Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel.

Par Masuo HUKUHARA.

Introduction

1. Soient $\mathfrak{M}$ un espace vectoriel (à gauche) sur un corps $\mathfrak{K}$ de nature quelconque, L un endomorphisme, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}$ et L^n le $n^{\text{ième}}$ itéré de L. Nous désignerons par N_n, N^n les ensembles

$$N_n = L^n\{\mathfrak{M}\} = \{L^n x;\ x \in \mathfrak{M}\},$$
$$N^n = L^{-n}\{o\} = \{x \in \mathfrak{M};\ L^n x = o\}$$

Il est clair que l'on a

$$\mathfrak{M} = N_0 \supseteqq N_1 \supseteqq \cdots \supseteqq N_n \supseteqq \cdots,$$
$$\{o\} = N^0 \subseteqq N^1 \subseteqq \cdots \subseteqq N^n \subseteqq \cdots$$

et que les égalités $N_{n-1} = N_n$ et $N^{n-1} = N^n$ entraînent respectivement $N_n = N_{n+1}$ et $N^n = N^{n+1}$. On peut donc définir les entiers μ et ν par les relations

$$N_0 \supset \cdots \supset N_\nu = N_{\nu+1} = \cdots,$$
$$N^0 \subset \cdots \subset N^\mu = N^{\mu+1} = \cdots.$$

Dans le cas où l'on a $N_n \supset N_{n+1}$ pour tout entier n, nous posons $\nu = \infty$. De même, $\mu = \infty$ signifie que l'on a $N^n \subset N^{n+1}$ pour tout entier n. Le but principal de ce présent article est de chercher, sans introduire aucune topologie, quelles conséquences s'ensuivent de l'existence des entiers finis μ et ν.

On sait, dans le cas de l'endomorphisme $K - I$ où K est complètement continu, que cette hypothèse est remplie. Nos résultats sont donc applicables à un tel endomorphisme.

2. Avant d'aller plus loin, expliquons quelques notations que nous utiliserons désormais.

Les expressions entre accolades désigneront toujours des sous-espaces et non des opérateurs, tandis que les expressions entre parenthèses désigneront des opérateurs ou des vecteurs. Si un ensemble ou un opérateur dépend d'une ou de plusieurs variables, nous écrirons ces variables entre crochets, de sorte que $N[\lambda]$ signifie que N dépend de λ.

Nous emploierons les notations $\odot$, $\oplus$, $\obar$ et $\ominus$ pour désigner surtout les opérations appliquées à deux sous-espaces, tandis que $+$ désigne l'opération addition appliquée à deux opérateurs ou à deux vecteurs. $A \odot B$ est l'intersection de deux sous-espaces A et B de sorte que $A \odot B = A \cap B$. $A \oplus B$ est l'ensemble de tous les vecteurs exprimables comme sommes d'un vecteur de A et d'un vecteur de B, de sorte que

$$A \oplus B = \{x + y;\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Dans le cas particulier où $A\odot B=\{o\}$, nous écrirons $A\obar B$, de sorte que $A\obar B$ est la somme directe de deux sous-espaces A et B. $\ominus$ est l'opération inverse de $\obar$, de sorte que la relation $A\obar B=C$ est équivalente à $A=C\ominus B$. Evidemment l'expression $C\ominus B$ ne se détermine pas d'une seule manière; mais si l'on a par exemple $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n$, on peut écrire

$$A_1=\{A_1\ominus A_2\}\obar\{A_2\ominus A_3\}\obar\cdots\obar\{A_{n-1}\ominus A_n\}\obar A_n\ ,$$

de quelque manière que l'on choisisse les sous-espaces $A_1\ominus A_2,\cdots,A_{n-1}\ominus A_n$.

On peut considérer un sous-espace A comme un opérateur linéaire qui fait correspondre à un vecteur x de $\mathfrak{R}$ un élément Ax de l'espace quotient $\mathfrak{R}/A$:

$$Ax=\{x+y;\ y\in A\}\ .$$

λ désignant un scalaire, λA désigne l'opérateur défini par

$$(\lambda A)x=\lambda(Ax)=A(\lambda x)\ .$$

On a alors $A+A=2A$ et on ne peut écrire $A+A=A$. Au contraire on a $A\oplus A=A$.

3. Le chapitre I est consacré à l'étude préliminaire des algèbres Booléiennes dont les éléments sont des sous-espaces. A l'aide des résultats du chapitre I, on verra, dans le chapitre II, que les sous-espaces N^j et N_k définis plus haut sont exprimables comme sommes directes de sous-espaces $N_q{}^p(p=1,\cdots,\nu;\ q=0,\cdots,\nu-1;\ p+q\leqq\nu)$:

$$N^j=\sum_{p\leqq j}\obar N_q{}^p\ ,\qquad N_k=N_\nu\obar\sum_{q\geqq k}\obar N_q{}^p\ ,$$

μ et ν étant égaux et $N_q{}^p$ et N_{q+1}^{p-1} se correspondant par L d'une manière biunivoque.

Dans le chapitre III, nous introduirons la notion d'espaces conjugués. $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$ étant des espaces conjugés(1), nous désignerons le vecteur de $\mathfrak{R}^*$ par une lettre avec étoile.

Le produit intérieur d'un vecteur x de $\mathfrak{R}$ et d'un vecteur u^* de $\mathfrak{R}^*$ sera désigné par u^*x. L étant un endomorphisme de $\mathfrak{R}$, son adjoint, que nous désignerons encore par la même lettre L, sera défini comme un endomorphisme de $\mathfrak{R}^*$ tel que l'associativité

$$(u^*L)x=u^*(Lx)$$

subsiste. Nous ne considérerons que l'endomorphisme admettant son adjoint, de sorte que nous pouvons supprimer les parenthèses et écrire u^*Lx sans aucune confusion à craindre.

Désignons par ${}_nN^*$, ${}^nN^*$ les sous-espaces définis par

$${}_nN^*=\{R^*\}L^n=\{u^*L^n;\ u^*\in R^*\}\ ,$$

$${}^nN^*=\{o^*\}L^{-n}=\{u^*\in R^*;\ u^*L^n=o^*\}\ .$$

---

(1) $\mathfrak{R}^*$ est un espace vectoriel (à droite) sur le corps $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{K}$ est supposé commutatif.

On a alors

$$R^*={}_0N^*\supset\cdots\supset{}_\nu N^*={}_{\nu+1}N^*=\cdots,$$
$$\{o^*\}={}^0N^*\subset\cdots\subset{}^\nu N^*={}^{\nu+1}N^*=\cdots.$$

ν étant le même entier défini plus haut. On peut donc écrire

$${}^jN^*=\sum_{p\leqq j}\obar{}_q^{\,p}N^*,\qquad {}_kN^*={}_\nu N^*\obar\sum_{q\geqq k}\obar{}_q^{\,p}N^*;$$

et ${}_q^{\,p}N^*$ et ${}_{q+1}^{\,p-1}N^*$ se correspondent par L d'une manière biunivoque. Dans le cas où N^ν a un nombre fini de dimensions, le nombre de dimensions de ${}_q^{\,p}N^*$ est le même que celui de $N_q^{\,p}$.

Nous introduirons, dans le chapitre IV, la notion de l'endomorphisme supplémentaire, à l'aide duquel nous pouvons étudier les propriétés de l'endomorphisme sans supposer les entiers μ et ν finis.

Un autre article sera consacré à l'étude des développements en séries de vecteurs principaux.

CHAPITRE I. PRÉLIMINAIRES

I. Algèbres Booléiennes de sous-espaces

4. Considérons une famille $\mathfrak{F}$ dont les éléments sont des sous-espaces. Nous supposons que $A\odot B$ et $A\oplus B$ appartiennent à $\mathfrak{F}$ en même temps que A et B. On voit sans peine que $\mathfrak{F}$ ordonnée par inclusion est un réseau (lattice) modulaire, c'est-à-dire qu'il satisfait aux conditions suivantes:

I. $A\odot A=A,\qquad A\oplus A=A;$

II. $A\odot B=B\odot A,\qquad A\oplus B=B\oplus A;$

III. $\{A\odot B\}\odot C=A\odot\{B\odot C\},\qquad \{A\oplus B\}\oplus C=A\oplus\{B\oplus C\};$

IV. $A\odot\{A\oplus B\}=A,\qquad A\oplus\{A\odot B\}=A;$

V. Si $A\supseteqq C$, on a $A\odot\{B\oplus C\}=\{A\odot B\}\oplus C$.

Nous l'appellerons donc réseau de sous-espaces. On n'a pas, en général, la distributivité:

VI. $A\odot\{B\oplus C\}=\{A\odot B\}\oplus\{A\odot C\}$.

Soient A_1, A_2, $\cdots$, A_n des sous-espaces tels que

$$\{A_1\oplus\cdots\oplus A_k\}\odot A_{k+1}=\{o\}$$

pour $k=1, 2, \cdots, n-1$. Dans ce cas, on a

$$A_{j_0}\odot\{A_{j_1}\oplus A_{j_2}\oplus\cdots\oplus A_{j_k}\}=\{o\},$$

quelle que soit la combinaison des entiers j_0, $j_1\cdots$, j_k extraits de $(1, 2, \cdots, n)$. Nous dirons alors que les n sous-espaces A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont linéairement indépendants(1).

---

(1) Nous emploierons, pour la commodité de langage, cette terminologie même dans le cas où plusieurs de A_j deviennent $\{o\}$.

Soit $\mathfrak{F}$ la famille formée de tous les sous-espaces exprimables comme une combinaison linéaire de $A_1, A_2, \cdots, A_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \obar \varepsilon_k A_k = \varepsilon_1 A_1 \obar \varepsilon_2 A_2 \obar \cdots \obar \varepsilon_n A_n ,$$

les coefficients ε_k étant 0 ou 1 .

