra donc démontrer par récurrence relative à n que (64.5) entraîne $x_1=x_2=\cdots=x_n=o$. Les sous-espaces $N^\infty[\lambda_1], N^\infty[\lambda_2], \cdots, N^\infty[\lambda_n]$ sont donc linéairement indépendants.

Pour démontrer l'inclusion (64.4), il suffit de remarquer que la relation (64.1) entraîne

$$L[\lambda]^m\{N^\infty[\lambda']\}=N^\infty[\lambda']$$

pour m positif quelconque et puis

$$N^\infty[\lambda']\subseteqq N_\infty[\lambda]\ .$$

Théorème 64.3. *Soit A un ensemble dans $\mathfrak{K}$. Si λ_0 n'appartient pas à A, on a*[1]

(64.6) $$L[\lambda_0]\{N_m[\lambda_0]\odot\bigcap_\lambda N_n[\lambda]\}=N_{m+1}[\lambda_0]\odot\bigcap_\lambda N_n[\lambda]\ ,$$

n pouvant dépendre de $\lambda\in A$.

Il est évident que le second membre comprend le premier. Il suffit donc de démontrer l'inclusion réciproque.

Un vecteur quelconque x du second membre peut s'écrire $x=L[\lambda_0]y$, où $y\in N_m[\lambda_0]$. A l'aide de la relation (64.3), on peut écrire

$$(\lambda-\lambda_0)y=\lambda x-\lambda_0 L[\lambda]y\ .$$

Chaque terme du second membre appartient à $N_1[\lambda]$. y appartient donc à $N_1[\lambda]$. Alors, si $n>1$, chaque terme du second membre appartient à $N_2[\lambda]$. y appartient donc à $N_2[\lambda]$, et ainsi de suite. On peut en conclure que y appartient à $N_n[\lambda]$.

1) Ici aussi, A peut contenir ∞ ou λ_0 peut devenir ∞. On verra de plus que n peut devenir ∞. Pour que l'on puisse prendre $m=\infty$, il suffit que l'on ait

$$L[\lambda_0]\{N_\infty[\lambda_0]\}=N_\infty[\lambda_0]\ .$$

Par conséquent, le premier membre de (64.6) comprend le second.

65. Si en particulier on a

$$\mu[\lambda]=\nu[\lambda]<\infty\ , \quad \mu[\lambda']=\nu[\lambda']<\infty\ ,$$

les relations

$$N_\infty[\lambda]\supseteqq N^\infty[\lambda']\ , \quad N_\infty[\lambda']\supseteqq N^\infty[\lambda]\ ,$$

$$N^\infty[\lambda]\oplus N_\infty[\lambda]=N^\infty[\lambda']\oplus N_\infty[\lambda']=\mathfrak{R}$$

entraînent

$$\mathfrak{R}=N^\infty[\lambda]\oplus N^\infty[\lambda']\oplus\{N_\infty[\lambda]\odot N_\infty[\lambda']\}\ .$$

D'une manière plus générale, on a le

Théorème 65.1. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ sont différents les uns des autres et si l'on a de plus*

$$\mu[\lambda_j]=\nu[\lambda_j]<\infty \qquad (j=1, 2, \cdots, m)\ ,$$

on a la relation

$$\mathfrak{R}=N^\infty[\lambda_1]\oplus\cdots\oplus N^\infty[\lambda_m]\oplus\{N_\infty[\lambda_1]\odot\cdots\odot N_\infty[\lambda_m]\}\ . \tag{65.1}$$

Pour démontrer ce théorème par récurrence relative à m, nous supposons que l'on ait

$$\mathfrak{R}=A\oplus B\ ,$$

en posant

$$A=N^\infty[\lambda_1]\oplus\cdots\oplus N^\infty[\lambda_{m-1}]\ ,$$

$$B=N_\infty[\lambda_1]\odot\cdots\odot N_\infty[\lambda_{m-1}]\ .$$

Le théorème 64.2 montre que l'on a

$$N_\infty[\lambda_m]\supseteqq A\ , \quad B\supseteqq N^\infty[\lambda_m]\ .$$

Ces relations entraînent avec

$$\mathfrak{R}=A\oplus B=N^\infty[\lambda_m]\oplus N_\infty[\lambda_m]$$

la relation

$$\mathfrak{R}=A\oplus N^\infty[\lambda_m]\oplus\{B\odot N_\infty[\lambda_m]\}\ ,$$

qui n'est autre que la relation (65.1).

66. Considérons le cas où l'endomorphisme K admet son adjoint. Les sous-espace ${}^mN^*$, ${}_nN^*$, $\cdots$ correspondant à l'endomorphisme $L[\lambda]$ seront désignés par $[\lambda]^mN^*$, $[\lambda]_nN^*$, $\cdots$

On sait que l'on a

$$N^n[\lambda]=[\lambda]_nN_1{}^*\ ,$$

d'où l'on déduit

$$N^n[\lambda]\perp[\lambda]_\infty N^*$$

et puis

$$N^\infty[\lambda]\perp[\lambda]_\infty N^*\ .$$

Si $\lambda\neq\lambda'$, $[\lambda']^{\infty}N^{*}$ est contenu dans $[\lambda]_{\infty}N^{*}$. On a donc le

Théorème 66.1. *Si l'endomorphisme K admet son adjoint, on a*

$$[\lambda]^{\infty}N^{*}\perp N^{\infty}[\lambda] \tag{66.1}$$

pour $\lambda\neq\lambda'$.

Avant d'aller plus loin, remarquons quelques porpositions faciles à établir.

Théorème 66.2. *Si l'on a* (55.1) *et* (55.1′), *on a*

$$\begin{aligned}
{}^{\wedge}N_{\perp}{}^{*}&=\tilde{N}_{\overset{\vee}{\infty}}\obar\tilde{N}_{\underset{\vee}{\infty}}\obar N_{\wedge}\,, & {}_{\perp}N^{\wedge}&={}_{\overset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\obar{}_{\underset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\obar{}_{\wedge}N^{*}\,,\\
{}_{\overset{\vee}{\infty}}N_{\perp}{}^{*}&=\tilde{N}^{\wedge}\obar\tilde{N}_{\overset{\vee}{\infty}}\obar N_{\wedge}\,, & {}_{\perp}N_{\overset{\vee}{\infty}}&={}^{\wedge}N^{*}\obar{}_{\overset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\obar{}_{\wedge}N^{*}\,,\\
{}_{\underset{\vee}{\infty}}N_{\perp}{}^{*}&=\tilde{N}^{\wedge}\obar\tilde{N}_{\underset{\vee}{\infty}}\obar N_{\wedge}\,, & {}_{\perp}N_{\underset{\vee}{\infty}}&={}^{\wedge}\tilde{N}^{*}\obar{}_{\underset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\obar{}_{\wedge}N^{*}\,,\\
{}_{\wedge}N_{\perp}{}^{*}&=\tilde{N}^{\wedge}\obar\tilde{N}_{\overset{\vee}{\infty}}\obar\tilde{N}_{\underset{\vee}{\infty}}\,, & {}_{\perp}N_{\wedge}&={}^{\wedge}\tilde{N}^{*}\obar{}_{\overset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\obar{}_{\underset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\,.
\end{aligned}$$

En effet, les relations de la première ligne sont les conséquences des théorèmes 52.3 et 55.1. Les relations de la deuxième et de la troisième lignes sont les conséquences des théorèmes 54.4 et 55.1. ${}_{\wedge}N^{*}$ est orthogonal à $N^{\wedge}$, $\tilde{N}_{\overset{\vee}{\infty}}$, $\tilde{N}_{\underset{\vee}{\infty}}$. La relation (55.1′) exige que $N_{\wedge}$ et ${}_{\wedge}N^{*}$ soient conjugués. On a donc la première relation de la dernière ligne. On peut démontrer de même la dernière relation.

Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses que plus haut, on a*

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^{\infty}&=\tilde{N}^{\wedge}\obar\tilde{N}_{\overset{\vee}{\infty}}\,, & {}^{\infty}\tilde{N}^{*}&={}^{\wedge}\tilde{N}^{*}\obar{}_{\overset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\,,\\
\underline{\tilde{N}}^{\infty}&=\tilde{N}^{\wedge}\obar\tilde{N}_{\underset{\vee}{\infty}}\,, & {}^{\infty}\underline{\tilde{N}}^{*}&={}^{\wedge}\tilde{N}^{*}\obar{}_{\underset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\,.
\end{aligned}$$

On a par exemple

$$\tilde{N}^{\infty}=\{{}_{\perp}N^{\infty}\}_{\perp}=\{\bigcap_{n}{}_{n}N^{*}\}_{\perp}={}_{\infty}N_{\perp}{}^{*}={}_{\wedge}N_{\perp}{}^{*}\odot{}^{\infty}N_{\perp}{}^{*}=\tilde{N}^{\wedge}\obar\tilde{N}_{\overset{\wedge}{\infty}}\,.$$

67. K étant un endomorphisme de $(\mathfrak{N},\mathfrak{N}^{*})$, supposons, pour chaque valeur $\lambda\in\mathfrak{K}$, l'existence d'un endomorphisme $\underline{L}[\lambda]$ de $(\mathfrak{N},\mathfrak{N}^{*})$ supplémentaire à $L[\lambda]$.

Le théorème 64.2 entraîne immédiatement

$$N_{\infty}[\lambda_0]\supseteq\tilde{N}^{\infty}[\lambda_1]\oplus\tilde{N}^{\infty}[\lambda_2]\oplus\cdots\oplus\tilde{N}^{\infty}[\lambda_n]\,, \tag{67.1}$$

car $\tilde{N}_{\infty}[\lambda]=N_{\infty}[\lambda]$. Mais on ne peut dire en général que les sous-espaces $\tilde{N}^{\infty}[\lambda_j]$ $(j=1,2,\ldots,n)$ sont linéairement indépendants.

Si l'on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}\ &=\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]\obar\tilde{N}_{\overset{\vee}{\infty}}[\lambda]\obar\tilde{N}_{\underset{\vee}{\infty}}[\lambda]\obar N_{\wedge}[\lambda]\,,\\
\mathfrak{N}^{*}&=[\lambda]^{\wedge}\tilde{N}^{*}\obar[\lambda]_{\overset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\obar[\lambda]_{\underset{\vee}{\infty}}\tilde{N}^{*}\obar[\lambda]_{\wedge}N^{*}\,,
\end{aligned} \tag{67.2}$$

nous dirons que le supplémentaire $\underline{L}[\lambda]$ est normal.

Théorème 67.1. *S'il existe des endomorphismes supplémentaires normaux $\underline{L}[\lambda]$ pour $\lambda\in\Lambda$, les sous-espaces $\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]$ $(\lambda\in\Lambda)$ sont linéairement indépendants.*

Soit, en effet,

$$x\in\tilde{N}^{\wedge}[\lambda_1]\odot\{\tilde{N}^{\wedge}[\lambda_2]\oplus\ldots\oplus\tilde{N}^{\wedge}[\lambda_n]\}\,,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ appartenant à A. x appartenant à $\tilde{N}^{\wedge}[\lambda_1]$, on peut écrire $x \simeq \sum x_q{}^p[\lambda_1]$. x est orthogonal à $[\lambda_2]_\infty N^* \odot \ldots \odot [\lambda_n]_\infty N^*$ et celui-ci comprend $[\lambda_1]^\infty N^*$. Si $x_q{}^p[\lambda_1] \neq o$, on pourrait trouver un vecteur $u^* \in [\lambda_1]_{p-1}^{q+1} N^*$ tel que $u^* x = u^* x_q{}^p[\lambda_1] \neq 0$. On a donc $x_q{}^p[\lambda_1] = o$.

Dans le cas où l'on a

$$N_\infty^\wedge[\lambda] = N_\vee^\infty[\lambda] = \{o\} \,. \tag{67.3}$$

on a

$$N^\infty[\lambda] = N^\wedge[\lambda] \,, \quad N_\infty[\lambda] = N_\wedge[\lambda] \,,$$
$$[\lambda]^\infty N^* = [\lambda]^\wedge N^* \,, \quad [\lambda]_\infty N^* = [\lambda]_\wedge N^* \,.$$

Donc la relation (67.1) peut être remplacée par

$$N_\infty[\lambda_0] \supseteqq \tilde{N}^\infty[\lambda_1] \oplus \tilde{N}^\infty[\lambda_2] \oplus \ldots \oplus \tilde{N}^\infty[\lambda_n] \,. \tag{67.1'}$$

On a de plus

$$\mathfrak{R} = \tilde{N}^\infty[\lambda] \oplus_\infty N[\lambda] \,, \quad \mathfrak{R}^* = [\lambda]^\infty N^* \oplus [\lambda]_\infty N^* \,.$$

On peut alors discuter exactement comme au n° 65 et on obtiendra le

Théorème 67.2. *S'il existe un système des endomorphismes supplémentaires normaux $\underline{L}[\lambda]$ tels que l'on ait* (67.3) *pour $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, on a*

$$\mathfrak{R} = \tilde{N}^*[\lambda_1] \oplus \ldots \oplus \tilde{N}^\infty[\lambda_n] \oplus \{\tilde{N}^\infty[\lambda_1] \odot \ldots \odot \tilde{N}^\infty[\lambda_n]\} \,. \tag{67.4}$$

Désignons par $N[\lambda]$ l'un quelconque des sous-espaces $\tilde{N}^\wedge[\lambda]$, $\tilde{N}_\infty^\wedge[\lambda]$, $\tilde{N}_\vee^\infty[\lambda]$, $N_\wedge[\lambda]$. On sait que l'on a

$$L[\lambda]\{N[\lambda]\} \subseteqq N[\lambda] \,.$$

On en déduit, en tenant compte de (64.3), la relation

$$L[\lambda']\{N[\lambda]\} \subseteqq N[\lambda] \,.$$

On peut donc énoncer le

Théorème 67.3. *Supposons que $L[\lambda]$ admette un endomorphisme supplémentaire normal $\underline{L}[\lambda]$. Désignons par $N[\lambda]$ l'un quelconque des sous-espaces $\tilde{N}^\wedge[\lambda]$, $\tilde{N}_\infty^\wedge[\lambda]$, $\tilde{N}_\vee^\infty[\lambda]$, $N_\wedge[\lambda]$ et par $[\lambda]N^*$ l'un quelconque des sous-espaces $[\lambda]^\wedge N^*$, $[\lambda]_\infty^\wedge \tilde{N}^*$, $[\lambda]_\vee^\infty \tilde{N}^*$, $[\lambda]_\wedge N$. On a alors*

$$L[\lambda']\{N[\lambda]\} \subseteqq N[\lambda] \,, \quad \{[\lambda]N^*\} L[\lambda'] \subseteqq [\lambda]N^* \,. \tag{67.5}$$

68. Si les endomorphismes supplémentaires normaux $\underline{L}[\lambda]$ $(\lambda \in A)$ sont tels que

$$\underline{N}^\infty[\lambda] \subseteqq N_\infty[\lambda'] \,, \quad [\lambda]^\infty \underline{N}^* \subseteqq [\lambda']_\infty N^* \tag{68.1}$$

pour deux éléments quelconques λ, λ' de A, nous dirons que les endomorphismes supplémentaires $\underline{L}[\lambda]$ $(\lambda \in A)$ sont en accord et que l'endomorphisme K est accordable dans A. Puisque

$$\underline{N}^\infty[\lambda] = N^\wedge[\lambda] \oplus N_\vee^\infty[\lambda] \,, \quad [\lambda]^\infty \underline{N}^* = [\lambda]^\wedge N^* \oplus [\lambda]_\vee^\infty N^* \,,$$

les relations

(68.1′) $$N^{\infty}_{\vee}[\lambda]\subseteqq N_{\infty}[\lambda'] , \quad [\lambda]^{\infty}N^{*}_{\vee}\subseteqq[\lambda']_{\infty}N^{*}$$

entraînent (58.1) et celles-ci entraînent

(68.1′′) $$\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda]\subseteqq N_{\infty}[\lambda'] , \quad [\lambda]^{\infty}\underline{\tilde{N}}^{*}\subseteqq[\lambda']_{\infty}N^{*} .$$

Ainsi les trois conditions (68.1), (68.1′), (68.1′′) sont équivalentes.

