Sur les solutions bornées d'un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients périodiques.

Par Yasutaka SIBUYA.

I. Introduction.

1. Soit donné un système des équations différentielles

$$(1.1) \qquad \frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \cdots, x_n; t) \qquad (j=1, \cdots, n),$$

dont les seconds membres sont continus en tous les arguments, holomorphes en $x_1, \cdots, x_n$ et admettent une période $\omega > 0$ par rapport à t pour

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \|x\| = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} < \delta \qquad (\delta > 0), \\ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

Nous étudierons les solutions de (1.1) autour de l'origine $x_j = 0 \, (j=1, \cdots, n)$, en la supposant un point d'équilibre de (1.1):

$$(1.3) \qquad f_j(0, \cdots, 0; t) = 0 \qquad (j=1, \cdots, n).$$

Dans la suite, les x_j seront toujours des variables complexes.

2. En général, les solutions de (1.1), prenant les valeurs initiales assez petites, se divisent en deux catégories suivant qu'elles restent dans le voisinage de l'origine pour $t \to +\infty$ ou pour $t \to -\infty$, ou non. Par exemple, la solution $x_j = 0$ $(j=1, \cdots, n)$, les solutions périodiques, les solutions presque-périodiques et les solutions s'approchant asymptotiquement d'une des solutions énumérées ci-dessus pour $t \to +\infty$ ou pour $t \to -\infty$ appartiennent à la première catégorie. Dans ce présent mémoire, nous voulons démontrer la réciproque.

Soit

$$(2.1) \qquad x_j = \phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_p) \qquad (j=1, \cdots, n)$$

une solution de (1.1) contenant des constantes complexes arbitraires $\eta_1, \cdots, \eta_p$, où les $\phi_j(t; \eta)$ sont continues en t, η, et holomorphes en η pour

$$(2.2) \qquad \|\eta\| < \delta' \qquad (\delta' > 0), \qquad 0 \leqq t < +\infty;$$

de plus, supposons

$$(2.3) \qquad \phi_j(t; 0) = 0 \qquad (j=1, \cdots, n),$$

et

$$(2.4) \qquad \|\phi_j(t; \eta)\| \leqq M \qquad (j=1, \cdots, n)$$

pour (2.2), où M est une constante positive indépendante de t et de η.

Sous ces hypothèses, *la solution (2.1) s'approche asymptotiquement d'une solution presque-périodique de (1.1), quand t croît indéfiniment;* c'est le résultat principal que nous allons démontrer. Notre résultat nous donnera un chemin général pour obtenir les développements des solutions de (1.1) autour de l'origine, ce que nous avons traité dans les mémoires antérieurs[1].

1) Y. Sibuya: (1); (2); (3).

Après avoir démontré le résultat principal, nous considérerons le cas où la solution générale de (1.1) est bornée uniformément pour $0 \leq t < +\infty$. Dans ce cas, nous obtiendrons une généralisation d'un théorème de M. le Prof. Minoru Urabe[1]. Et puis, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour que la solution (2.1) soit presque-périodique par repport à t uniformément pour $\|\eta\| < \delta'$. Nous déduirons incidemment une expression formelle des solutions presque-périodiques de (1.1). Notre méthode fondamentale est la même que nous avons employée dans un des mémoires cités[2].

Qu'il me soit permis, en terminant, d'exprimer à M. le Prof. Masuo Hukuhara toute ma reconnaissance pour les conseils qu'il m'a donnés au présent problème. Ce mémoire a été préparé sous les auspices de ≪Scientific Research Fund of the Department of Education≫.

II. Lemmes.

3. La réduction formelle. On peut supposer, sans perdre la généralité, que la fonction $f_j(x;t)$ soit de la forme

$$f_j(x;t) = \lambda_j x_j + \delta_j x_{j-1} + \sum{}'' f_{jk_1\cdots k_n}(t) x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \qquad (j=1,\cdots,n), \tag{3.1}$$

où les $f_{jk_1\cdots k_n}(t)$ admettent la période ω; les λ_j et δ_j sont des constantes telles que $\delta_j \neq 0$ entraîne $\lambda_{j-1} = \lambda_j$ et que $\lambda_j \equiv \lambda_k \pmod{2\pi i/\omega}$ entraîne $\lambda_j = \lambda_k$; $\sum''$ désigne la sommation étendue à tous les termes de degrés au moins égaux à deux.