Si

$$M = \varepsilon_1 A_1 \obar \varepsilon_2 A_2 \obar \cdots \obar \varepsilon_n A_n , \tag{4.1}$$

$$M' = \varepsilon_1' A_1 \obar \varepsilon_2' A_2 \obar \cdots \obar \varepsilon_n' A_n , \tag{4.2}$$

on peut vérifier que l'on a

$$M \odot M' = \delta_1 A_1 \obar \delta_2 A_2 \obar \cdots \obar \delta_n A_n ,$$

$$M \oplus M' = \delta_1' A_1 \obar \delta_2' A_2 \obar \cdots \delta_n' A_n ,$$

où

$$\delta_k = \min\{\varepsilon_k, \varepsilon_k'\} , \qquad \delta_k' = \max\{\varepsilon_k, \varepsilon_k'\} .$$

Si l'on a de plus

$$M'' = \varepsilon_1'' A_1 \obar \varepsilon_2'' A_2 \obar \cdots \obar \varepsilon_n'' A_n ,$$

on a

$$\{M \oplus M'\} \odot M'' = \rho_1 A_1 \obar \rho_2 A_2 \obar \cdots \obar \rho_n A_n ,$$

où

$$\rho_k = \min\{\varepsilon_k'', \delta_k'\} .$$

D'autre part, on a

$$M \odot M'' = \sigma_1 A_1 \obar \sigma_2 A_2 \obar \cdots \obar \sigma_n A_n ,$$

$$M' \odot M'' = \sigma_1' A_1 \obar \sigma_2' A_2 \obar \cdots \obar \sigma_n' A_n ,$$

$$\{M \odot M''\} \oplus \{M' \odot M''\} = \rho_1' A_1 \obar \rho_2' A_2 \obar \cdots \rho_n' A_n ,$$

où

$$\sigma_k = \min\{\varepsilon_k, \varepsilon_k''\} , \qquad \sigma_k' = \min\{\varepsilon_k', \varepsilon_k''\} , \qquad \rho_k' = \max\{\sigma_k, \sigma_k'\} .$$

Or on a

$$\min\{\varepsilon_k'', \max\{\varepsilon_k, \varepsilon_k'\}\} = \max\{\min\{\varepsilon_k, \varepsilon_k''\}, \min\{\varepsilon_k', \varepsilon_k''\}\} ,$$

c'est-à-dire $\rho_k = \rho_k'$. On a donc la distributivité

$$\{M \oplus M'\} \odot M'' = \{M \odot M''\} \oplus \{M' \odot M''\} .$$

Si M et M' sont donnés par (4.1) et (4.2), la relation $M \subseteqq M'$ est équivalente à $\varepsilon_k \leqq \varepsilon_k'$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Dans ce cas, le sous-espace

$$M'' = (\varepsilon_1' - \varepsilon_1) A_1 \obar (\varepsilon_2' - \varepsilon_2) A_2 \obar \cdots \obar (\varepsilon_n' - \varepsilon_n) A_n$$

appartient aussi à $\mathfrak{F}$ et l'on a $M' = M \obar M''$. On peut donc écrire $M'' = M' \ominus M$.

Ainsi, dans la famille $\mathfrak{F}$ considérée ici, l'expression $A \ominus B$ a un sens bien déterminé. $\mathfrak{F}$ est donc une algèbre Booléienne, que nous appellerons algèbre de sous-espaces de base $\{A_1, \cdots, A_n\}$.

Soit $\mathfrak{F}$ une famille infinie de sous-espaces. Si toute partie finie de $\mathfrak{F}$ est une base d'une algèbre de sous-espaces, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments (en nombre fini) de $\mathfrak{F}$ est une algèbre Booléienne. Nous dirons alors que $\mathfrak{F}$ est une base de cette algèbre de sous-espaces.

5. Supposons donnés deux sous-espaces A et B. Nous pouvons alors écrire

$$A = A' \obar D \,, \qquad B = B' \obar D \,, \tag{5.1}$$

c'est-à-dire A et B appartiennent à une algèbre de sous-espaces.

Pour que l'on obtienne ces relations, on doit avoir

$$D = A \odot B \,. \tag{5.2}$$

Si D est défini par cette relation, il suffit alors de définir A' et B' de manière que l'on ait (5.1).

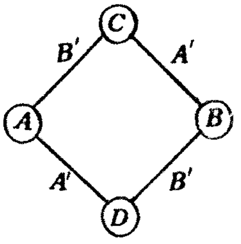

Fig. 1.

Si l'on pose

$$C = A \oplus B \,, \tag{5.3}$$

on a

$$C = A' \obar B' \obar D = A' \obar B = B' \obar A \,.$$

Il y a donc lieu de se demander si les relations

$$C = A' \obar B \,, \qquad A \supseteqq A' \tag{5.4}$$

entraînent la première des relations (5.1). La réponse est affirmative.

En effet, il clair que l'on a

$$A' \odot D = \{o\} \,, \qquad A \supseteqq A' \obar D \,.$$

Soit x un vecteur quelconque de A. x appartenant à C, on peut écrire $x = x' + x''$, où $x' \in A'$, $x'' \in B$.

Or on a $x'' = x - x' \in A$. Par suite x'' appartient à $D = A \odot B$ et l'on a $x \in A' \obar D$.

On a donc le

Théorème 5.1. *Si A et B sont deux sous-espaces, on peut déterminer trois sous-espaces linéairement indépendants A', B' et D de manière que l'on ait* (5.1). *On a nécessairement* (5.2). *On peut déterminer A' par la condition $A = A' \obar D$ ou par les conditions* (5.4), *C désignant le sous-espaces défini par* (5.3). *De même, on peut déterminer B' par la condition $B = B' \obar D$ ou par les conditions*

$$C = B' \obar A \,, \qquad B \supseteqq B' \,. \tag{5.5}$$

Ainsi A et B peuvent être considérés comme des éléments d'une algèbre de sous-espaces de base $\{A', B', D\}$.

Corollaire. *On a toujours*

$$A \oplus B = A \obar \{B \ominus \{A \odot B\}\} = B \obar \{A \ominus \{A \odot B\}\} \tag{5.6}$$

de quelque manière que l'on détermine $A \ominus \{A \odot B\}$ *et* $B \ominus \{A \odot B\}$.

Considérons maintenant trois sous-espaces A, B_1, B_2 tels que $B_1 \supset B_2$. Nous allons montrer que l'on peut déterminer cinq sous-espaces linéairement indépendants A_0, A_1, B_1', B_2' et D de manière que l'on ait

$$A = A_0 \obar A_1 \obar D\,, \tag{6.1}$$

$$B_1 = A_1 \obar B_1' \obar B_2\,, \tag{6.2}$$

$$B_2 = \quad B_2' \obar D; \tag{6.2'}$$

A_0, A_1, B_1', B_2' D forment une base d'une algèbre de sous-espaces, à laquelle appartiennent A, B_1, B_2.

Supposons ces relations vérifiées. Si l'on pose

$$D_1 = A \odot B_1\,, \qquad E = B_2 \oplus D_1\,, \tag{6.3}$$

on a

$$D = A \odot B_2\,, \tag{6.4}$$

$$D_1 = A_1 \obar D\,, \tag{6.5}$$

$$A = A_0 \obar D_1\,, \tag{6.6}$$

$$B_2 = B_2' \obar D\,, \tag{6.7}$$

$$B_1 = B_1' \obar E\,. \tag{6.8}$$

Il est à démontrer que ces relations entraînent (6.1), (6.2).

D'abord, (6.5) et (6.6) entraînent (6.1). (6.7) n'est autre que (6.2'). (6.5), (6.7) et la deuxième des relations (6.3) entraînent, d'après le théorème 5.1, la relation

$$E = A_1 \obar B_2' \obar D\,. \tag{6.9}$$

(6.7), (6.8) et (6.9) entraînent (6.2).

Les relations (6.2) et (6.2') entraînent successivement

$$B_2' \odot D = \{o\}\,, \quad B_1' \odot \{B_2' \obar D\} = \{o\}\,, \quad A_1 \odot \{B_1 \obar B_2' \obar D\} = \{o\}\,.$$

(6.1), (6.2), (6.2'), (6.5) et la première des relations (6.3) entraînent

$$A_0 \odot \{A_1 \obar B_1' \obar B_2' \obar D\} = \{o\}\,.$$

On a donc le

Théorème 6.1. *Si* A, B_1, B_2 *sont trois sous-espaces tels que* $B_1 \supset B_2$, *on peut déterminer les sous-espaces linéairement indépendants* A_0, A_1, B_1', B_2' *et* D *de manière que l'on ait* (6.1), (6.2) et (6.2'). *Pour cela, on définit* D_1, E *et* D *par* (6.3) *et* (6.4); *puis on détermine* A_0, A_1, B_1', B_2' *par* (6.5), (6.6), (6.7), (6.8).

Remarque 1. (6.5) et (6.9) entraînent

$$E = B_2' \obar D_1\,. \tag{6.10}$$

(6.2′) et (6.9) entraînent

$$E = A_1 \obar B_2 . \tag{6.11}$$

Puisque $D_1 = A \odot B_1 \supseteqq A \odot E \supseteqq D_1$, on a $A \odot E = D_1$. Si donc $C_2 = A \oplus E$, on a, d'après (6.6) et (6.10), les relations

$$C_2 = B_2' \obar A = A_0 \obar E . \tag{6.12}$$

Si $C_1 = A \oplus B_1$, les relation

$$A = A_0 \obar D_1 , \quad B_1 = B_1' \obar B_2' \obar D_1 , \quad D_1 = A \odot B_1$$

entraînent $C_1 = A_0 \obar B_1$ et

$$C_1 = B_1' \obar B_2' \obar A .$$

On a donc

$$C_1 = B_1' \obar C_2 = A_0 \obar B_1 . \tag{6.13}$$

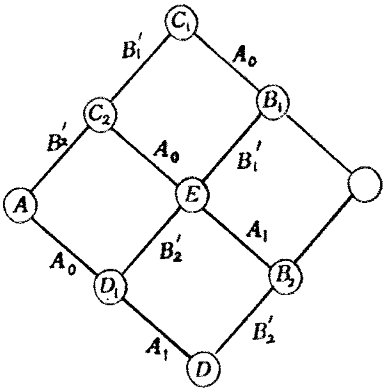

Fig. 2.

On obtient ainsi le schéma montré sur la Fig. 2 et l'on a

$$E = B_1 \odot C_2 . \tag{6.14}$$

Remarque 2. On peut déterminer B_1' par les conditions

$$C_1 = B_1' \obar C_2 , \qquad B_1 \supseteqq B_1' . \tag{6.15}$$

Car, le théorème 5.1 montre que les relations (6.14) et (6.15) entraînent (6.8).

7. Dans le cas de quatre sous-espaces A^1, A^2, A_1, A_2 tels que $A^1 \subset A^2$, $A_1 \supset A_2$, on a le

Théorème 7.1. *Si l'on a $A^1 \subset A^2$, $A_1 \supset A_2$, on peut déterminer les sous-espaces linéairement indépendants A_0^1, A_1^1, A_0^2, A_1^2, A_2^2, A_1^3, A_2^3 et D de mainère que l'on ait*

$$A^1 = A_0^1 \obar A_1^1 \qquad \obar D , \tag{7.1}$$

$$A^2 = A_0^2 \obar A_1^2 \obar A_2^2 \obar A^1 , \tag{7.1′}$$

$$A_1 = A_1^1 \obar A_1^2 \obar A_1^3 \obar A_2 , \tag{7.2}$$

$$A_2 = \qquad A_2^2 \obar A_2^3 \obar D ; \tag{7.2′}$$

ainsi les sous-espaces A^1, A^2, A_1 et A_2 sont des éléments d'une algèbre de sous-espaces de base $\{A_0^1, A_1^1, A_0^2, A_1^2, A_2^2, A_1^3, A_2^3, D\}$.