Dans le cas où l'on a (67.3) pour $\lambda\in\Lambda$, la condition (68.1′) est évidemment remplie. On a donc le

Théorème 68.1. *Si $L[\lambda]$ admet un supplémentaire normal $\underline{L}[\lambda]$ tel que l'on ait* (67.3) *pour $\lambda\in\Lambda$, les supplémentaires $\underline{L}[\lambda]$ $(\lambda\in\Lambda)$ sont en accord.*

Si $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ appartiennent à Λ, on a

$$\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda_0]\subseteqq N_{\infty}[\lambda_1]\odot\ldots\odot N_{\infty}[\lambda_n] .$$

Par suite on a

(68.2) $$N_{\infty}[\lambda_0]\oplus\{N_{\infty}[\lambda_1]\odot\ldots\odot N_{\infty}[\lambda_n]\}=\mathfrak{R} .$$

On a de même

(68.2′) $$[\lambda_0]_{\infty}N^{*}\oplus\{[\lambda_1]_{\infty}N^{*}\odot\ldots\odot[\lambda_n]_{\infty}N^{*}\}=\mathfrak{R}^{*} .$$

Si x appartient à

$$\tilde{N}^{\infty}[\lambda_0]\odot\{\tilde{N}^{\infty}[\lambda_1]\oplus\ldots\oplus\tilde{N}^{\infty}[\lambda_n]\} ,$$

il est orthogonal au second membre de (68.2′). On a donc $x=o$.

On a par suite le

Théorème 68.2. *Si l'endomorphisme K est accordable dans Λ, les sous-espaces $\tilde{N}^{\infty}[\lambda]$ $(\lambda\in\Lambda)$ sont linéairement indépendants ainsi que les sous-espaces $[\lambda]^{\infty}N^{*}$, et on a* (68.2) *pour $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\in\Lambda$.*

69. Nous voulons maintenant généraliser la formule (67.4).

Théorème 69.1. *Si les endomorphismes supplémentaires $\underline{L}[\lambda]$ $(\lambda\in\Lambda)$ sont en accord, on a*

(69.1) $$D_n=\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda_1]\obar\ldots\obar\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda_n] ,$$

(69.2) $$A_n=\{N_{\wedge}[\lambda_1]\odot\ldots\odot N_{\wedge}[\lambda_n]\}\obar D_n ,$$

(69.3) $$B_n=\tilde{N}^{\wedge}[\lambda_1]\obar\ldots\obar\tilde{N}^{\wedge}[\lambda_n]\obar D_n ,$$

(69.4) $$\mathfrak{R}=\tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda_1]\obar\ldots\obar\tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda_n]\obar C_n$$

pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n\in\Lambda$, où

$$A_n=N_{\infty}[\lambda_1]\odot\ldots\odot N_{\infty}[\lambda_n] ,$$

$$B_n=\tilde{N}^{\infty}[\lambda_1]\obar\ldots\obar\tilde{N}^{\infty}[\lambda_n] ,$$

$$C_n=A_n\oplus B_n , \quad D_n=A_n\odot B_n .$$

Les relations (69.1)-(69.4) sont évidentes pour $n=1$. Nous les supposons donc vraies pour le cas de n diminué d'une unité. On voit immédiatement que l'on a

$$A_{n-1}\oplus N_{\infty}[\lambda_n]=\mathfrak{N}\,,\quad B_{n-1}\odot\tilde{N}^{\infty}[\lambda_n]=\{o\}\,,$$

$$A_{n-1}\supseteqq\tilde{N}^{\infty}[\lambda_n]\,,\qquad N_{\infty}[\lambda_n]\supseteqq B_{n-1}\,.$$

On en déduit sans peine les relations (69.1), (69.3) et (69.4). On a de plus

$$\begin{aligned}A_n&=N_{\infty}[\lambda_n]\odot A_{n-1}\\&=N_{\infty}[\lambda_n]\odot\{\{N_{\wedge}[\lambda_1]\odot\dots\odot N_{\wedge}[\lambda_{n-1}]\}\obar D_{n-1}\}\\&=\{N_{\infty}[\lambda_n]\odot N_{\wedge}[\lambda_1]\odot\dots\odot N_{\wedge}[\lambda_{n-1}]\}\obar D_{n-1}\\&=\{\{N_{\wedge}[\lambda_1]\odot\dots\odot N_{\wedge}[\lambda_{n-1}]\}\odot\{N_{\wedge}[\lambda_n]\obar N^{\vee}_{\infty}[\lambda_n]\}\}\obar D_{n-1}\\&=\{N_{\wedge}[\lambda_1]\odot\dots\odot N_{\wedge}[\lambda_n]\}\obar N^{\vee}_{\infty}[\lambda_n]\obar D_{n-1}\,.\end{aligned}$$

On a donc aussi (69.2).

Si l'on a en particulier,

$$N^{\vee}_{\infty}[\lambda_j]=N^{\infty}[\lambda_j]=\{o\}\qquad(j=1,2,\dots,n)\,,$$

C_n et D_n deviennent respectivement à $\mathfrak{N}$ et à $\{o\}$, et on retrouve la formule (67.4).

Théorème 69.2. *Si les endomorphismes supplémentaires $\underline{L}[\lambda]$ et $\underline{L}[\lambda']$ sont en accord, on a*

$$N_{\wedge}[\lambda']\supseteqq\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]\obar\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda]\obar\tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda]\,,\tag{69.5}$$

$$[\lambda]_{\wedge}N^*\supseteqq[\lambda]^{\wedge}\tilde{N}^*\obar[\lambda]^{\vee}_{\infty}\tilde{N}^*\obar[\lambda]^{\infty}_{\vee}\tilde{N}^*\,.\tag{69.6}$$

En effet, $[\lambda]_{\infty}N^*$ comprend

$$[\lambda']^{\infty}\tilde{N}^*\oplus[\lambda']^{\infty}\underline{\tilde{N}}^*=[\lambda']^{\wedge}\tilde{N}^*\obar[\lambda']^{\vee}_{\infty}\tilde{N}^*\obar[\lambda]^{\infty}_{\vee}\tilde{N}^*\,.$$

Celui-là étant orthogonal à $N^{\vee}_{\infty}[\lambda]$, on a la relation

$$N^{\vee}_{\infty}[\lambda]\perp[\lambda']^{\infty}\tilde{N}^*\obar[\lambda']^{\vee}_{\infty}\tilde{N}^*\obar[\lambda']^{\infty}_{\vee}\tilde{N}^*\,,$$

qui entraîne l'inclusion

$$N^{\vee}_{\infty}[\lambda]\subseteqq N_{\wedge}[\lambda']\,.\tag{69.7}$$

D'autre part, on a la relation montrée sur la figure 2 du chapitre I, où

$$A=N_{\infty}[\lambda']\,,\quad B_1=N_{\infty}[\lambda]\,,\quad B_2=\tilde{N}^{\infty}[\lambda']\,.$$