Nous avons déjà démontré le lemme suivant[3]:

Lemme I. *Par une transformation formelle admettant la période* ω

$$x_j \approx y_j + \sum{}'' p_{jk_1\cdots k_n}(t) y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \qquad (j=1,\cdots,n), \text{[4]} \tag{3.2}$$

le système (1.1) *se réduit à un système des équations différentielles formelles*

$$\frac{dy_j}{dt} \approx \lambda_j y_j + \delta_j y_{j-1} + \sum{}'' a_{jk_1\cdots k_n} \exp\Big(\big(\lambda_j - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu k_\nu\big)t\Big) y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \qquad (j=1,\cdots,n), \tag{3.3}$$

où les $a_{jk_1\cdots k_n}$ *sont des constantes remplissant les conditions*

$$a_{jk_1\cdots k_n} = 0 \qquad \Big(\lambda_j \not\equiv \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu k_\nu \mod 2\pi i/\omega\Big). \tag{3.4}$$

4. Des solutions formelles de (3.3). Supposons d'abord

$$\Re \lambda_j \begin{cases} = 0 & (j=1,\cdots,r), \\ < 0 & (j=r+1,\cdots,s), \\ > 0 & (j=s+1,\cdots,n). \end{cases} \tag{4.1}$$

Soient $a_j(y_1,\cdots,y_n;t)$ les seconds membres de (3.3). En vertu de (3.4) et de (4.1), on a facilement

$$a_j(y_1,\cdots,y_s,0,\cdots,0;t) \approx 0 \qquad (j=s+1,\cdots,n), \tag{4.2}$$

$$a_j(y_1,\cdots,y_s,0,\cdots,0;t) \tag{4.3}$$

1) M. Urabe: (1), p. 278, Theorem 6.
2) Y. Sibuya: (2), Section IV, pp. 124-127.
3) Y. Sibuya: (3), p. 246, Théorème III.
4) $\approx$ désigne l'égalité formelle.

$$\approx a_j(y_1, \cdots, y_r, 0, \cdots, 0; t) \qquad (j=1, \cdots, r).$$

Soit

(4.4) $\quad y_j \approx \Phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho) \approx \sum' \Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\, \eta_1^{k_1}\cdots \eta_\rho^{k_\rho} \qquad (j=1, \cdots, n)$

une solution formelle de (3.3) contenant des constantes arbitraires $\eta_1, \cdots, \eta_\rho$, $\sum'$ désignant la sommation étendue à tous les termes de degrés au moins égaux à un.

Lemme II. *Si les coefficients de (4.4) sont bornés pour* $0 \leq t < +\infty$:

(4.5) $$|\Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)| \leq M_{jk_1\cdots k_\rho},$$

on a

(4.6) $$\Phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho) \approx 0 \qquad (j=s+1, \cdots, n);$$

(4.7) $$\Phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho) \approx C_j(\eta_1, \cdots, \eta_\rho)\, e^{\lambda_j t} \qquad (j=1, \cdots, r),$$

où $C_j(\eta_1, \cdots, \eta_\rho) \approx \Phi_j(0; \eta_1, \cdots, \eta_\rho)$;

de plus, on a

(4.8) $$\Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t) = P_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\, e^{\lambda_j t}$$

pour $j=r+1, \cdots, s$, *où les* $P_{jk_1\cdots k_\rho}(t)$ *sont des polynomes de* t.

Démontrons d'abord (4.6). Posons

(4.9) $$\Phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho) \approx \sum_{k=1}^{\rho} \Phi_{jk}(t)\eta_k + \sum'' \Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\, \eta_1^{k_1}\cdots \eta_\rho^{k_\rho} \quad (j=1, \cdots, n).$$

En portant (4.9) dans les équations formelles (3.3), on a

(4.10) $$\Phi'_{jk}(t) = \lambda_j \Phi_{jk}(t) + \delta_j \Phi_{j-1,k}(t) \qquad (j=s+1, \cdots, n;\ k=1, \cdots, \rho).$$

Par conséquent, en vertu de (4.5), on a

(4.11) $$\Phi_{jk}(t) = 0 \qquad (j=s+1, \cdots, n;\ k=1, \cdots, \rho).$$

Supposons ensuite

$$\Phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho) \approx \sum^{(N)} \Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\, \eta_1^{k_1}\cdots \eta_\rho^{k_\rho} \qquad (j=s+1, \cdots, n),$$

$\sum^{(N)}$ désignant la sommation étendue à tous les termes de degrés au moins égaux à N par rapport à η.