Posons

$$D_k^j = A^j \odot A_k , \tag{7.3}$$

$$C_k^j = A^j \oplus A_k . \tag{7.4}$$

D'abord, (7.1) et (7.2′) entraînent

$$D = A^1 \odot A_2 , \tag{7.5}$$

de sorte que $D = D_2^1$. (7.1), (7.2) et (7.2′) entraînent

$$D_1^1 = A_1^1 \obar D . \tag{7.6}$$

De même, (7.1), (7.1′) et (7.2′) entraînent

$$D_2^2 = A_2^2 \obar D . \tag{7.7}$$

Si l'on pose

$$E = D_1^1 \oplus D_2^2 , \tag{7.8}$$

on a

$$E = A_1^1 \obar A_2^2 \obar D ,$$

car

$$D = D_1^1 \odot D_2^2 .$$

(7.1), (7.1′), (7.2) et (7.2′) entraînent alors

$$D_1^2 = A_1^2 \obar E . \tag{7.9}$$

(7.2′) et (7.7) entraînent

$$A_2 = A_2^3 \obar D_2^2 . \tag{7.10}$$

On a de même

$$A^1 = A_0^1 \obar D_1^1 . \tag{7.11}$$

(7.1), (7.1′), (7.2) et (7.2′) entraînent

$$C_1^2 = A_1^3 \obar C_2^2 , \qquad A_1 \supseteqq A_1^3 , \tag{7.12}$$

$$C_1^2 = A_0^2 \obar C_1^1 , \qquad A^2 \supseteqq A_0^2 . \tag{7.13}$$

Il est à démontrer que les relations (7.3–13) entraînent les relations (7.1), (7.1′), (7.2), (7.2′) et les huit sous-espaces ainsi définis forment une base d'une algèbre de sous-espaces.

On peut considérer A^2, A_1, A_2 comme A, B_1, B_2 du théorème 6.1. Aux sous-espaces D, D_1, C_1 et C_2 du théorème 6.1 correspondent respectivement les sous-espaces D_2^2, D_1^2, C_1^2 et C_2^2. Comme nous avons remarqué, on a

$$E = A_1^1 \obar A_2^2 \obar D .$$

Les relations (7.7) et (7.9) entraînent donc

$$D_1^2 = \{A_1^2 \obar A_1^1\} \obar D_2^2 ,$$

qui correspond à la relations (6.5), $A_1^2 \obar A_1^1$ étant le correspondant de A_1. (7.10) correspond à (6.7), A_2^3 étant le correspondant de B_2'. Les relations (7.12) correspondent à (6.14), A_1^3 étant le correspondant de B_1'. Il nous reste à obtenir une relation qui correspond à (6.6).

Pour cela, on remarque que la relation (7.11) et $D_1^1 = A^1 \odot D_1^2$ entraînent

$$A^1 \oplus D_1^2 = A_0^1 \obar D_1^2 ,$$

et que les relations (7.13) et $A^2 \oplus C_1^1 = C_1^2$ entraînent

$$A^2 = A_0^2 \obar \{A^2 \odot C_1^1\} .$$

La famille de tous les sous-espaces formant un réseau modulaire, on a

$$A^2 \odot C_1^1 = A^1 \oplus D_1^2 .$$

On obtient donc la relation

$$A^2 = \{A_0^2 \oplus A_0^1\} \oplus D_1^2 ,$$

qui correspond à (6.6), le correspondant de A_0 étant $A_0^2 \oplus A_0^1$.

Les correspondants de A_0, A_1, B_1', B_2' et D étant $A_0^2 \oplus A_0^1$, $A_1^2 \oplus A_1^1$, A_1^3, A_2^3 et $D_2^2 = A_2^2 \oplus D$, ceux-ci sont linéairement indépendants. Par suite, les sous-espaces A_0^1, A_1^1, A_0^2, A_1^2, A_2^2, A_1^3, A_2^3 et D sont linéairement indépendants.

Les relations qui correspondent à (6.1), (6.2), (6.2′) s'écrivent

(7.14) $$A^2 = A_0^1 \oplus A_0^2 \oplus A_1^1 \oplus A_1^2 \oplus D_2^2 ,$$

(7.15) $$A_1 = A_1^2 \oplus A_1^1 \oplus A_1^3 \oplus A_2 ,$$

(7.16) $$A_2 = A_2^3 \oplus D_2^2 .$$

(7.15) n'est autre que (7.2). (7.7) et (7.16) entraînent (7.2′). (7.6) et (7.11) entraînent (7.1). (7.1), (7.7) et (7.14) entraînent (7.1′).

Le théorème est donc établi. Cette démonstration nous amène au

Théorème 7.2. A^1, A^2, A_1, A_2, *étant des sous-espaces tels que* $A^1 \subset A^2$, $A_1 \subset A_2$, *pour que l'on ait* (7.1), (7.1′), (7.2), (7.2′), *il suffit de déterminer les sous-espaces* A_0^1, A_1^1, A_0^2, A_1^2, A_2^2, A_1^3, A_2^3 *et* D *par les relations* (7.3–13). *Ces huit sous-espaces sont linéairement indépendants.*

8. Dans le cas général où il existe deux suites finies monotones, on a le

Théorème 8.1. *Si*

$$A^1 \subset A^2 \subset \cdots \subset A^m , \qquad A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n ,$$

on peut déterminer les sous-espaces linéairement indépendants: A_0^1, A_1^1, $\cdots$, A_{n-1}^1; A_0^2, A_1^2, $\cdots$, A_n^2; $\cdots$; A_0^m, A_1^m, $\cdots$, A_n^m; A_1^{m+1}, $\cdots$, A_n^{m+1} *et* D, *de manière que l'on ait*

(8.1_1) $$A^1 = A_0^1 \oplus A_1^1 \oplus \cdots \oplus A_{n-1}^1 \oplus D ,$$

(8.1_j) $$A^j = A_0^j \oplus A_1^j \oplus \cdots \oplus A_n^j \oplus A^{j-1} \qquad (j=2, \cdots, m) ,$$

(8.2_k) $$A_k = A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus \cdots \oplus A_k^{m+1} \oplus A_{k+1} \quad (k=1, \cdots, n-1) ,$$

(8.2_n) $$A_n = A_n^2 \oplus A_n^3 \oplus \cdots \oplus A_n^{m+1} \oplus D .$$

Remarquons d'abord que si l'on pose

$$A^0 = A_{n+1} = \{o\} , \qquad A_n^1 = D ,$$

les formules (11.1_j) et (11.2_k) sont valables encore pour $j=1$ et $k=n$. Nous poserons de plus

$$A^{m+1} = A_0 = \mathfrak{R} ;$$

cette convention serait commode pour la suite.

LE CAS DE $m=1$. Les relations à établir peuvent s'écrire

$$A=A_0\obar A_1\obar\cdots\obar A_{n-1}\obar A_n\,, \tag{8.3}$$

$$B_k=A_k\obar B_k'\obar B_{k+1} \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{8.4$_k$}$$

$\mathfrak{R}=B_0,\ B_1,\ \cdots,\ B_n,\ B_{n+1}=\{o\}$ étant une suite décroissante donnée.

Supposons-les vérifiées. Si l'on pose

$$D_k=A\odot B_k\,, \qquad C_k=A\oplus B_k\,, \tag{8.5}$$

on a

$$D_k=A_k\obar D_{k+1} \qquad (k=0,\cdots,n)\,, \tag{8.6$_k$}$$

$$C_k=B_k'\obar C_{k+1}\,, \qquad B_k\supseteqq B_k' \qquad (k=1,\cdots,n)\,. \tag{8.7$_k$}$$

Il est à démontrer que ces relation entraînent (8.3) et (8.4_k). Puisque $D_{n+1}=\{o\}$, on a $A_n=D_n=A\odot B_n$. Alors (8.6_k) entraînent immédiatement (8.3). Si l'on définit A_{k-1}' et B_k'' de manière que l'on ait

$$A=A_{k-1}'\obar D_k\,, \quad B_{k+1}=B_{k+1}''\obar D_{k+1}\,,$$

on a, d'après le théorème 6.1, le schéma montré sur la Fig. 3. On a donc la relation (8.4_k). C.Q.F.D.

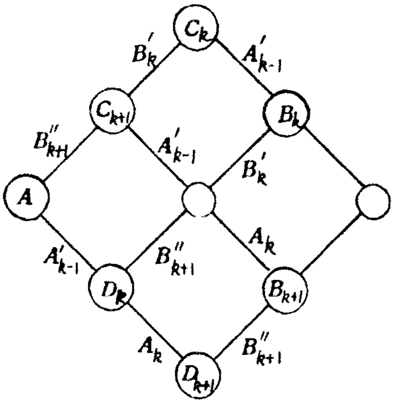

Fig. 3.

On peut évidemment prendre

$$A_{k-1}'=A_0\obar\cdots\obar A_{k-1}\,.$$

Donc, les sous-espaces $A_0,\ \cdots,\ A_{k-1},\ A_k,\ B_k'$ et $B_{k+1}=B_k''\obar D_{k+1}$ sont linéairement indépendants. D'après (8.4_2), $\cdots$, (8.4_n), B_2 est la somme directe des sous-espaces $A_2,\ \cdots,\ A_n,\ B_2',\ \cdots,\ B_n'$. Les sous-espaces $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_n,\ B_1',\ \cdots,\ B_n'$ sont donc linéairement indépendants.

LE CAS DE $m\geqq 2$, $n\geqq 2$. Posons

$$C_k^j=A^j\oplus A_k\,, \tag{8.8}$$

$$D_k^j=A^j\odot A_k\,, \tag{8.9}$$

$$E_k^j=D_k^{j-1}\oplus D_{k+1}^j\,. \tag{8.10}$$

Si l'on suppose que l'on ait (8.1_j), (8.2_k) ($j=1,\cdots,m$; $k=1,\cdots,n$) et que les sous-espaces A_k^j soient linéairement indépendants, on voit sans peine

$$D_k^j=A_k^j\obar E_k^j \qquad (j=1,\cdots,m,m+1;\ k=0,1,\cdots,n)\,. \tag{8.11_k^j}$$

Il est à démontrer que ces relations entraînent (8.1_j), (8.2_k) ($j=1,\cdots,m$; $k=1,\cdots,n$) et que les sous-espaces A_k^j sont linéairement indépendants.