Or on a, en tenant compte des formules établies ci-dessus,

$$N_{\infty}[\lambda']\obar\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda']=N_{\infty}[\lambda]\obar\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda]=\tilde{N}^{\infty}[\lambda']\obar\underline{N}_{\infty}[\lambda']=\mathfrak{N}\,,$$

$$\begin{aligned}&\{N_{\infty}[\lambda']\odot N_{\infty}[\lambda]\}\obar\{N_{\infty}[\lambda']\odot\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda]\}\obar\{\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda']\odot N_{\infty}[\lambda]\}\obar\{\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda']\odot\tilde{N}^{\infty}[\lambda]\}\\&\quad=\{N_{\wedge}[\lambda]\odot N_{\wedge}[\lambda']\}\obar\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda]\obar\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda']\obar\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda]\obar\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda']=\mathfrak{N}\,,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\{N_{\infty}[\lambda']\odot\tilde{N}^{\infty}[\lambda']\}\obar\{N_{\infty}[\lambda']\odot\underline{N}_{\infty}[\lambda']\}\obar\{\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda']\odot\tilde{N}^{\infty}[\lambda']\}\obar\{\underline{\tilde{N}}^{\infty}[\lambda']\odot\underline{N}_{\infty}[\lambda']\}\\&\quad=\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda']\obar N_{\wedge}[\lambda']\obar N^{\wedge}[\lambda']\obar\tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda']=\mathfrak{N}\,.\end{aligned}$$

On a donc la relation montrée sur la figure 6 du chapitre I, où

$$A^1=N_\infty[\lambda'],\quad A_1=N_\infty[\lambda],\quad A_2=\tilde{N}^\infty[\lambda'],$$

$$B_1=\underline{\tilde{N}}^\infty[\lambda'],\quad B^1=\underline{\tilde{N}}^\infty[\lambda],\quad B^2=\underline{N}_\infty[\lambda'].$$

Par suite, on a $\underline{N}_\infty[\lambda']\supseteqq\underline{\tilde{N}}^\infty[\lambda]$. Celle-ci entraîne avec (69.7) l'inclusion

$$N_\infty[\lambda']\supseteqq\tilde{N}^\infty[\lambda]\oplus\tilde{N}_\infty^\infty[\lambda]\oplus\tilde{N}_\infty^\infty[\lambda].$$

Le second membre étant contenu aussi dans $N_\infty[\lambda']$, le théorème est établi.

II. Développements en des vecteurs propres.

70. Soit K un endomorphisme de $\mathfrak{R}$. Nous nous plaçons d'abord dans le cas où l'on a (65.1) pour les valeurs propres quelconques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Etant donné un vecteur quelconque x, on peut écrire d'une seule manière

$$x=x_1+x_2+\ldots+x_n+y, \tag{70.1}$$

$x_1, \ldots, x_n, y$ appartenant respectivement à

$$N^\infty[\lambda_1], \ldots, N^\infty[\lambda_n],\quad N_\infty[\lambda_1]\odot\ldots\odot N_\infty[\lambda_n].$$

Si $m<n$, on peut écrire encore d'une seule manière

$$x=x_1'+x_2'+\ldots+x_m'+y',$$

$x_1', \ldots, x_m', y'$ appartenant respectivement à

$$N^\infty[\lambda_1], \ldots, N^\infty[\lambda_m],\quad N_\infty[\lambda_1]\odot\ldots\odot N_\infty[\lambda_m].$$

Le dernier de ces sous-espaces comprenant

$$N^\infty[\lambda_{m+1}],\ \cdots,\ N^\infty[\lambda_n],$$

on a

$$x_{m+1}+\ldots+x_n+y\in N_\infty[\lambda_1]\odot\ldots\odot N_\infty[\lambda_m].$$

On a donc $x_1'=x_1, \ldots, x_m'=x_m$, $y'=x_{m+1}+\ldots+x_n+y$. Ainsi nous pouvons associer à chaque valeur propre λ un vecteur bien déterminé que nous désignerons par $x[\lambda]$.

Si $x[\lambda]=o$ pour toutes les valeurs propres λ, x appartient à $\bigcap_\lambda N_\infty[\lambda]$, et réciproquement.

Si $z=\alpha x+\beta y$, on aura évidemment

$$z[\lambda]=\alpha x[\lambda]+\beta y[\lambda],$$

Nous écrirons donc

$$x=\sum x[\lambda] \qquad (\mathrm{mod}\ \bigcap_\lambda N_\infty[\lambda]). \tag{70.2}$$

$x[\lambda]$ pouvant s'écrire d'une seule manière comme la somme des $x_q^p[\lambda]$, nous écrirons aussi

$$x=\sum_\lambda\sum_{p,q}x_q^p[\lambda] \qquad (\mathrm{mod}\ \bigcap_\lambda N_\infty[\lambda]). \tag{70.2'}$$

Si l'on a en particulier

$$N_\infty[\infty] \odot \bigcap_{\lambda \in \mathfrak{A}} N_\infty[\lambda] = \{o\} , \tag{70.3}$$

nous écrirons

$$x \simeq \sum_\lambda x[\lambda] \simeq \sum_\lambda \sum_{p,q} x_q{}^p[\lambda] \tag{70.4}$$

seulement dans le cas de $x \in N_\infty[\infty]$.

Grâce aux théorèmes 64.1 et 64.3, on a toujours

$$L[\rho]x = \sum L[\rho]x[\lambda] \qquad (\mathrm{mod}\ \bigcap_\lambda N_\infty[\lambda]) \tag{70.5}$$

et si en particulier on a (70.3),

$$L[\rho]x \simeq \sum_\lambda L[\rho]x[\lambda] \tag{70.6}$$

pour $x \in N_\infty[\infty]$. C'est-à-dire on peut appliquer l'opérateur $L[\rho]$ termes à termes aux séries (70.2) et (70.4).

Si l'on a la condition:

$$N_\infty[\infty] \oplus \bigcap_\lambda N_\infty[\lambda] = \mathfrak{R} , \tag{70.7}$$

plus forte que (70.3), on peut toujours écrire

$$x \simeq y + \sum_\lambda x[\lambda] ,$$

y appartenant à $\bigcap_\lambda N_\infty[\lambda]$.

71. Si $\rho \neq \lambda$, $L[\rho]$ fait correspondre $N^\infty[\lambda]$ à lui-même d'une manière biunivoque. Nous pouvons donc définir $L[\rho]^{-1}$ dans $N^\infty[\lambda]$ par les relations

$$L[\rho]L[\rho]^{-1} = I , \quad L[\rho]^{-1}\{N^\infty[\lambda]\} = N^\infty[\lambda] .$$

Si $y \in N_1[\rho]$, il existe un vecteur x tel que $y = L[\rho]x$. En comparant le développement

$$y = \sum_\lambda y[\lambda] \qquad (\mathrm{mod}\ \bigcap_\lambda N_\infty[\lambda]) \tag{71.1}$$

à (70.5), on a

$$x[\lambda] = L[\rho]y[\lambda] , \tag{71.2}$$

et puis

$$y[\lambda] = L[\rho]^{-1}x[\lambda] \tag{71.3}$$

pour $\lambda \neq \rho$. Si donc ρ n'est pas une valeur propre, on a

$$L[\rho]^{-1}y = \sum_\lambda L[\rho]^{-1}y[\lambda] \qquad (\mathrm{mod}\ \bigcap_\lambda N_\infty[\lambda]). \tag{71.4}$$

Si l'on a

$$y \simeq \sum_\lambda y[\lambda] \tag{71.5}$$

au lieu de (71.1), on aura

$$L[\rho]^{-1}y \simeq \sum L[\rho]^{-1}y[\lambda] \tag{71.6}$$

au lieu de (71.2), en supposant que ρ ne soit pas une valeur propre.

$L[\rho]^{-1}y[\lambda]$ est la partie principale de $L[\rho]^{-1}y$ à la valeur propre λ. Nous allons déterminer son expression.