En vertu de (4.2), on a facilement

$$\Phi'_{jk_1\cdots k_\rho}(t) = \lambda_j \Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t) + \delta_j \Phi_{j-1,k_1\cdots k_\rho}(t) \qquad (j=s+1, \cdots, n)$$

pour $\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = N$. En vertu de (4.5), on a

$$\Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t) = 0 \qquad (j=s+1, \cdots, n)$$

pour $\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = N$. On a donc (4.6).

Démontrons maintenant les égalités (4.7). En vertu de (4.3) et de (4.6), les séries formelles

(4.12) $$y_j \approx \Phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho) \qquad (j=1, \cdots, r)$$

satisfont aux équations formelles

(4.13) $$\frac{dy_j}{dt} \approx a_j(y_1, \cdots, y_r, 0, \cdots, 0; t) \qquad (j=1, \cdots, r).$$

En portant (4.12) dans (4.13), on a facilement

(4.14) $$\Phi'_{jk}(t) = \lambda_j \Phi_{jk}(t) + \delta_j \Phi_{j-1,k}(t) \qquad (j=1, \cdots, r;\ k=1, \cdots, \rho).$$

Par conséquent, en vertu de (4.5), on a

$$\Phi_{jk}(t)=C_{jk}e^{\lambda_j t} \qquad (j=1,\cdots,r;\ k=1,\cdots,\rho)\,, \tag{4.15}$$

où les C_{jk} sont des constantes.

Supposons ensuite

$$\Phi_j(t;\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx C_{jN}(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\,e^{\lambda_j t}+\sum{}^{(N)}\Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\eta_1^{k_1}\cdots\eta_\rho^{k_\rho} \qquad (j=1,\cdots,r)\,, \tag{4.16}$$

où

$$C_{jN}(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx\sum_{k=1}^{\rho}\Phi_{jk}(0)\eta_k+\sum_{2}^{N-1}\Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(0)\eta_1^{k_1}\cdots\eta_\rho^{k_\rho} \qquad (j=1,\cdots,r)\,, \tag{4.17}$$

$\sum_{2}^{N-1}$ désignant la sommation étendue à tous les termes de degrés au moins égaux à deux et au plus à $N-1$.

D'après la forme des seconds membres de (3.3) et en vertu de (4.16), on a aisément

$$\Phi'_{jk_1\cdots k_\rho}(t)=\lambda_j\Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)+\delta_j\Phi_{j-1,k_1\cdots k_\rho}(t)+Q_{jk_1\cdots k_\rho}e^{\lambda_j t} \qquad (j=1,\cdots,r) \tag{4.18}$$

pour $\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu=N$, où les $Q_{jk_1\cdots k_\rho}$ sont des constantes. Donc en vertu de (4.5), on a

$$\Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)=C_{jk_1\cdots k_\rho}e^{\lambda_j t} \qquad (j=1,\cdots,r) \tag{4.19}$$

pour $\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu=N$, ce qui motre (4.7).

Enfin, nous démontrons (4.8). En vertu de (4.6) et de (4.7), les séries formelles

$$y_j\approx\Phi_j(t;\eta_1,\cdots,\eta_\rho) \qquad (j=r+1,\cdots,s) \tag{4.20}$$

satisfont aux équations formelles

$$\frac{dy_j}{dt}\approx a_j(C_1(\eta)\,e^{\lambda_1 t},\cdots,C_r(\eta)\,e^{\lambda_r t},\,y_{r+1},\cdots,y_s,\,0,\cdots,0;\,t) \qquad (j=r+1,\cdots,s)\,, \tag{4.21}$$

où les $C_j(\eta)\,e^{\lambda_j t}$ sont les seconds membres de (4.7).