Puisque

$$E_n^1=D_n^0\oplus D_{n+1}^1=\{o\}\,,$$

$(8.11_n{}^1)$ devient $D_n{}^1=A_n{}^1$. On a ainsi

$$A_n{}^1=D_n{}^1=A^1\odot A_n\,.$$

Puisque

$$E_k{}^1=D_k{}^0\oplus D_{k+1}{}^1=D_{k+1}{}^1\,,$$

$(8.11_k{}^1)$ deviennent

$$D_k{}^1=A_k{}^1\obar D_{k+1}{}^1\,.$$

Par suite,

$$D_k{}^1=A_k{}^1\obar A_{k+1}{}^1\obar\cdots\obar A_n{}^1\,.$$

Puisque $D_0{}^1=A^1$, on a (8.1_1).

On obtient de même (8.2_n).

Si $j>1$, $k<n$, on a $A^j\supset A^{j-1}$, $A_k\supset A_{k+1}$. On peut donc écrire, d'après le théorème 7.2,

$$A^j=F_{k-1}{}^j\obar A_k{}^j\obar G_{k+1}{}^j\obar A^{j-1}\,,$$

où $F_{k-1}{}^j$ et $G_{k+1}{}^j$ sont des sous-espaces tels que

$$C_k{}^j=F_{k-1}{}^j\obar C_k{}^{j-1}\,,\qquad A^j\supseteqq F_{k-1}{}^j\,,$$
$$D_{k+1}{}^j=G_{k+1}{}^j\obar D_{k+1}^{j-1}\,.$$

Puisque

$$D_k{}^{j-1}\odot D_{k+1}{}^j=D_{k+1}^{j-1}\,,$$
$$D_k{}^{j-1}\oplus D_{k+1}{}^j=E_k{}^j$$

on a

$$E_k{}^j=G_{k+1}{}^j\obar D_k{}^{j-1}\,.$$

Cette relation et $(8.11_k{}^j)$ entraînent

$$D_k{}^j=\{A_k{}^j\obar G_{k+1}{}^j\}\obar D_k{}^{j-1}\,.$$

$G_k{}^j$ satisfaisant à la relation

$$D_k{}^j=G_k{}^j\obar D_k{}^{j-1}$$

on peut supposer

$$G_k{}^j=A_k{}^j\obar G_{k+1}{}^j\,.$$

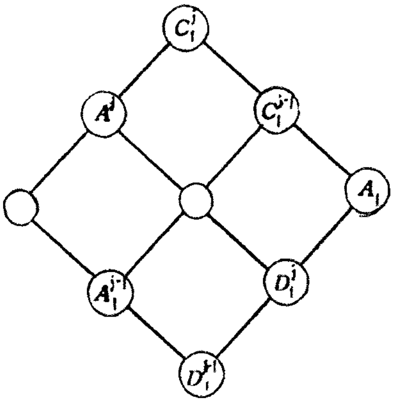

Fig. 4.

On a alors

$$A^j=F_0{}^j\obar A_1{}^j\obar\cdots\obar A_{n-1}{}^j\obar G_n{}^j\obar A^{j-1}\,.$$

Les conditions qui déterminent $F_0{}^j$ sont satisfaites si l'on a

$$A^j=F_0{}^j\obar\{A^{j-1}\oplus D_1{}^j\}\,.$$

Cette relation est la même que $(8.11_0{}^j)$ qui est remplie par $A_0{}^j$. On peut donc prendre $F_0{}^j=A_0{}^j$. La condition qui détermine $G_n{}^j$ est la même que $(8.11_n{}^j)$. On peut donc prendre $G_n{}^j=A_n{}^j$. On obtient ainsi (8.1_j).

On peut de même démontrer (8.2_k).

D'après les relations (8.1_j), (8.2_k), on obtient facilement

$$A_k = \sum_{q \leqq k} \obar A_q{}^p \,.$$

La définition de $A_0{}^j$ entraîne

$$A^j = \sum_{p \leqq j} \obar A_q{}^p \,,$$

$$C_1{}^j = A_0{}^j \obar C_1{}^{j-1} \,, \qquad A^j \supseqq A_0{}^j \,.$$

On a donc

$$C_1{}^m = \{A_0{}^2 \obar \cdots \obar A_0{}^m\} \obar C_1{}^1 \,,$$
$$A^m \supseqq A_0{}^2 \obar \cdots \obar A_0{}^m \,.$$

$(8.11_0{}^1)$ devient

$$A^1 = A_0{}^1 \obar D_1{}^1 \,.$$

On a donc, d'après le thèorème 7.2 ,

$$C_1{}^m = A_0{}^1 \obar A_0{}^2 \obar \cdots \obar A_0{}^m \obar A_1 \,.$$

On peut en conclure que les sous-espaces $A_k{}^j (j = 1, \cdots, m, m+1;\ k = 0, 1, \cdots, n)$ sont linéairement indépendants.

Cette démonstration nous amène au

Théorème 8.2. *Supposons que* $A^1 \subset \cdots \subset A^m$, $A_1 \supset \cdots \supset A_n$. *Si l'on détermine les sous-espaces* $A_k{}^j (j = 1, \cdots, m, m+1;\ k = 0, 1, \cdots, n)$ *par* (8.8), (8.9), (8.10), $(8.11_k{}^j)$, *on a* (8.1_j), (8.2_k) $(j = 1, \cdots, m;\ k = 1, \cdots, n)$ *et les sous-espaces* $A_k{}^j (j = 1, \cdots, m, m+1;\ k = 0, 1, \cdots, n)$ *sont linéairement indépendants.*

II. Systèmes supplémentaires de deux suites monotones de sous-espaces

9. Considérons deux systèmes chacun desquels est formé de deux suites monotones de sous-espaces:

$$A^1 \subset \cdots \subset A^m \,; \qquad A_1 \subset \cdots \subset A_n \tag{9.1}$$

et

$$B^1 \subset \cdots \subset B^n \,; \qquad B_1 \supset \cdots \supset B_m \,. \tag{9.2}$$

S'il existe entre eux les relations

$$A^j \obar B_j = \Re \,, \qquad A_k \obar B^k = \Re \,, \tag{9.3}$$

$$\{A^j \odot A_k\} \obar \{B^k \odot B_j\} \obar \{A^j \odot B^k\} \obar \{A_k \odot B_j\} = \Re \,, \tag{9.4}$$

nous dirons qu'ils sont supplémentaires l'un à l'autre.

Nous poserons comme précédemment

$$A^0 = A_{n+1} = B^0 = B_{m+1} = \{o\} \,,$$

$$A^{m+1} = A_0 = B^{n+1} = B_0 = \Re \,.$$

On sait que l'on peut définir les sous-espaces $A_k{}^j$ et $B_{j-1}{}^{k+1}$ $(j = 1, \cdots, m, m+1;\ k = 0, 1, \cdots, n)$ de manière que l'on ait

$$(9.5)\qquad A^j = \sum_{p\leqq j} \obar A_q{}^p , \qquad A_k = \sum_{q\geqq k} \obar A_q{}^p ,$$

$$(9.6)\qquad B^k = \sum_{q\leqq k} \obar B_p{}^q , \qquad B_j = \sum_{p\geqq j} \obar B_p{}^q .$$

Dans cette section nous voulons montrer que l'on peut définir ces sous-espaces par les relations

$$(9.7)\qquad A_k{}^j = B^{k+1}_{j-1} = A^j \odot B^{k+1} \odot A_k \odot B_{j-1} .$$

10. Considérons le cas de $m=n=1$. Si nous posons

$$A^1 = A , \qquad A_1 = B , \qquad B^1 = A' , \qquad B_1 = B' ,$$

les relations (9.3) et (9.4) deviennent

$$(10.1)\qquad A \obar B' = \mathfrak{R} , \qquad A' \obar B = \mathfrak{R} ,$$

$$(10.2)\qquad \{A\odot B\} \obar \{A'\odot B'\} \obar \{A\odot A'\} \obar \{B\odot B'\} = \mathfrak{R} .$$

Démontrons que l'on a

$$(10.3)\qquad A = \{A\odot A'\} \obar \{A\odot B\}, \qquad B = \{B\odot B'\} \obar \{A\odot B\} ,$$

$$(10.4)\qquad A' = \{A\odot A'\} \obar \{A'\odot B'\} , \qquad B' = \{B\odot B'\} \obar \{A'\odot B'\} .$$

On a d'abord

$$A \supseteqq \{A\odot A'\} \obar \{A\odot B\} .$$

Prenons un vecteur quelconque x appartenant à A. D'après l'hypothèse (10.2), on peut écrire

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 ,$$

$$x_1 \in A\odot A' , \qquad x_2 \in B\odot B' , \qquad x_3 \in A\odot B , \qquad x_4 \in A'\odot B' .$$

On en déduit

$$x - x_1 - x_3 = x_2 + x_4 \in A\odot B' = \{o\} .$$

Par suite

$$x = x_1 + x_3 \in \{A\odot A'\} \obar \{A\odot B\} .$$

La première des relations (10.3) est donc démontrée. Les autres relations se démontrent d'une manière analogue. On peut donc énoncer le

Théorème 10.1. *Si l'on a* (10.1) *et* (10.2), *on a* (10.3) et (10.4).

Grâce à ce théorème, on a entre A, B, A', B' les relations montrées sur la Fig. 5, où C, D, C', D' désignent respectivement $A\oplus B$, $A\odot B$, $A'\oplus B'$, $A'\odot B'$.