$y[\lambda]$ appartenant à $N^\infty[\lambda]$, on peut écrire

$$x[\lambda]=\sum x_q{}^p[\lambda]\ ,\quad y[\lambda]=\sum y_q{}^p[\lambda]\ ,$$

les seconds membres ne contenant qu'un nombre fini de termes, et on a

$$y_q{}^p[\lambda]=\frac{\lambda-\rho}{\lambda}x_q{}^p[\lambda]+\frac{\rho}{\lambda}L[\lambda]x_{q-1}^{p+1}[\lambda]\ ,$$

qui peut encore s'écrire

$$x_q{}^p[\lambda]=\frac{\lambda}{\lambda-\rho}y_q{}^p[\lambda]-\frac{\rho}{\lambda-\rho}L[\lambda]x_{q-1}^{p+1}[\lambda]\ . \tag{71.7}$$

Si $q=0$, le second terme du second membre disparaît. On a donc

$$x_0{}^p[\lambda]=\frac{\lambda}{\lambda-\rho}y_0{}^p[\lambda]\ .$$

En portant cette expression dans (71.7), où l'on a posé $q=1$, on obtient

$$x_1{}^p[\lambda]=\frac{\lambda}{\lambda-\rho}y_1{}^p[\lambda]-\frac{\lambda\rho}{(\lambda-\rho)^2}L[\lambda]y_0{}^{p+1}[\lambda].$$

D'une manière générale, on a

$$\begin{aligned} x_q{}^p[\lambda]=&\frac{\lambda}{\lambda-\rho}y_q{}^p[\lambda]-\frac{\lambda\rho}{(\lambda-\rho)^2}L[\lambda]y_{q-1}^{p+1}[\lambda]\\ &+\frac{\lambda\rho^2}{(\lambda-\rho)^3}L[\lambda]^2y_{q-2}^{p+2}[\lambda]-\dots\frac{(-1)^q\lambda\rho^q}{(\lambda-\rho)^{q+1}}L[\lambda]^qy_0{}^{p+q}[\lambda]\ . \end{aligned} \tag{71.8}$$

Le plus grand des nombres $q+1$, pour lesquels $y_q{}^p[\lambda]=o$, est l'ordre du pôle λ de la partie principale $L[\rho]^{-1}y$ en λ.

En portant les expressions de (71.8) dans le développement de $x[\lambda]$, on voit sans peine que l'on a

$$x[\lambda]=\frac{\lambda}{\lambda-\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\rho}{\lambda-\rho}L[\lambda]\right)^k y[\lambda]\ .$$

On peut donc écrire dans $N^\infty[\lambda]$

$$L[\rho]^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda-\rho}\left(\frac{-\rho}{\lambda-\rho}L[\lambda]\right)^k . \tag{71.9}$$

Le second membre n'est autre que le développement formel du second membre de

$$L[\rho]^{-1}=\frac{\lambda}{\lambda-\rho}\left(I+\frac{\rho}{\lambda-\rho}L[\lambda]\right)^{-1} .$$

Si $\mu[\lambda]=\nu[\lambda]<\infty$, λ est pour $L[\rho]^{-1}$ dans $N^\infty[\lambda]$ un pôle de l'ordre $\mu[\lambda]$. Si $\mu[\lambda]=\nu[\lambda]=\infty$, le second membre de (71.9) contient une infinité de termes différents de O. Mais si l'on applique l'opérateur (71.9) à un élément déterminé

$N^{\infty}[\lambda]$, tous les termes sauf un nombre fini disparaît, et ce développement, quoiqu'il renferme une infinité de termes, a un sens bien déterminé dans $N^{\infty}[\lambda]$.

72. Considérons maintenant l'endomorphisme K de $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*)$ accordable dans $\mathfrak{K}$. Soit $\underline{L}[\lambda]$ $(\lambda \in \mathfrak{K})$ le système des supplémentaires en accord dans $\mathfrak{K}$. A l'aide du théorème 69.1, un vecteur quelconque peut s'écrire d'une seule manière

$$x = x' + \sum_{k=1}^{n} x^{\wedge}[\lambda_k] + \sum_{k=1}^{n} x_{\infty}^{\vee}[\lambda_k] + \sum_{k=1}^{n} x_{\vee}^{\infty}[\lambda_k] ,$$
$$x' \in N_{\wedge}[\lambda_1] \odot \ldots \odot N_{\wedge}[\lambda_n] ,$$
$$x^{\wedge}[\lambda_k] \in \tilde{N}^{\wedge}[\lambda_k] , \quad x_{\infty}^{\vee}[\lambda_k] \in \tilde{N}_{\infty}^{\wedge}[\lambda_k] , \quad x_{\vee}^{\infty}[\lambda_k] \in \tilde{N}_{\vee}^{\infty}[\lambda_k] .$$

A l'aide tu théorème 69.2, on peut vérifier sans peine que $x^{\wedge}[\lambda_k]$, $x_{\infty}^{\vee}[\lambda_k]$, $x_{\vee}^{\infty}[\lambda_k]$ ne dépendent pas de n. Nous pouvons écrire

$$x \equiv \sum_{\lambda} x^{\wedge}[\lambda] + \sum_{\lambda} x_{\infty}^{\vee}[\lambda] + \sum_{\lambda} x_{\vee}^{\infty}[\lambda] \qquad (\mathrm{mod}\ \bigcap_{\lambda} N_{\wedge}[\lambda]). \tag{72.1}$$

Si $z = \alpha x + \beta y$, on voit sans peine

$$z^{\wedge}[\lambda] = \alpha x^{\wedge}[\lambda] + \beta y^{\wedge}[\lambda] ,$$
$$z_{\infty}^{\vee}[\lambda] = \alpha x_{\infty}^{\vee}[\lambda] + \beta y_{\infty}^{\vee}[\lambda] ,$$
$$z_{\vee}^{\infty}[\lambda] = \alpha x_{\vee}^{\infty}[\lambda] + \beta y_{\vee}^{\infty}[\lambda] .$$

En vertu des théorèmes 64.3 et 67.3, on aura

$$y^{\wedge}[\lambda] = L[\rho] x^{\wedge}[\lambda] , \quad y_{\infty}^{\vee}[\lambda] = L[\rho] x_{\infty}^{\vee}[\lambda] , \quad y_{\vee}^{\infty}[\lambda] = L[\rho] x_{\vee}^{\infty}[\lambda]$$

pour $y = L[\rho]x$. $x^{\wedge}[\lambda]$ appartenant à $\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]$, on peut écrire

$$x^{\wedge}[\lambda] \simeq \sum x_q{}^{p}[\lambda] , \quad x_q{}^{p}[\lambda] \in N_q{}^{p}[\lambda] .$$

On a de même les développements

$$x_{\infty}^{\vee}[\lambda] \simeq \sum_{n=1}^{\infty} x_{\infty}{}^{n}[\lambda] , \quad x_{\infty}{}^{n}[\lambda] \in N_{\infty}{}^{n}[\lambda] , \tag{72.2}$$
$$x_{\vee}^{\infty}[\lambda] \simeq \sum_{n=0}^{\infty} x_n{}^{\infty}[\lambda] , \quad x_n{}^{\infty}[\lambda] \in N_n{}^{\infty}[\lambda] .$$

On peut appliquer l'opérateur $L[\rho]$ à ces séries termes à termes comme on l'a vu au n° 55.

Considérons en particulier le cas où l'on a

$$\tilde{M} \odot \bigcap_{\lambda} N_{\wedge}[\lambda] = \{o\} , \tag{72.3}$$

en posant

$$M = \sum_{\lambda} \oplus N^{\vee}[\lambda] . \tag{72.4}$$

Nous écrirons alors

$$x \simeq \sum_{\lambda} x^{\wedge}[\lambda] + \sum_{\lambda} x_{\infty}^{\vee}[\lambda] + \sum_{\lambda} x_{\vee}^{\infty}[\lambda] \tag{72.5}$$

seulement dans le das de $x \in \tilde{M}$.