D'après la forme des seconds membres de (3.3), les seconds membres de (4.21) sont de la forme

$$\lambda_j y_j+\delta_j y_{j-1}+\sum_{\Re\lambda_k=\Re\lambda_j}a_{jk}(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\,e^{(\lambda_j-\lambda_k)t}y_k + \sum{}''\,a_{jk_{r+1}\cdots k_s}(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\exp\Big(\big(\lambda_j-\sum_{\nu=r+1}^{s}\lambda_\nu k_\nu\big)t\Big)y_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots y_s^{k_s} \qquad (j=r+1,\cdots,s)\,, \tag{4.22}$$

où les $a_{jk}(\eta)$ et les $a_{jk_{r+1}\cdots k_s}(\eta)$ sont des séries entières formelles de η satisfaisant aux conditions

$$a_{jk}(0,\cdots,0)\approx 0\,; \tag{4.23}$$

$$a_{jk_{r+1}\cdots k_s}(\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\approx 0 \qquad \Big(\Re\big(\lambda_j-\sum_{\nu=r+1}^{s}\lambda_\nu k_\nu\big)\neq 0\Big)\,. \tag{4.24}$$

En portant (4.20) dans (4.21), on a facilement les égalités (4.8).

III. Des solutions bornées.

5. La démonstration du théorème I. Démontrons maintenant le

Théorème I. *Si la solution (2.1) de (1.1) satisfait aux conditions (2.3) et (2.4), elle s'approche asymptotiquement d'une solution presque-périodique de (1.1) quant t croît indéfiniment.*

Soit

(5.1) $$y_j \approx x_j + \sum'' q_{jk_1\cdots k_n}(t) x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} \qquad (j=1,\cdots,n)$$

la transformation inverse de la transformation formelle (3.2); les $q_{jk_1\cdots k_n}(t)$ admettent la période ω par rapport à t.

Si l'on pose

(5.2) $$y_j \approx \Phi_j(t;\eta_1,\cdots,\eta_\rho) \approx \phi_j + \sum'' q_{jk_1\cdots k_n}(t)\phi_1^{k_1}\cdots\phi_n^{k_n} \qquad (j=1,\cdots,n),$$

les séries formelles (5.2) satisfont aux équations différentielles formelles (3.3).

Posons ensuite

(5.3) $$\phi_j(t;\eta_1,\cdots,\eta_\rho) = \sum' \phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\eta_1^{k_1}\cdots\eta_\rho^{k_\rho} \qquad (j=1,\cdots,n).$$

En vertu de (2.4), on a facilement

(5.4) $$|\phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)| \leq M\,\delta'^{-(k_1+\cdots+k_\rho)}$$

pour $0 \leq t < +\infty$. Par conséquent, si l'on développe $\Phi_j(t;\eta)$ en des séries entières formelles de η, les coefficients $\Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)$ satisfont aux conditions (4.5). Puisque

(5.5) $$\phi_j(t;\eta_1,\cdots,\eta_\rho) \approx \Phi_j + \sum'' p_{jk_1\cdots k_n}(t)\,\Phi_1^{k_1}\cdots\Phi_n^{k_n} \qquad (j=1,\cdots,n),$$

les $\phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)$ sont des polynomes de $e^{\lambda_h t}$ $(h=1,\cdots,r)$ et $e^{\lambda_h t}P_{hl_1,\cdots,l_\rho}(t)$ $(h=r+1,\cdots,s)$, dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t. Par conséquent, en vertu de (4.1), on peut écrire les $\phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)$ comme il suit:

(5.6) $$\phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t) = \varphi_{jk_1\cdots k_\rho}(t) + \psi_{jk_1\cdots k_\rho}(t),$$

où les $\varphi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)$ sont des fonctions presque-périodiques de t ainsi que leurs dérivées, et les $\psi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)$ s'annulent ainsi que leurs dérivées quand t croît indéfiniment:

(5.7) $$\lim_{t=+\infty} \psi_{jk_1\cdots k_\rho}(t) = 0,$$

(5.8) $$\lim_{t=+\infty} \psi'_{jk_1\cdots k_\rho}(t) = 0.$$

En vertu de (5.4) et de (5.7), ε étant un nombre positif quelconque, on a

(5.9) $$|\varphi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)| < M\delta'^{-(k_1+\cdots+k_\rho)} + \varepsilon$$

pour les valeurs assez grandes de t. Puisque les $\varphi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)$ sont presque-périodiques, cette inégalité subsiste pour $-\infty < t < +\infty$. ε étant arbitrairement petit, on a

(5.10) $$|\varphi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)| \leq M\delta'^{-(k_1+\cdots+k_\rho)}$$

pour $-\infty < t < +\infty$. Par conséquent, les séries entières

(5.11) $$\varphi_j(t;\eta_1,\cdots,\eta_\rho) = \sum' \varphi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\,\eta_1^{k_1}\cdots\eta_\rho^{k_\rho} \qquad (j=1,\cdots,n)$$

convergent uniformément pour $\|\eta\| < \delta'$, $-\infty < t < +\infty$. Les fonctions (5.11) sont donc presque-périodiques par rapport à t uniformément pour $\|\eta\| < \delta'$.