11. Revenons à la démonstration de la proposition énoncée au n° 9.

LE CAS DE $m=1$, $n=2$. En appliquant le théorème 10.1 aux sous-espaces A^1 A_2, B_1, B^2, on obtient

$$A^1 = \{A^1 \odot B^2\} \obar D_2{}^1 ,$$

$$A_2 = \{A_2 \odot B_1\} \obar D_2{}^1 ,$$

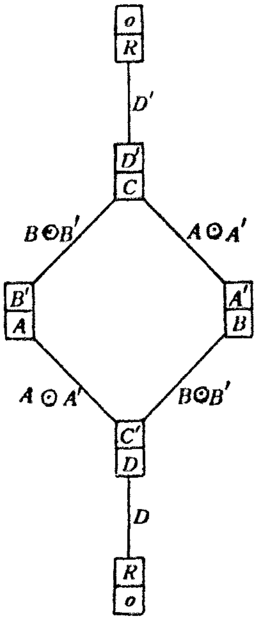

Fig. 5.

$$B_1=\{A_2\odot B_1\}\obar\{B_1\odot B^2\}\,,$$
$$B^2=\{A^1\odot B^2\}\obar\{B_1\odot B^2\}\,,$$

où

$$D_2^1=A^1\odot A_2=A_2^1\,.$$

La seconde de ces relations montre que l'on peut prendre

$$A_2^2=A_2\odot B_1\,.$$

En appliquant le théorème 10.1 aux sous-espaces A^1, A_1, B^1, B_1, on obtient

$$A^1=\{A^1\odot B^1\}\obar D_1^1\,,$$
$$A_1=\{A_1\odot B_1\}\obar D_1^1\,,$$
$$B_1=\{A_1\odot B_1\}\obar\{B^1\odot B_1\}\,,$$
$$B^1=\{A^1\odot B^1\}\obar\{B^1\odot B_1\}\,.$$

La première de ces relations montre que l'on peut prendre

$$A_0^1=A^1\odot B^1$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}D_1^1&=A^1\odot A_1\\&=\{\{A^1\odot B^2\}\obar D_2^1\}\odot A_1\\&=\{A^1\odot A_1\odot B_2\}\obar D_2^1\,,\end{aligned}$$

car $A_1\supseteqq D_2^1$. On peut donc prendre

$$A_1^1=A^1\odot A_1\odot B^2\,.$$

Puisque $D_1^1\odot B_1=\{o\}$, on a

$$D_1^1\oplus A_2=\{A_2\odot B_1\}\obar D_1^1\,.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}A_1\odot B_1&=A_1\odot\{\{A_2\odot B_1\}\obar\{B_1\odot B^2\}\}\\&=\{A_2\odot B_1\}\obar\{A_1\odot B_1\odot B^2\}\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$A_1=\{A_1\odot B_1\odot B^2\}\obar\{D_1^1\oplus A_2\}\,.$$

Par suite, on peut prendre

$$A_1^2=A_1\odot B_1\odot B^2$$

On verra de même que l'on peut prendre

$$B_0^1=A^1\odot B^1\,,\quad B_0^2=A^1\odot A_1\odot B^2\,,$$
$$B_1^1=B^1\odot B_1\,,\quad B_1^2=A_1\odot B_1\odot B^2\,,$$
$$B_1^3=A_2\odot B_1\,.$$

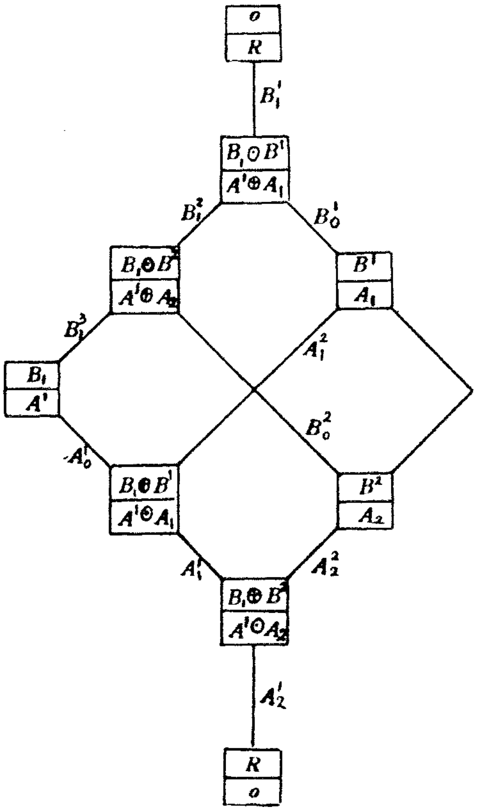

Fig. 6.

On obtient ainsi le schéma montré sur la Fig. 6.

Le cas de $m=1$, $n>2$. Les conditions qui déterminent A_k^1 et A_k^2 peuvent s'écrire

$$D_k^1 = A_k^1 \obar D_{k+1}^1 ,$$
$$A_k = A_k^2 \obar \{D_k^1 \oplus A_{k+1}\} ,$$

où $D_k^1 = A^1 \odot A_k$. Ces conditions ne dépendent que de A^1, A_k, A_{k+1}. On peut donc appliquer les résultats établis tout à l'heure. Par suite, on peut prendre

$$A_k^1 = A^1 \odot A_k \odot B^{k+1} ,$$
$$A_k^2 = A_k \odot B_1 \odot B^{k+1} .$$

On verra de même que l'on peut prendre

$$B_0^{k+1} = A^1 \odot A_k \odot B^{k+1} ,$$
$$B_1^{k+1} = A_k \odot B_1 \odot B^{k+1} .$$

12. Le cas de $m = n = 2$. Les conditions, qui déterminent A_0^1, A_1^1, A_0^2, A_2^2, A_1^3, A_2^3, ne dépendent que de trois des quatre sous-espaces A^1, A^2, A_1, A_2. Le résultat du n° précédent est donc applicable et l'on peut les définir par (9.7), en faisant, bien entendu, la convention d'écrire

$$A^0 = B_3 = \{o\} , \qquad A^3 = B_0 = \mathfrak{R} .$$

On peut de même définir B_0^1, B_1^1, B_0^2, B_2^2, B_1^3, B_2^3 par (9.7). Il nous reste à déterminer A_1^2 et B_1^2.

Désignons toujours par C_k^j, D_k^j, E_k^j les sous-espaces définis par (8.8), (8.9), (8.10).

En appliquant le résultat du n° précédent à deux systèmes supplémentaires A^2, A_1, A_2 et B_2, B^1, B^2, on obtient

$$D_1^2 = \{A^2 \odot A_1 \odot B^2\} \obar D_2^2 .$$

En appliquant le résultat du n° précédent à deux systèmes supplémentaires A^1, A_1, A_2 et B_1, B^1, B^2, on obtient (voir la Fig. 6)

$$A_1 \odot B^2 = \{A^1 \odot A_1 \odot B^2\} \obar \{A_1 \odot B_1 \odot B^2\} .$$

Puisque l'on a

$$A^2 \odot A_1 \odot B^2 = \{A^1 \odot A_1 \odot B^2\} \obar \{A^2 \odot A_1 \odot B^2 \odot B_1\}$$
$$= A_1^1 \obar \{A^2 \odot A_1 \odot B^2 \odot B_1\}$$

et que l'on a, d'après le théorème 7.2,

$$E_1^2 = A_1^1 \obar D_2^2 ,$$

on a

$$D_1^2 = \{A^2 \odot A_1 \odot B^2 \odot B_1\} \obar E_1^2 .$$

On peut donc définir A_1^2 par (9.7).

On verra de même que l'on peut définir B_1^2 par (9.7).

Le cas général. La condition qui détermine A_k^j ne dépend que de A^j, A^{j-1}, A_k, A_{k+1}. On peut donc appliquer le résultat établi ci-dessus. On voit ainsi que l'on peut définir A_k^j par (9.7). Il en serait de même de B_k^j.

Par conséquent, on peut énoncer le

Théorème 12.1. *Supposons que l'on ait* (9.1), (9.2), (9.3) *et* (9.4). *Si l'on définit les sous-espaces* $A_k^j (j = 1, \cdots, m, m+1; k = 0, 1, \cdots, n)$ *par* (9.7), *on a* (9.5) *et* (9.6).

Etant données deux suites finies monotones

$$A^1 \subset A^2 \subset \cdots \subset A^m, \qquad A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n,$$

on peut définir, d'après le théorème 8.1, les sous-espaces $A_k{}^j (j=1, \cdots, m, m+1; k=0, 1, \cdots, n; A_0{}^{m+1}$ exclu) de manière que l'on ait (9.5).

Soit $A_0{}^{m+1}$ un sous-espace supplémentaire à $A^m \oplus A_1$. Posons ensuite

$$A_k{}^j = B_{j-1}^{k+1} \qquad (j=1, \cdots, m, m+1; k=0, \cdots, n),$$

$$B^k = \sum_{q \leqq k} \oplus B_p{}^q, \qquad B_j = \sum_{p \leqq j} \oplus B_p{}^q.$$

On voit sans peine que le système de deux suites monotones $B^1, \cdots, B^n$ et $B_1, \cdots, B_m$ est supplémentaire à celui formé de A^j et A_k. On a donc le

Théorème 12.2. *Etant donné un système de deux suite monotones de sous-espaces, il existe une infinité de systèmes qui lui sont supplémentaires.*

13. Examinons le cas d'un système formé de deux suites monotones infinies:

$$A^1 \subset A^2 \subset \cdots \subset A^m \subset \cdots; \qquad A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \tag{13.1}$$

Nous supposons l'existence d'un système supplémentaire:

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_m \subset \cdots; \qquad B^1 \supset B^2 \supset \cdots \supset B^n \supset \cdots, \tag{13.2}$$

qui satisfait, par définition, aux relations (9.3) et (9.4) quels que soient les entiers positifs j et k. Posons

$$A^0 = \{o\}, \qquad A_0 = \mathfrak{R}, \qquad B^0 = \{o\}, \qquad B_0 = \mathfrak{R}, \tag{13.4}$$

$$A^\infty = \bigcup A^m, \qquad A_\infty = \bigcap A_n, \qquad B^\infty = \bigcup B^n, \qquad B_\infty = \bigcap B_m. \tag{13.5}$$

$A^1, \cdots, A^m; A_1, \cdots, A_m$ et $B_1, \cdots, B_m; B^1, \cdots, B^m$ étant deux systèmes supplémentaires, on a, d'après le théorème 12.1,

$$\left\{\begin{array}{l} A^j = A_0{}^j \oplus A_1{}^j \oplus \cdots A_{m-1}{}^j \oplus A'_m{}^j \oplus A^{j-1} \\ B^j = B_0{}^j \oplus B_1{}^j \oplus \cdots B_{m-1}{}^j \oplus B'_m{}^j \oplus B^{j-1} \end{array}\right. , \tag{13.6}$$

pour $j=1, 2, \cdots, m$, où les $A_k{}^j$, donnés par (9.7), forment avec $A'_m{}^j$, $B'_m{}^j$ une base d'une algèbre de sous-espaces. Ces expressions sont indépendants de m. Les $A_k{}^j (j=1, 2, \cdots; k=0, 1, \cdots)$ sont donc linéairement indépendants. Leur somme directe est $A^\infty \odot B^\infty$.