Si $\underline{L}[\infty]$ est en accord avec $\underline{L}[\lambda]$ $(\lambda \in \mathfrak{R})$, on a

$$N_{\wedge}[\infty] \supset \tilde{M}, \quad \bigcap_{\lambda} N_{\wedge}[\lambda] \supset \tilde{N}^{\vee}[\infty], \quad \tilde{N}^{\vee}[\infty] \oplus N_{\wedge}[\infty] = \mathfrak{R} .$$

Si l'on a de plus

$$N_{\wedge}[\infty] \odot \bigcap_{\lambda} N_{\wedge}[\lambda] = \{o\} ,$$

on a nécessairement

$$\bigcap_{\lambda} N_{\wedge}[\lambda] = \tilde{N}^{\vee}[\infty], \quad N_{\wedge}[\infty] \oplus \bigcap_{\lambda} N_{\wedge}[\lambda] = \mathfrak{R} . \tag{72.6}$$

De même

$$[\lambda]_{\wedge} N^{*} \odot \bigcap_{\lambda} [\lambda]_{\wedge} N^{*} = \{o^{*}\}$$

entraîne

$$\bigcap_{\lambda} [\lambda]_{\wedge} \tilde{N}^{*} = [\infty]^{\vee} \tilde{N}^{*}, \quad [\infty]_{\wedge} N^{*} \oplus \bigcap [\lambda]_{\wedge} N^{*} = \mathfrak{R}^{*} . \tag{72.6'}$$

Or on a

$$_{\perp}N_{\wedge}[\infty] = [\infty]^{\vee} \tilde{N}^{*} = \bigcap_{\lambda} [\lambda]_{\wedge} N^{*} = {}_{\perp}M .$$

On a donc

$$\tilde{M} = N_{\wedge}[\infty] . \tag{72.7}$$

Ainsi on a (72.5) seulement dans le cas de $x \in N_{\wedge}[\infty]$. Mais dans les applications on rencontrera des cas où aucun des supplémentaires de $L[\infty]$ n'est normal,

73. Considérons un vecteur $x \in \tilde{N}^{\wedge}[\lambda]$. Si $\rho \neq \lambda$, x est contenu dans $N_{\wedge}[\rho]$. On a donc

$$\underline{L}[\rho] L[\rho] x = L[\rho] \underline{L}[\rho] x = x .$$

$L[\rho] y$ appartient à $\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]$, $\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda]$, $\tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda]$ ou $N_{\wedge}[\lambda]$ suivant que y appartient à $\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]$, $\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda]$, $\tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda]$ ou $N_{\wedge}[\lambda]$. $\underline{L}[\rho] x$ doit donc appartenir à $\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]$.

Il en est de même dans le cas où x appartient à l'un des sous-espaces $\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda]$, $\tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda]$. $\underline{L}[\rho]$ coïncide donc avec $L[\rho]^{-1}$ dansc hacun des sous-espaces $\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]$, $\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda]$, $\tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda]$, et l'on a

$$\underline{L}[\rho]\{\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]\} = \tilde{N}^{\wedge}[\lambda], \quad \underline{L}[\rho]\{\tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda]\} = \tilde{N}^{\vee}_{\infty}[\lambda], \quad \underline{L}[\rho]\{\tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda]\} = \tilde{N}^{\infty}_{\vee}[\lambda] .$$

Par suite, on a

$$\underline{L}[\rho] x = \sum \underline{L}[\rho] x^{\wedge}[\lambda] + \sum \underline{L}[\rho] x^{\vee}_{\infty}[\lambda] + \sum \underline{L}[\rho] x^{\infty}_{\vee}[\lambda] \quad \left(\mathrm{mod}\ \bigcap_{\lambda} N_{\wedge}[\lambda]\right). \tag{73.1}$$

Si x appartient à $N^{\wedge}[\lambda]$ ou à $N^{\vee}_{\infty}[\lambda]$, on a

$$\underline{L}[\rho] x = \frac{\lambda}{\lambda - \rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\rho}{\lambda - \rho} L[\lambda] \right)^{k} x$$

car presque tous les termes du second membre disparaissent. On peut donc écrire dans $\tilde{N}^{\wedge}[\lambda]$

(73.2) $$\underline{L}[\rho] \sim \frac{\lambda}{\lambda-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\rho}{\lambda-\rho} L[\lambda] \right)^k$$

comme au n° 71, car on peut réunir les termes du développement

$$\frac{\lambda}{\lambda-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p,q} \left(\frac{-\rho}{\lambda-\rho} L[\lambda] \right)^k x_q{}^p[\lambda] ,$$

appartenant à un même sous-espace $N_q{}^p[\lambda]$. Mais la chose se passe autrement dans $\tilde{N}_\infty^\vee[\lambda]$. Dans le devéloppement

$$\frac{\lambda}{\lambda-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\rho}{\lambda-\rho} L[\lambda] \right)^k x_\infty{}^n[\lambda] ,$$

il y a une infinité de termes appartenant à un même sous-espace $N_\infty{}^n[\lambda]$. Donc la formule (73.2) n'est applicable que dans $N_\infty^\vee[\lambda]$.

Au contraire, elle est applicable dans $\tilde{N}_\vee^\infty[\lambda]$.

En effet, si $\underline{L}[\rho]x=y$, $x \in \tilde{N}_\vee^\infty[\lambda]$, on a $y \in \tilde{N}_\vee^\infty[\lambda]$, $x=L[\rho]y$ et

$$x_n{}^\infty[\lambda] = \frac{\lambda-\rho}{\lambda} y_n{}^\infty[\lambda] + \frac{\rho}{\lambda} L[\lambda] y_{n-1}^\infty[\lambda] .$$

Cette relation détermine de proche en proche les $y_n{}^\infty[\lambda]$:

$$y_0{}^\infty[\lambda] = \frac{\lambda}{\lambda-\rho} x_0{}^\infty[\lambda] ,$$

$$y_1{}^\infty[\lambda] = \frac{\lambda}{\lambda-\rho} x^{1\infty}[\lambda] - \frac{\lambda\rho}{(\lambda-\rho)^2} L[\lambda] x_0{}^\infty[\lambda] ,$$

. . . .

$$y_n{}^\infty[\lambda] = \frac{\lambda}{\lambda-\rho} x_n{}^\infty[\lambda] - \frac{\lambda\rho}{(\lambda-\rho)^2} L[\lambda] x_{n-1}^\infty[\lambda] + \ldots + \frac{\lambda}{\lambda-\rho} \left(\frac{-\rho}{\lambda-\rho} L[\lambda] \right)^n x_0{}^\infty[\lambda]$$

. . . .

On a donc la formule (73.2).

Nous avons remarqué que le développement (73.2) n'a pas de sens dans $\tilde{N}_\infty^\vee[\lambda]$. Celui-ci est conjugué à $[\lambda]_\vee^\infty \tilde{N}^*$, et le développement (73.2) a un sens bien déterminé dans $[\lambda]_\vee^\infty \tilde{N}^*$. On a alors pour $u^* \in [\lambda]_\vee^\infty \tilde{N}^*$, $x \in \tilde{N}_\infty^\vee[\lambda]$,

$$\left(u^* \left(\frac{\lambda}{\lambda-\rho} \sum \left(\frac{-\rho}{\lambda-\rho} L[\lambda] \right)^k \right) \right) x = (u^* \underline{L}[\rho]) x = u^* (\underline{L}[\rho] x) .$$

On peut donc interpréter le développement (73.2) dans $\tilde{N}_\infty^\vee[\lambda]$ comme un opérateur qui fait correspondre à $x \in \tilde{N}_\infty^\vee[\lambda]$ un vecteur $y \in \tilde{N}_\infty^\vee[\lambda]$ tel que l'on ait

$$u^* y = \left(u^* \left(\frac{\lambda}{\lambda-\rho} \sum \left(\frac{\lambda}{\lambda-\rho} L[\lambda] \right)^k \right) \right) x$$

pour $u^* \in [\lambda]_\vee^\infty N^*$. Car $\underline{L}[\rho]y$ est un seul vecteur satisfaisant à cette condition.