Quant aux fonctions $\psi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)$, en vertu de (5.4) et de (5.10), on a

(5.12) $$|\psi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)| \leq 2M\,\delta'^{-(k_1+\cdots+k_\rho)}$$

pour $0 \leq t < +\infty$. Donc, les séries entières

(5.13) $$\psi_j(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) = \sum{}' \psi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\,\eta_1^{k_1}\cdots\eta_\rho^{k_\rho} \qquad (j=1,\cdots,n)$$

sont majorées par la fonction

(5.14) $$\frac{2M\,\delta'^\rho}{(\delta'-\eta_1)(\delta'-\eta_2)\cdots(\delta'-\eta_\rho)} - 2M\,,$$

et convergent uniformément pour $\|\eta\| < \delta'$, $0 \leq t < +\infty$. De plus, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, on a les inégalités

(5.15) $$|\sum{}^{(N)} \psi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)\,\eta_1^{k_1}\cdots\eta_\rho^{k_\rho}| < \varepsilon \qquad (j=1,\cdots,n)$$

pour $0 \leq t < +\infty$, $\|\eta\| \leq \delta'' < \delta'$, pourvu que N soit assez grand. En vertu de (5.7) et de (5.15), on a

$$\lim_{t=+\infty} \psi_j(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) = 0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$

pour $\|\eta\| < \delta'$. Par conséquent, on a

(5.16) $$0 = \lim_{t=+\infty} \{\phi_j(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) - \varphi_j(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)\} \qquad (j=1,\cdots,n)\,.$$

D'autre part, puisque

(5.17) $$\phi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) = f_i(\phi_1,\cdots,\phi_n;\,t) \qquad (j=1,\cdots,n)\,,$$

il existe une constantes positive M' telle que

(5.18) $$|\phi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)| \leq M' \qquad (j=1,\cdots,n)$$

pour $0 \leq t < +\infty$, $\|\eta\| < \delta'$. Par conséquent, de la même manière que ci-dessus, on peut montrer, d'après la presque-périodicité de $\varphi'_{jk_1\cdots k_\rho}(t)$ et en vertu de (5.8), que l'on a

(5.19) $$\phi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) = \varphi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) + \psi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) \qquad (j=1,\cdots,n)\,,$$

où les $\varphi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)$ sont presque-périodiques par rapport à t uniformément pour $\|\eta\| < \delta'$, et les $\psi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)$ satisfont aux conditions

(5.20) $$\lim_{t=+\infty} \psi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) = 0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$

pour $\|\eta\| < \delta'$.

Cela posé, considérons les égalités

(5.21) $$\varphi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) - f_j(\varphi_1,\cdots,\varphi_n;\,t) = f_j(\phi_1,\cdots,\phi_n;\,t) - f_j(\varphi_1,\cdots,\varphi_n;\,t) - \psi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) \qquad (j=1,\cdots,n)\,.$$

D'abord, (5.16) entraîne

(5.22) $$\lim_{t=+\infty} \{f_j(\phi_1,\cdots,\phi_n;\,t) - f_j(\varphi_1,\cdots,\varphi_n;\,t)\} = 0 \qquad (j=1,\cdots,n)\,.$$

Celle-ci entraîne avec (5.20)

(5.23) $$\lim_{t=+\infty} \{\varphi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) - f_j(\varphi_1,\cdots,\varphi_n;\,t)\} = 0 \qquad (j=1,\cdots,n)\,.$$

Par suite, d'après la presque-périodicité de $\varphi_j(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)$ et de $\varphi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho)$, on a nécessairement

(5.24) $$\varphi_j'(t;\,\eta_1,\cdots,\eta_\rho) = f_j(\varphi_1,\cdots,\varphi_n;\,t) \qquad (j=1,\cdots,n)\,,$$

c'est-à-dire, (5.11) est une solution presque-périodique de (1.1). C.Q.F.D.