En effet, on a, par définition,

$$A_k{}^j \subseteqq A^j \odot B^{k+1} \subseteqq A^\infty \odot B^\infty.$$

Par suite, leur somme directe est contenue dans $A^\infty \odot B^\infty$.

Prenons un vecteur quelconque $x \in A^\infty \odot B^\infty$. Si m est assez grand, on a $x \in A^m \odot B^m$. Les expressions (13.6) et (9.7) montrent que l'on a

$$A^m \odot B^m = \sum \oplus A_k{}^j \qquad (1 \leqq j \leqq m; \ 0 \leqq k < m).$$

Par conséquent, on a le

Théorème 13.1. *S'il existe deux systèmes supplémentaires de deux suites monotones infinies* (13.1) *et* (13.2), *on a*

$$A^\infty \odot B^\infty = \sum \oplus A_k{}^j \qquad (1 \leqq j < \infty, \ 0 \leqq k < \infty),$$

les $A_k{}^j$ *étant définies par* (9.7).

Posons maintenant

$$A_\infty{}^m = A^m \odot B_{m-1} \odot A_\infty \,. \tag{13.8}$$

Puisque $A^{m-1} \obar B_{m-1} = \mathfrak{R}$, on a

$$\{A_\infty{}^1 \oplus \cdots \oplus A_\infty{}^{m-1}\} \odot A_\infty{}^m = \{o\}\,,$$

de sorte que les $A_\infty{}^m (m=1, 2, \cdots)$ sont linéairement indépendants. Nous allons montrer que l'on a

$$A^\infty \odot A_\infty = \sum_{m=1}^{\infty} \obar A_\infty{}^m \,. \tag{13.9}$$

Il est clair que le premier membre contient le second. Pour démontrer l'inclusion inverse, prenons un vecteur quelconque $x \in A^\infty \odot A_\infty$. Si m est assez grand, x appartient à $A^m \odot A_n$, quel que soit l'entier positif n. Or, on a (voir la Fig. 7)

$$A^m \odot A_n = \{A^m \odot B_{m-1} \odot A_n\} \obar \{A^{m-1} \odot A_n\}.$$

On peut donc écrire d'une seule manière

$$x = x_1 + x_2 \,,$$
$$x_1 \in A^m \odot B_{m-1} \odot A_n \,,$$
$$x_2 \in A^{m-1} \odot A_n \,.$$

x_1 et x_2 ne peuvent dépendre de n. On a donc

$$x_1 \in A_\infty{}^m \,, \qquad x_2 \in A^{m-1} \odot A_\infty \,.$$

On peut en conclure que l'on a

$$x \in A_\infty{}^1 \obar \cdots \obar A_\infty{}^m \,.$$

C.Q.F.D.

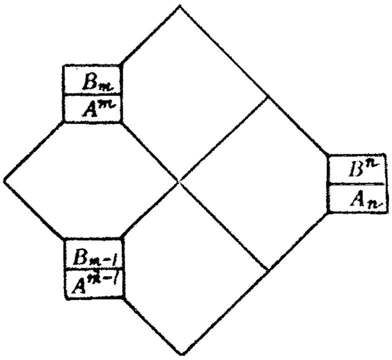

Fig. 7.

On peut démontrer de même que, si l'on pose,

$$B_\infty{}^n = B^n \odot A_{n-1} \odot B_\infty \,, \tag{13.8'}$$

on a

$$B^\infty \odot B_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \obar B_\infty{}^n \,. \tag{13.9'}$$

On a donc le

Théorème 13.2. *S'il existe deux systèmes supplémentaires de deux suites monotones infinies* (13.1) *et* (13.2), *on a* (13.9) *et* (13.9′), *où les* $A_\infty{}^m$ *et* $B_\infty{}^n$ *sont définis par* (13.8) *et* (13.8′).

Remarquons enfin que l'on a le

Théorème 13.3. *Les quatre sous-espaces*

$$A^\infty \odot B^\infty \,, \qquad A^\infty \odot A_\infty \,, \qquad B^\infty \odot B_\infty \,, \qquad A_\infty \odot B_\infty$$

sont linéairement indépendants.

On voit d'abord que l'on a

$$A^\infty \odot B_\infty = \{o\}\,, \qquad A_\infty \odot B^\infty = \{o\}\,,$$

car un vecteur quelconque $x \in A^{\infty} \odot B_{\infty}$, par exemple, appartient à $A^{m} \odot B_{m}$ pourvu que m soit assez grand. Il s'ensuit

$$\{A^{\infty} \odot B^{\infty}\} \odot \{A^{\infty} \odot A_{\infty}\} = \{o\} .$$

Puisque

$$\{A^{\infty} \odot B^{\infty}\} \obar \{A^{\infty} \odot A_{\infty}\} \subseteqq A^{\infty} , \qquad A_{\infty} \odot B_{\infty} \subseteqq B_{\infty} ,$$

on a

$$\{\{A^{\infty} \odot B^{\infty}\} \obar \{A^{\infty} \odot A_{\infty}\}\} \odot \{A_{\infty} \odot B_{\infty}\} = \{o\} .$$

Considérons un vecteur quelconque

$$x \in \{\{A^{\infty} \odot B^{\infty}\} \obar \{A^{\infty} \odot A_{\infty}\} \obar \{A_{\infty} \odot B_{\infty}\}\} \odot \{B^{\infty} \odot B_{\infty}\} .$$

On peut écrire

$$x = x_1 + x_2 + x_3 ,$$

$$x_1 \in A^{\infty} \odot B^{\infty} , \qquad x_2 \in A^{\infty} \odot A_{\infty} , \qquad x_3 \in A_{\infty} \odot B_{\infty} .$$

On a alors

$$x - x_3 = x_1 + x_2 \in A^{\infty} \odot B_{\infty} .$$

Par suite

$$x = x_3 \in A_{\infty} \odot B^{\infty} = \{o\} .$$

On a donc $x = o$. C.Q.F.D.

Mais il faut remarquer que l'on n'a pas en général l'égalité

$$\{A^{\infty} \odot B^{\infty}\} \obar \{A^{\infty} \odot A_{\infty}\} \obar \{B^{\infty} \odot B_{\infty}\} \obar \{A_{\infty} \odot B_{\infty}\} = \mathfrak{R} .$$

CHAPITRE II. ENDOMORPHISMES D'ORDRE FINI

I. Ordre de l'endomorphisme

14. Considérons un endomorphisme L de l'espace vectoriel $\mathfrak{R}$. Soient N^{n}, N_{n} et μ, ν respectivement les sous-espaces et les entiers définis au n° 1.

LE CAS DE $N^{1} = \{o\}$, $N_{1} \subset \mathfrak{R}$.

Prenons un vecteur a_0 n'appartenant pas à N_1, et posons $a_n = L^{n} a_0$. On a évidemment $a_n \in N_n$. Si l'on avait $a_n \in N_{n+1}$, on pourrait trouver un vecteur a tel que $a_n = L^{n+1} a$. On aurait alors

$$a_0 - La \in N^{n} = N^{1} = \{o\} ,$$

ce qui entraînerait $a_0 = La \in N_1$ contrairement à l'hypothèse. a_n n'appartenant pas à N_{n+1}, on a $N_n \subset N_{n+1}$. Par suite $\nu = \infty$.

LE CAS DE $N^{1} \supset \{o\}$, $N_1 = \mathfrak{R}$.

Prenons un vecteur $a_0 \neq o$ de N^{1}. On peut définir une suite de vecteurs $a_n (n = 1, 2, \cdots)$ par les relations

$$La_n = a_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots) .$$

On voit sans peine $a_n \in N^{n+1}$, $a_n \notin N^{n}$. On a donc $\mu = \infty$.

Le théorème suivant est donc démontré.

Théorème 14.1. *Si* $\mu=0$, *on a* $\nu=0$ *ou* $\nu=\infty$; *si* $\nu=0$, *on a* $\mu=0$ *ou* $\mu=\infty$.

Supposons $N^1\odot N_1\supset\{o\}$. Si $a\neq o$ est un vecteur de $N^1\odot N_1$, il existe un vecteur b tel que $Lb=a$, et l'on a $b\in N^2$, $b\notin N^1$.

Supposons $N^1\oplus N_1\subset\mathfrak{R}$. Si a est un vecteur n'appartenant pas à $N^1\oplus N_1$, on a $La\in N_1$ mais non $La\in N_2$.

En effet, si l'on avait $La\in N_2$, on pourrait trouver un vecteur b tel que $La=L^2b$, d'où $a-Lb\in N^1$. On aurait donc $a\in N^1\oplus N_1$ contrairement à l'hypothèse.

On peut discuter de la même manière en remplaçant L par L^n. Par suite, $N^n\odot N_n\supset\{o\}$ entraîne $N^n\subset N^{2n}$; $N^n\oplus N_n\subset\mathfrak{R}$ entraîne $N_n\supset N_{2n}$.

Si $N^n=N^{n+1}$, on a $N^n=N^{2n}$ et par suite $N^n\odot N_n=\{o\}$. De même, $N_n=N_{n+1}$ entraîne $N^n\oplus N_n=\mathfrak{R}$. On a donc le

Théorème 14.2. $N^n=N^{n+1}$ entraîne $N^n\odot N_n=\{o\}$; $N_n=N_{n+1}$ entraîne $N^n\oplus N_n=\mathfrak{R}$.

A et B étant deux sous-espaces, on vérifie sans peine que l'on a

$$L\{A\oplus B\}=L\{A\}\oplus L\{B\}\,.$$

Si donc $N^1\oplus N_1=\mathfrak{R}$, on a

$$N_1=L\{\mathfrak{R}\}=L\{N^1\oplus N_1\}=L\{N^1\}\oplus L\{N_1\}=N_2\,.$$

En remplaçant L par L^n, on voit que $N^n\oplus N_n=\mathfrak{R}$ entraîne $N_n=N_{2n}$.

Supposons $N^1\odot N_1=\{o\}$. Si $x\in N^2$, on a $Lx\in N^1\odot N_1=\{o\}$; par suite $x\in N^1$. En remplaçant L par L^n on voit que $N^n\odot N_n=\{o\}$ entraîne $N^n=N^{2n}$. Les relations $N^n=N^{2n}$ et $N_n=N_{2n}$ étant équivalentes respectivement à $N^n=N^{n+1}$ et à $N_n=N_{n+1}$, on obtient le

Théorème 14.3. $N^n\odot N_n=\{o\}$ *entraîne* $N^n=N^{n+1}$; $N^n\oplus N_n=\mathfrak{R}$ *entraîne* $N_n=N_{n+1}$.