III. Les développements de K et de son résolvant.

74. Soit K un endomorphisme de $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ accordable dans $\mathfrak{K}$. Nous supposons de plus (72.3). Désignons par $K[\lambda]$ l'endomorphisme qui coïncide avec K dans $\tilde{N}^{\vee}[\lambda]$, $[\lambda]^{\vee}\tilde{N}^*$ et avec O dans $N_{\wedge}[\lambda]$, $[\lambda]_{\wedge}N^*$. x étant un vecteur de $\tilde{M}$ on a (72.5), et puis on a formellement

$$\begin{aligned} Kx &\simeq \sum_{\lambda} Kx^{\wedge}[\lambda] + \sum_{\lambda} Kx^{\vee}_{\infty}[\lambda] + \sum Kx^{\infty}_{\vee}[\lambda] \\ &\simeq \sum_{\lambda} K[\lambda]x^{\wedge}[\lambda] + \sum_{\lambda} K[\lambda]x^{\vee}_{\infty}[\lambda] + \sum_{\lambda} K[\lambda]x^{\infty}_{\vee}[\lambda] \\ &\simeq \sum_{\lambda}\sum_{\rho} K[\rho]x^{\wedge}[\lambda] + \sum_{\lambda}\sum_{\rho} K[\rho]x^{\vee}_{\infty}[\lambda] + \sum_{\lambda}\sum_{\rho} K[\rho]x^{\infty}_{\vee}[\lambda] \\ &\simeq \left(\sum_{\rho} K[\rho]\right)\left(\sum_{\lambda} x^{\wedge}[\lambda] + \sum_{\lambda} x^{\vee}_{\infty}[\lambda] + \sum_{\lambda} x^{\infty}_{\vee}[\lambda]\right) \\ &\simeq \left(\sum_{\rho} K[\rho]\right)x . \end{aligned}$$

Par suite on peut écrire

$$K \simeq \sum_{\rho} K[\rho] \tag{74.2}$$

dans $\tilde{M}$ et $\tilde{M}^*$.

Si ρ n'est pas une valeur propre, $L[\rho]^{-1}$ est défini dans $\mathfrak{N}$, et l'endomorphisme $\underline{K}[\rho]$ défini par la relation

$$I - \rho\underline{K}[\rho] = L[\rho]^{-1}$$

est l'endomorphisme résolvant de K. Il est seulement défini pour les valeurs non propres. Mais le supplémentaire $\underline{L}[\rho]$ coïncide avec $L[\rho]^{-1}$ pour les valeurs non propres ρ. Nous pouvons donc définir $\underline{K}[\rho]$ par la relation

$$I - \rho\underline{K}[\rho] = \underline{L}[\rho] . \tag{74.3}$$

Alors $\underline{K}[\rho]$ sera défini pour toutes les valeurs de $\rho \neq 0$ dès que l'on définit un système des supplémentaires $\underline{L}[\rho]$ en accord dans $\mathfrak{K}$. Nous poserons

$$\underline{K}[0] = -K .$$

75. On sait que l'on a

$$L[\lambda]\{N_q{}^p[\lambda]\} = N_{q+1}^{p-1}[\lambda] , \quad \{[\lambda]_p{}^q N^*\}L[\lambda] = [\lambda]_{p+1}^{q-1}N^*$$

et

$$K[\lambda] = \frac{1}{\lambda}(I - L[\lambda])$$

dans $\tilde{N}^{\vee}[\lambda]$. Nous définissons l'endomorphisme $L_q{}^p[\lambda]$ de $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ par les conditions

$$L_q{}^p[\lambda] = \begin{cases} L[\lambda] & \text{dans} \quad N_{q-1}^{p+1}[\lambda] , \quad [\lambda]_{p-1}^{q+1}N^* , \\ O & \text{dans} \quad [\lambda]_p{}^q N_{\perp}{}^* , \quad {}_{\perp}N_q{}^p[\lambda] . \end{cases} \tag{75.2}$$

On peut alors vérifier sans peine que l'on a

$$K[\lambda]x = \frac{1}{\lambda}\left(x - \sum_{p,q} L_q{}^p[\lambda]x\right)$$

pour tous les $x \in \tilde{N}^{\wedge}[\lambda]$ et

$$u^* K[\lambda] = \frac{1}{\lambda}\Big(u^* - \sum_{p,q} u^* L_q{}^p[\lambda]\Big)$$

pour tous les $u^* \in [\lambda]^{\wedge}\tilde{N}^*$. Si la dimension m_r de $N_0{}^r[\lambda]$ est finie, on peut écrire

$$L_q{}^p[\lambda] = \sum_{k=1}^{m_r} L[\lambda]^q \underset{k}{a}{}^r \cdot {}^r\underset{k}{a}{}^* L[\lambda]^{p-1} \tag{75.3}$$

pour $p+q=r$, où $\underset{k}{a}{}^r$ et ${}^r\underset{k}{a}{}^*$ sont les vecteurs tels que

$$\underset{k}{a}{}^r \in N_0{}^r[\lambda]\,, \quad {}^r\underset{k}{a}{}^* \in [\lambda]_0{}^r N^*\,, \quad {}^r\underset{p}{a}{}^* L[\lambda]^{r-1} \underset{q}{a}{}^r = \delta_{pq}\,.$$

Définissons l'endomorphisme $L_\infty{}^n[\lambda]$ par les conditions

$$L_\infty{}^n[\lambda] = \begin{cases} L[\lambda] & \text{dans} \quad N_\infty{}^{n+1}[\lambda]\,, \quad [\lambda]_{n-1}^{\infty} N^*\,, \\ O & \text{dans} \quad [\lambda]_n{}^\infty N_\perp{}^*\,, \quad {}_\perp N_\infty{}^n[\lambda]\,, \end{cases}$$

et l'endomorphisme $L_{n-1}^{\infty}[\lambda]$ par les conditions

$$L_{n-1}^{\infty}[\lambda] = \begin{cases} L[\lambda] & \text{dans} \quad N_{n-1}^{\infty}[\lambda]\,, \quad [\lambda]_\infty{}^{n+1} N^*\,, \\ O & \text{dans} \quad [\lambda]_\infty{}^n N_\perp{}^*\,, \quad {}_\perp N_n{}^\infty[\lambda]\,. \end{cases}$$

On peut vérifier sans peine que l'on a

$$K[\lambda]x \simeq \frac{1}{\lambda}\Big(x - \sum_n L_\infty{}^n[\lambda]x - \sum_n L_n{}^\infty[\lambda]x\Big)$$

$$u^* K[\lambda] \simeq \frac{1}{\lambda}\Big(u^* - \sum_n u^* L_\infty{}^n[\lambda] - \sum_n u^* L_n{}^\infty[\lambda]\Big)$$

pour

$$x \in \tilde{N}_\infty^{\vee}[\lambda] \oplus N_\vee^\infty[\lambda]\,, \quad u^* \in [\lambda]_\infty^{\vee} N^* \oplus [\lambda]_\vee^\infty \tilde{N}^*\,.$$

On peut donc écrire

$$K[\lambda] \simeq \frac{1}{\lambda}\Big(I - \sum_{p,q} L_q{}^p[\lambda] - \sum_n L_\infty{}^n[\lambda] - \sum_n L_n{}^\infty[\lambda]\Big)$$

dans $\tilde{N}^{\vee}[\lambda]$ et $[\lambda]^{\vee} N^*$. Si donc on désigne par $I[\lambda]$ l'endomorphisme de $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ défini par

$$I[\lambda] = \begin{cases} I & \text{dans} \quad \tilde{N}^{\vee}[\lambda]\,, \quad [\lambda]^{\vee}\tilde{N}^*\,, \\ O & \text{dans} \quad N_{\wedge}[\lambda]\,, \quad [\lambda]_{\wedge} N^*\,, \end{cases} \tag{75.3}$$

on a

$$K[\lambda] \simeq \frac{1}{\lambda}\Big(I[\lambda] - \sum_{p,q} L_q{}^p[\lambda] - \sum_{n=1}^{\infty} L_\infty{}^n[\lambda] - \sum_{n=0}^{\infty} L_n{}^\infty[\lambda]\Big)\,. \tag{75.4}$$