6. Le cas où la solution générale est bornée uniformément. Soit

(6.1) $$x_j = \phi_j(t;\,\xi_1,\cdots,\xi_n) \qquad (j=1,\cdots,n)$$

la solution de (1.1) telle que $x_j(0)=\xi_j$ $(j=1,\cdots,n)$. On a facilement

$$\phi_j(t;\,0,\cdots,0)=0 \qquad (j=1,\cdots,n)\,. \tag{6.2}$$

Si, donc, les fonctions $\phi_j(t;\,\xi)$ sont définies pour

$$\|\xi\|<\delta'\,, \qquad 0\leq t<+\infty\,, \tag{6.3}$$

de manière qu'elles soient continues et bornées uniformément pour (6.3) *et holomorphes en ξ*, le théorème I peut s'appliquer à la solution (6.1). Dans ce cas, il faut que $\Re\lambda_j\leq 0$ $(j=1,\cdots,n)$. *Si, donc, on pose*

$$\Re\lambda_j\begin{cases} =0 & (j=1,\cdots,r)\,,\\ <0 & (j=r+1,\cdots,n)\,,\end{cases} \tag{6.4}$$

on a le

Théorème II. *Si la solution générale (6.1) satisfait aux conditions données ci-dessus, et si les λ_j aux conditions (6.4), il existe une solution presque-périodique de (1.1) qui contient r constantes arbitraires et s'écrit sous la forme*

$$x_j=Q_j(C_1e^{\lambda_1 t},\cdots,C_re^{\lambda_r t};\,t) \qquad (j=1,\cdots,n)\,, \tag{6.5}$$

où les $Q_j(z_1,\cdots,z_r;\,t)$ sont des séries entières de z dont les coefficients admettent la période ω, les C_j étant des constantes arbitraires.

Remarque: Si $r=n$, on retrouve un théorème de M. le Prof. Minoru Urabe: *Si tous les λ_j sont purement imaginaires et si la solution générale (6.1) est bornée uniformément pour (6.3), la solution (6.1) est presque-périodique.*[1)]

Sous les hypothèses, les $\phi_j(t;\,\xi)$ s'écrivent sous la forme

$$\phi_j(t;\,\xi)=\varphi_j(t;\,\xi)+\psi_j(t;\,\xi) \qquad (j=1,\cdots,n)\,, \tag{6.6}$$

où les $\varphi_j(t;\,\xi)$ sont presque-périodiques par rapport à t uniformément pour $\|\xi\|<\delta'$ et les $\psi_j(t;\,\xi)$ satisfont aux conditions

$$\lim_{t=+\infty}\psi_j(t;\,\xi)=0 \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{6.7}$$

pour $\|\xi\|<\delta'$. On sait que

$$x_j=\varphi_j(t;\,\xi) \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{6.8}$$

est une solution de (1.1). Si, donc, on pose

$$\zeta_j=\varphi_j(0;\,\xi_1,\cdots,\xi_n) \qquad (j=1,\cdots,n)\,, \tag{6.9}$$

on a

$$\varphi_j(t;\,\xi)=\phi_j(t;\,\zeta_1,\cdots,\zeta_n) \qquad (j=1,\cdots,n)\,, \tag{6.10}$$

d'où,

$$\varphi_j(t;\,\xi)=\varphi_j(t;\,\zeta)+\psi_j(t;\,\zeta) \qquad (j=1,\cdots,n)\,. \tag{6.11}$$

Puisque les $\varphi_j(t;\,\xi_1,\cdots,\xi_n)$ et $\varphi_j(t;\,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ sont presque-périodiques, en vertu de (6.7), on a

$$\varphi_j(t;\,\xi_1,\cdots,\xi_n)=\varphi_j(t;\,\zeta_1,\cdots,\zeta_n) \qquad (j=1,\cdots,n)\,, \tag{6.12}$$

et

$$\psi_j(t;\,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)=0 \qquad (j=1,\cdots,n)\,. \tag{6.13}$$

Or, on a

$$\frac{\partial(\psi_{r+1},\cdots,\psi_n)}{\partial(\xi_{r+1},\cdots,\xi_n)}\neq 0\,, \tag{6.14}$$

---

1) M. Urabe: loc. cit.; Y. Sibuya: (1), p. 21, Théorème 2.