15. Si l'on considère L comme un endomorphisme de N_1, les ensembles correspondant à N^j et N_k sont $N^j\odot N_1$ et N_{k+1}. Donc, d'après la première partie du théorème 14.1, $N^1\odot N_1=\{o\}$ entraîne $N_1=N_2$ ou $\nu=\infty$. En remplaçant L par L^n, on voit que $N^n\odot N_n=\{o\}$ entraîne $N_n=N_{n+1}$ ou $\nu=\infty$. On obtient donc le

Théorème 15.1. $N^n\odot N_n=\{o\}$ *entraîne* $N_n=N_{n+1}$ *ou* $\nu=\infty$.

Soient M un sous-espace et H un endomorphisme tel que $H\{M\}\subseteqq M$. On peut alors définir un endomorphisme MH qui fait correspondre à chaque élément Mx de $\mathfrak{R}/M$ un élément $M(Hx)$ de $\mathfrak{R}/M$ par la relation

$$(MH)(Mx)=M(Hx)\,.$$

En effet, si $Mx=Mx'$, on a $x-x'\in M$ et

$$M(Hx)-M(Hx')=M(H(x-x'))=M\,.$$

Donc $M(Hx)=M(Hx')$.

Si $M'=H\{M\}$, on peut considérer HM comme un opérateur linéaire qui fait correspondre à un vecteur x de $\mathfrak{R}$ un élément $M'(Hx)$ de $\mathfrak{R}/M'$; et l'on voit aisément

$$M(HMx)=(MH)(Mx)$$

de sorte que l'on peut supprimer les parenthèses sans aucune confusion à craindre.

Puisque $L\{N^1\}=\{o\}\subseteqq N^1$, on peut prendre $M=N^1$.

Désignons par $\mathfrak{N}_n$ et $\mathfrak{N}^n$ les ensembles

$$\mathfrak{N}_n=(N^1L)^n\{\mathfrak{N}/N^1\}\,, \qquad \mathfrak{N}^n=(N^1L)^{-n}\{N^1\}\,.$$

Si $N^1x\in\mathfrak{N}^1$, on a $N^1Lx=N^1$ qui est équivalente à $Lx\in N^1$. On a donc

$$\mathfrak{N}^1=\{N^1x;\ x\in N^2\}\,.$$

Pour que l'on ait $N^1x\in\mathfrak{N}_1$, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur y tel que $N^1x=N^1Ly$. Cette condition est équivalente à $x\in N^1\oplus N_1$. On a donc

$$\mathfrak{N}_1=\{N^1x;\ x\in N^1\oplus N_1\}\,.$$

D'une manière générale, on a

$$\mathfrak{N}^n=\{N^1x;\ x\in N^{n+1}\}\,, \qquad \mathfrak{N}_n=\{N^1x;\ x\in N^1\oplus N_n\}\,. \tag{15.1}$$

Pour le démontrer, remarquons d'abord que l'on a

$$(N^1L)^nN^1=N^1L^nN^1$$

dans $\mathfrak{N}$.

Cette relation étant évidente pour $n=1$, nous la supposons démontrée pour $n=m$.

$$\begin{aligned}(N^1L)^{m+1}N^1&=(N^1L)((N^1L)^mN^1)\\ &=N^1L(N^1L^mN^1)\\ &=(N^1LN^1)(L^mN^1)\,.\end{aligned}$$

Or, on a toujours

$$N^1LN^1x=N^1Lx\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}(N^1L)^{m+1}N^1x&=(N^1LN^1)(L^mN^1x)\\ &=(N^1L)(L^mN^1x)\\ &=N^1L^{m+1}N^1x\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Pour que l'on ait $N^1x\in\mathfrak{N}^n$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(N^1L)^nN^1x=N^1\,.$$

D'après la formule démontrée tout à l'heure, cette relation est équivalente à $N^1L^nN^1x=N^1$ c'est-à-dire $L^nx\in N^1$. Cette dernière relation est équivalente à $x\in N^{n+1}$.

Pour que l'on ait $N^1x\in\mathfrak{N}_n$, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur y tel que

$$N^1x=N^1L^nN^1y\,.$$

Cette condition est équivalente à $x\in N^1\oplus N_n$.

Les formules (15.1) sont donc établies.

Supposons $N^1\oplus N_1=\mathfrak{N}$. Alors $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}/N^1$.

D'après la deuxième partie du théorème 14.1, on a $\mathfrak{N}^1=\{N^1\}$ ou $\mathfrak{N}^{n-1}\subset\mathfrak{N}^n$ $(n=1, 2, \cdots)$. $\mathfrak{N}^1=\{N^1\}$ entraîne $N^1=N^2$ et $\mathfrak{N}^{n-1}\subset\mathfrak{N}^n$ entraîne $N^n\subset N^{n+1}$. En remplaçant L par L^n, on obtient donc le

Théorème 15.1′. $N^n \oplus N_n = \mathfrak{R}$ *entraîne* $N^n = N^{n+1}$ ou $\mu = \infty$.

16. Les théorèmes 14.2 et 14.3 entraînent le

Théorème 16.1. *Les deux conditions* $N^n \odot N_n = \{o\}$ *et* $N^n = N^{n+1}$ *sont équivalentes; les deux conditions* $N^n \oplus N_n = \mathfrak{R}$ *et* $N_n = N_{n+1}$ *sont équivalentes.*

Puis l'existence d'un nombre fini ν entraîne, d'après le théorème 15.1, que $N_n = N_{n+1}$ est une conséquence de $N^n \odot N_n = \{o\}$; et l'existence d'un nombre fini μ entraîne, d'après le théorème 15.1′, que $N^n = N^{n+1}$ est une conséquence de $N^n \oplus N_n = \mathfrak{R}$. On a donc le

Théorème 16.2. *Dans le cas de* $\nu < \infty$, $N^n \odot N_n = \{o\}$ *entraîne* $N^n \oplus N_n = \mathfrak{R}$, $N^n = N^{n+1}$, $N_n = N_{n+1}$; *dans le cas de* $\mu < \infty$, $N^n \oplus N_n = \mathfrak{R}$ *entraîne* $N^n \odot N_n = \{o\}$, $N^n = N^{n+1}$, $N_n = N_{n+1}$.

Il en résulte immédiatement le

Théorème 16.3. *Dans le cas où l'on a* $\mu < \infty$ *et* $\nu < \infty$, *les quatre conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $N^n \odot N_n = \{o\}$;
(ii) $N^n \oplus N_n = \mathfrak{R}$;
(iii) $N^n = N^{n+1}$;
(iv) $N_n = N_{n+1}$.

On a en particulier $\mu = \nu$.

Nous appellerons cet entier $\max\{\mu, \nu\}$ l'ordre de l'endomorphisme L. Si $\mu \neq \nu$, l'ordre est nécessairement ∞.

II. Décomposition de l'espace en des sous-espaces

17. On peut appliquer à l'étude des sous-espaces N^n, N_n $(n=1, \cdots, \nu)$ les résultats du n° 8. On peut donc écrire

$$N^1 = N_0{}^1 \obar N_1{}^1 \obar \cdots \obar N_{\nu-1}{}^1 \obar D,$$
$$N^j = N_0{}^j \obar N_1{}^j \obar \cdots \obar N_\nu{}^j \obar N^{j-1}, \quad (j=2, \cdots, \nu),$$
$$N_k = N_k{}^1 \obar N_k{}^2 \obar \cdots \obar N_k{}^{\nu+1} \obar N_{k+1}, \quad (k=1, \cdots, \nu-1),$$
$$N_\nu = N_\nu{}^2 \obar N_\nu{}^3 \obar \cdots \obar N_\nu{}^{\nu+1} \obar D.$$

Mais on sait que l'on a

$$N^\nu \obar N_\nu = \mathfrak{R}.$$

Cette relation exige $D = \{o\}$ et

$$N_\nu{}^2 = \cdots = N_\nu{}^\nu = \{o\},$$
$$N_1{}^{\nu+1} = \cdots = N_{\nu-1}^{\nu+1} = \{o\}.$$

1° Si $\nu = 2$, on obtient

$$N^1 = N_0{}^1 \obar N_1{}^1, \ N^2 = N_0{}^2 \obar N_1{}^2 \obar N^1,$$
$$N_1 = N_1{}^1 \obar N_1{}^2 \obar N_2, \quad N_2 = N_2{}^3.$$

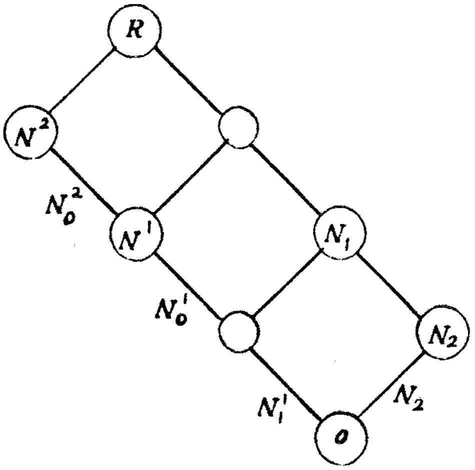

Fig. 8.

Si l'on considère L comme un endomorphisme de N_1, on se trouve dans le cas où $\nu = 1$. Les sous-espaces correspondant à N^1 et N_1 sont $N^1 \odot N_1 = N_1{}^1$ et N_2. On doit donc avoir $N_2 \obar N_1{}^1 = N_1$, ce qui exige $N_1{}^2 = \{o\}$. On a donc finalement

$$N^2 = N_0^1 \obar N_1^1 \obar N_0^2 ,$$

et N_0^1, N_1^1, N_0^2 et N_2 sont linéairement indépendants.

2° Dans le cas général, on a $D=\{o\}$ et $N_k^j=\{o\}$ pour $j+k>\nu$ sauf $N_\nu = N_\nu^{\nu+1}$.

Pour le démontrer, nous le supposons vrai lorsque l'ordre est moindre que ν.