Si la dimension m' de $N_\infty{}^1[\lambda]$ est finie, on peut écrire

$$L_\infty{}^n[\lambda] = \sum_{k=1}^{m'} \underset{k}{b}{}^n \cdot {}_n\underset{k}{b}{}^* \tag{75.5}$$

où $\underset{k}{b}{}^n$ et ${}_n\underset{k}{b}{}^*$ sont les vecteurs tels que

$$\underset{k}{b}^n = L[\lambda]\underset{k}{b}^{n+1} \in N_\infty{}^n[\lambda], \quad {}_n\underset{k}{b}^* = {}_{n-1}\underset{k}{b}^* L[\lambda] \in [\lambda]_n N^*,$$

$${}_n\underset{p}{b}^* \cdot \underset{q}{b}^{n+1} = \delta_{pq}.$$

Si la dimension m'' de $N_0{}^\infty[\lambda]$ est finie, on peut écrire

$$L_{n-1}^\infty[\lambda] = \sum_{k=1}^{m''} \underset{k}{c}_n \cdot {}^n\underset{k}{c}^*,$$

où $\underset{k}{c}_n$ et ${}^n\underset{k}{c}^*$ sont les vecteurs tels que

$$\underset{k}{c}_n = L[\lambda]\underset{k}{c}_{n-1} \in N_n{}^\infty[\lambda], \quad {}^n\underset{k}{c}^* = {}^{n+1}\underset{k}{c}^* L[\lambda] \in [\lambda]_\infty{}^n N^*,$$

$${}^n\underset{p}{c}^* . \underset{q}{c}^{n+1} = \delta_{pq}.$$

76. Etudions enfin la construction du résolvant $\underline{K}[\rho]$ dans $N^\wedge[\lambda]$. De la relation

$$((\rho-\lambda)K - L[\lambda])\underline{K}[\rho] = K,$$

on déduit formellement

$$(76.1) \qquad \underline{K}[\rho] = \frac{1}{\rho-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{K^{-1}L[\lambda]}{\rho-\lambda}\right)^k.$$

On a d'autre part

$$(76.2) \qquad K^{-1} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} L[\lambda]^k.$$

K^{-1} et $L[\lambda]$ sont permutables et l'on a

$$(76.3) \qquad K^{-1}L[\lambda] = K^{-1} - \lambda I.$$

Par suite

$$L[\lambda]^n = O, \quad (K^{-1}L[\lambda])^n = O$$

dans $N_q{}^p[\lambda]$, $[\lambda]_q{}^p N^*$ pour $n \geqq p$. Donc les développements (76.1) et (76.2) sont valables dans $N^\wedge[\lambda]$.

Si chaque sous-espace $N_q{}^p[\lambda]$ a une dimension finie m_r $(r=p+q)$, on a (75.2). On en déduit immédiatement

$$L[\lambda]^k = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p+q=r} \sum_{s=1}^{m_r} L[\lambda]^{q+k-1} \underset{s}{a}^r . {}^r\underset{s}{a}^* L[\lambda]^p$$

et

$$(76.4) \qquad K^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p+q=r} \sum_{s=1}^{m_r} \sum_{k=0}^{r-q} L[\lambda]^{q+k-1} \underset{s}{a}^r . {}^r\underset{s}{a}^* L[\lambda]^p.$$

L'endomorphisme $I_q{}^p[\lambda]$ qui coïncide avec I dans $N_q{}^p[\lambda]$ et $[\lambda]_{p-1}^{q+1}N^*$ et avec O dans $[\lambda]_{p-1}^{q+1}N_\perp{}^*$ et ${}_\perp N_q{}^p[\lambda]$, s'écrit

$$(76.5) \qquad I_q{}^p[\lambda] = \sum_{s=1}^{m_r} L[\lambda]^q \underset{s}{a}^r . {}^r\underset{s}{a}^* L[\lambda]^{p-1}.$$

Par suite,

$$(76.6) \qquad I^\wedge[\lambda] = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p+q=r} \sum_{s=1}^{m_r} L[\lambda]^{q-1} \underset{s}{a}^r . {}^r\underset{s}{a}^* L[\lambda]^p$$

coïncide avec I dans $N^{\wedge}[\lambda]$, et puis on a

$$K^{-1}-\lambda I^{\wedge}[\lambda]=\lambda \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p+q=r} \sum_{s=1}^{m_r} \sum_{k=0}^{r-q+1} L[\lambda]^{q+k} \underset{s}{a}^{r} . {}^{r}\underset{s}{a}^{*} L[\lambda]^{p} .$$

Posons

$$b_j=\sum_{l=j}^{r} p_{jl} L[\lambda]^{l-1} \underset{s}{a}^{r} , \quad {}_k b^{*}=\sum_{l=1}^{k} q_{lk} . {}^{r}\underset{s}{a}^{*} L[\lambda]^{r-1} .$$

Pour que l'on ait

$${}_j b^{*} b_k=\delta_{jk} ,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{l=j}^{k} p_{jl} q_{lk} .$$

On a alors

$$L[\lambda]^{j-1} \underset{s}{a}^{r}=\sum_{l=j}^{r} q_{jl} b_l , \quad {}^{r}\underset{s}{a}^{*} L[\lambda]^{r-k}=\sum_{l=1}^{k} p_{lk} . {}_l b^{*}$$

et puis

$$\sum_{p+q=r} \sum_{k=0}^{r-q-1} L[\lambda]^{q+k} \underset{s}{a}^{r} . {}^{r}\underset{s}{a}^{*} L[\lambda]^{p}=\sum_{i,j}\left(\sum_{k=0}^{i-1} \sum_{t=j}^{i-k-1} q_{t+k-1, i} p_{jt}\right) b_i . {}_j b^{*} .$$

Nous voulons déterminer les nombres p_{jk}, q_{jk} de manière que l'on ait

$$\sum_{k=0}^{i-1} \sum_{t=j}^{i-k-1} q_{t+k+1, i} p_{jk}=\delta_{j+1, i} .$$

Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{l=j}^{k-1} p_{jl}=p_{j+1, k} , \quad q_{h, i-1}=\sum_{l=h+1}^{i} q_{li} .$$

On verra, après un calcul simple, que l'on peut prendre

$$p_{jk}=\binom{k-1}{j-1}, \quad q_{jk}=(-1)^{k-j}\binom{k-1}{j-1}$$

b_j et ${}_k b^{*}$ dépendant de r et de s et appartenant à $\sum_{l \leq j-1} N_l^{r-l}[\lambda]$ et à $\sum_{l \leq r-k} [\lambda]^{r-l}{}_l N^{*}$, nous les désignons respectivement par $\underset{s}{b}{}_{j-1}^{r-j+1}$ et ${}_{r-k}{}^{k}\underset{s}{b}^{*}$. On a alors

$$\text{(76.7)} \quad b_q{}^{p}=\sum_{l=q}^{p+q-1}\binom{l}{q} L[\lambda]^{l} \underset{s}{a}^{p+q} , \quad {}_q{}^{p} b^{*}=\sum_{l=1}^{p}(-1)^{p-l}\binom{p-1}{q-1}^{p+q} \underset{s}{a}^{*} . L[\lambda]^{r+q-l}$$

et

$$K^{-1}-\lambda I[\lambda]=\lambda \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{m_r} \sum_{p+q=r} b_q{}^{p} . {}_p{}^{q} b^{*} ,$$

$${}_k{}^{j}\underset{s}{b}^{*} \underset{s}{b}_q{}^{p}=\delta_{k, p-1} \delta_{j-1, q} .$$

On a enfin les coefficients de la partie principale en λ du résolvant sous la forme bien connue dans la théorie des équations intégrales:

$$\text{(76.8)} \qquad (K^{-1}-\lambda I[\lambda])^{n}=\lambda^{n} \sum_{s=1}^{m_r} \sum_{p+q=r} \underset{s}{b}_q{}^{p} . {}_{p-n}^{q+n}\underset{s}{b}^{*} .$$

Les relations entre b et a sont données par (76.7).

TABLE DES MATIÈRES