(6.15) $$\frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)}{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_r)} \neq 0,$$

pour $t=0$, $\xi=0$. Par conséquent, en résolvant les relations

(6.16) $$\psi_j(0; \zeta_1, \cdots, \zeta_n)=0 \qquad (j=r+1, \cdots, n),$$

on a

(6.17) $$\zeta_j=\zeta_j(\zeta_1, \cdots, \zeta_r) \qquad (j=r+1, \cdots, n),$$

où les $\zeta_j(\zeta_1, \cdots, \zeta_r)$ ne contiennent que des termes de degrés au moins égaux à deux par rapport à $\zeta_1, \cdots, \zeta_r$; en même temps, en vertu de (6.12), on a

(6.18) $$\varphi_j(t; \xi)=\varphi_j(t; \zeta_1, \cdots, \zeta_r, \zeta_{r+1}(\zeta), \cdots, \zeta_n(\zeta)) \qquad (j=1, \cdots, n),$$

où les $\zeta_j(\zeta)$ sont les seconds membres de (6.17). Par suite, en vertu de (6.15), la solution presque-périodique (6.8) contient exactement r constantes arbitraires $\zeta_1, \cdots, \zeta_r$. Enfin, si l'on pose

(6.19) $$C_j=\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_j(t; \xi_1, \cdots, \xi_n)\, e^{-\lambda_j t}dt \qquad (j=1, \cdots, r).$$

on pourra exprimer (6.8) sous la forme (6.5)[1].

7. Des solutions presque-périodiques. De la même manière dont nous avons démontré le lemme II, on peut démontrer le

Lemme III. *Si les coefficients d'une solution formelle (4.4) de (3.3) sont bornées pour* $-\infty < t < +\infty$:

(7.1) $$|\Phi_{jk_1\cdots k_\rho}(t)| < M_{jk_1\cdots k_\rho},$$

on a

(7.2) $$\Phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho) \approx C_j(\eta_1, \cdots, \eta_\rho)\, e^{\lambda_j t} \qquad (j=1, \cdots, r);$$

(7.3) $$\Phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho) \approx 0 \qquad (j=r+1, \cdots, n).$$

On pourra en déduire par un procédé analogue le théorème suivant:

Théorème III. *Pour que la solution (2.1) de (1.1) soit presque-périodique par rapport à t uniformément pour $\|\eta\| < \delta'$, il faut et il suffit que les $\phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho)$ satisfassent aux inégalités*

(7.4) $$|\phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho)| < M \qquad (j=1, \cdots, n)$$

pour $-\infty < t < +\infty$, $\|\eta\| < \delta'$, *où M est une constante positive indépendante de* t, η.

On en obtient aisément une expression formelle d'une solution presque-périodique de (1.1)

En effet, soient

(7.5) $$x_j=p_j(y_1, \cdots, y_r; t) \qquad (j=1, \cdots, n)$$

les séries entières formelles obtenues de (3.2) en posant $y_{r+1}=\cdots=y_n=0$; si la solution (2.1) est presque-périodique par rapport à t, les développements de (2.1) s'écrivent formellement sous la forme

(7.6) $$\phi_j(t; \eta_1, \cdots, \eta_\rho) \approx p_j(C_1(\eta)\, e^{\lambda_1 t}, \cdots, C_r(\eta)\, e^{\lambda_r t}; t) \qquad (j=1, \cdots, n).$$

où les $C_j(\eta)$ sont des séries entières formelles de $\eta_1, \cdots, \eta_\rho$.

Par conséquent, *si l'on suppose*

(7.7) $$\lambda_j \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi i/\omega) \quad (j=1, \cdots, r),$$

1) Y. Sibuya: (1).

toutes les solutions presque-périodiques, qui sont de la forme (2.1), admettent la période ω par rapport à t.

9 août, 1955.

Bibliographie.

Y. Sibuya:

(1) Sur un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients constants ou périodiques. Jour. Fac. Sci., Univ. Tokyo, I, **7** (1954) 19-32;

(2) Sur un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients constants ou périodiques, II. ibid., **7** (1954) 107-127;

(3) Sur les solutions périodiques d'un système des équations différentielle ordinaires non linéaires à coefficients périodiques. ibid., **7** (1954) 245-254.

M. Urabe:

(1) Application of Majorized Group of Transformations to Functional Equations. Jour. Sci., Hiroshima Univ., A, **16** (1952) 267-283.