Si l'on considère L comme un endomorphisme de N_1, on se trouve dans le cas où l'ordre est égal à $\nu-1$. Les sous-espaces correspondant à $N^1, \cdots, N^{\nu-1}$, $N_1, \cdots, N_{\nu-1}$ sont

$$\begin{aligned} N^1 \odot N_1 &= N_1^1 \obar \cdots \obar N_{\nu-1}^1 , \\ N^j \odot N_1 &= N_1^j \obar \cdots \obar N_{\nu-1}^j \obar \{N^{j-1} \odot N_1\} && (j=2, \cdots, \nu-1) , \\ N_k &= N_k^1 \obar \cdots \obar N_k^\nu \obar N_{k+1} && (k=2, \cdots, \nu-1) , \\ N_\nu &= N_\nu^{\nu+1} . \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$M^j = N^j \odot N_1 \qquad M_k = N_{k+1} , \qquad M_k^j = N_{k+1}^j ,$$

les $2\nu-3$ premières des relations deviennent

$$\begin{aligned} M^1 &= M_0^1 \obar \cdots \obar M_{\nu-2}^1 , \\ M^j &= M_0^j \obar \cdots \obar M_{\nu-2}^j \obar M^{j-1} && (j=2, \cdots, \nu-1) , \\ M_{k-1} &= M_{k-1}^1 \obar \cdots M_{k-1}^\nu \obar M_k && (k=2, \cdots, \nu-1) .\cdot \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse, $M_k^j=\{o\}$ pour $j+k>\nu-1$. Par suite, $N_k^j=\{o\}$ pour $j+k>\nu$. C.Q.F.D.

On a donc le

Théorème 17.1. *Dans le cas de l'ordre fini, on peut déterminer les sous-espaces linéairement indépendants* $N_k^j (j \geqq 1,\ k \geqq 0,\ j+k \leqq \nu)$, *de manière que l'on ait*

$$N^j = \sum_{p \geqq j} \obar N_q^p, \qquad N_k = N_\nu \obar \sum_{q \geqq k} \obar N_q^p .$$

La somme directe de ces sous-espaces N_k^j *est* N^ν.

18. Posons

$$C_k^j = N^j \oplus N_k , \qquad D_k^j = N^j \odot N_k , \qquad E_k^j = D_k^{j-1} \oplus D_{k+1}^j . \tag{18.1}$$

Remarquons d'abord que l'on a

$$L\{D_q^p\} = D_{q+1}^{p-1}. \tag{18.2}$$

A et B étant des sous-espaces, on a toujours

$$L\{A \odot B\} \subseteqq L\{A\} \odot L\{B\} ,$$

mais on ne peut dire en général que l'on a l'égalité. Pourtant on a (18.2), car, x étant un vecteur quelconque de D_{q+1}^{p-1}, le vecteur $y \in N_q$ tel que $x=Ly$ appartient à N^p.

Cela posé, les conditions qui déterminent N_0^j s'écrivent

$$C_1^j = N_0^j \obar C_1^{j-1}, \qquad N^j \supseteqq N_0^j ,$$

qui sont équivalentes à

(18.3) $$N^j = N_0^j \obar \{N^{j-1} \oplus D_1^j\} .$$

On a évidemment $L\{N_0^j\} \subseteqq D_1^{j-1}$. Nous allons montrer que l'on peut prendre

$$N_1^{j-1} = L\{N_0^j\} \qquad (j=2, \cdots, \nu) .$$

La condition qui détermine N_1^{j-1} étant

$$D_1^{j-1} = N_1^{j-1} \obar E_1^{j-1} ,$$

il suffit de montrer que l'on a

$$L\{N_0^j\} \odot E_1^{j-1} = \{o\} ,$$

car on a

$$\begin{aligned} D_1^{j-1} &= L\{N^j\} \\ &= L\{N_0^j\} \oplus L\{N^{j-1} \oplus D_1^j\} \\ &= L\{N_0^j\} \oplus \{D_1^{j-2} \oplus D_2^{j-1}\} = L\{N_0^j\} \oplus E_1^{j-1} . \end{aligned}$$

Prenons un vecteur quelconque

$$x \in L\{N_0^j\} \odot E_1^{j-1} .$$

On peut écrire

$$x = Ly = Ly' + Ly'' ,$$

$$y \in N_0^j , \qquad y' \in N^{j-1} , \qquad y'' \in D_1^j .$$

Puisque

$$L(y-y'') = Ly' \in D_1^{j-2} \subseteqq N^{j-2} ,$$

on a $y-y'' \in N^{j-1}$. Par suite

$$y \in N_0^j \odot \{N^{j-1} \oplus D_1^j\} = \{o\} .$$

On a donc $y=o$. C.Q.F.D.

D'une manière plus générale, on peut prendre

$$N_k^j = L\{N_{k-1}^{j+1}\} \qquad (j=1, \cdots, \nu-k) .$$

Ces relations étant démontrées pour $k=1$, nous supposons $k \geqq 2$. Il suffit alors de montrer que la condition

$$D_{k-1}^{j+1} = N_{k-1}^{j+1} \obar E_{k-1}^{j+1}$$

entraîne

$$D_k^j = L\{N_{k-1}^{j+1}\} \obar E_k^j .$$

Considérons un vecteur quelconque

$$x \in L\{N_{k-1}^{j+1}\} \odot E_k^j .$$

On peut écrire

$$x = Ly = Ly' + Ly'' ,$$

$$y \in N_{k-1}^{j+1} , \qquad y' \in D_{k-1}^j , \qquad y'' \in D_k^{j+1} .$$

Puisque

$$L(y-y'')=Ly'\in D_k{}^{j-1}\ ,$$

on a $y-y''\in D_{k-1}{}^j$. Par suite

$$y\in N_{k-1}^{j+1}\odot E_{k-1}^{j+1}=\{o\}\ .$$

On a donc $y=o$. C.Q.F.D.

Puisque

$$\begin{aligned}E_k{}^j&=D_k{}^{j-1}\oplus D_{k+1}{}^j\\&=L\{D_{k-1}{}^j\oplus D_k{}^{j+1}\}=L\{E_{k-1}^{j+1}\}\ ,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}D_k{}^j&=L\{D_{k-1}^{j+1}\}=L\{N_{k-1}^{j+1}\obar E_{k-1}^{j+1}\}\\&=L\{N_{k-1}^{j+1}\}\obar E_k{}^j\ .\end{aligned}$$

On obtient donc le

Théorème 18.1. *On peut supposer que les sous-espaces* $N_q{}^p$ *du théorème* 17.1 *satisfassent aux relations*

$$L\{N_q{}^p\}=N_{q+1}^{p-1}\qquad(p>1,\ q\geqq 0,\ p+q\leqq\nu)\ .$$

Nous supposerons désormais ces relations satisfaites.

19. Les résultats des n^os^ 14, 15, 16 nous suggèrent que l'on a une dualité:

Dans une proposition concernant N^j, N_k, *on peut intervertir* $\odot$ *et* $\oplus$, $\supset$ *et* $\subset$, $\mathfrak{R}$ *et* $\{o\}$, N^n *et* N_n.

C'est la conséquence de l'existence d'un endomorphisme $\underline{L}$ tel que, si

$$N^n=\underline{L}^{-n}\{o\}\ ,\qquad N_n=\underline{L}^n\{\mathfrak{R}\}\ ,\tag{19.1}$$

on a

$$N^n\obar\underline{N}_n=N_n\obar\underline{N}^n=\mathfrak{R}\ .\tag{19.2}$$

Un tel endomorphisme $\underline{L}$ peut être défini comme il suit:

$$\underline{L}x=o\ \text{pour}\ x\in N_0{}^j\ .$$

La correspondance entre N_{k-1}^{j+1} et $N_k{}^j$ par L étant biunivoque, on peut déterminer d'une seule manière la valeur $\underline{L}x$ pour $x\in N_k{}^j$ $(k>0)$ par les relations $\underline{L}x\in N_{k-1}^{j+1}$, $L\underline{L}x=x$.

N_ν correspondant par L à lui-même d'une manière biunivoque, on peut déterminer d'une seule manière la valeur $\underline{L}x$ pour $x\in N_\nu$ par les relations $\underline{L}x\in N_\nu$, $\underline{L}Lx=x$.

L'espace $\mathfrak{R}$ étant une somme directe des sous-espaces $N_k{}^j$ et N_ν, l'endomorphisme $\underline{L}$ est entièrement défini dans $\mathfrak{R}$ par ces conditions. Cet endomorphisme $\underline{L}$ sera appelé endomorphisme supplémentaire de L. Bien entendu, il n'est pas unique. Il dépend de la décomposition de l'espace en des sous-espaces $N_q{}^p$.

Si l'on pose $\underline{N}_k{}^j=N_{j-1}^{k+1}$, on verra sans peine

$$\underline{N}^n=\sum_{p\leqq n}\obar\underline{N}_q{}^p\ ,\qquad\underline{N}_n=\underline{N}_\nu\obar\sum_{q\geqq n}\obar\underline{N}_q{}^p\ .$$

On en conclut que l'on a (19.2).

III. Représentation par des matrices

20. Un vecteur quelconque de $\mathfrak{R}$ peut être considéré comme une matrice avec une seule colonne dont les éléments sont des vecteurs de N_0^1, N_0^2, N_1^1, N_0^3, N_1^2, N_2^1, $\cdots$, N_0^ν, $N_1^{\nu-1}$, $\cdots$, $N_{\nu-1}^1$, N_ν rangés dans cet ordre. N_k^j et N_{k+1}^{j-1} se correspondant par L d'une manière biunvioque, on peut représenter par une même lettre les vecteurs correspondants de N_k^j et de N_{k+1}^{j-1}. On peut alors représenter l'endomorphisme L par une matrice

$$L=\begin{pmatrix} E_1 & O & \cdots\cdots & O & O \\ O & E_2 & \cdots\cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots\cdots & E_\nu & O \\ O & O & \cdots\cdots & O & L' \end{pmatrix}, \tag{20.1}$$

où

$$E_n=\begin{pmatrix} \overbrace{O \quad O \quad \cdots\cdots \quad O \quad O \quad O}^{n} \\ I \quad O \quad \cdots\cdots \quad O \quad O \quad O \\ O \quad I \quad \cdots\cdots \quad O \quad O \quad O \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ O \quad O \quad \cdots\cdots \quad I \quad O \quad O \\ O \quad O \quad \cdots\cdots \quad O \quad I \quad O \end{pmatrix}, \tag{20.2}$$

L' étant un endomorphisme qui fait correspondre N_ν à lui-même d'une manière biunivoque.

21. Considérons en particulier le cas où $\mathfrak{R}$ est un espace euclidien complexe à n dimensions. Il est clair que μ et ν sont finis. Le théorème 16.3 entraîne comme corollaire le théorème bien connu:

Un système d'équations linéaires avec seconds membres admet une solution et une seule si et seulement si le système homogène correspondant n'admet qu'une solution identiquement 0.

Considérons l'endomorphisme $L[\lambda]=K-\lambda I$. L'ordre ν dépendant de λ, nous le désignons par $\nu[\lambda]$. La valeur λ telle que $\nu[\lambda]>0$ est la valeur propre de l'endomorphisme K. On sait l'existence des valeurs propres. Désignons par λ_1 une de ces valeurs. On peut appliquer à l'endomorphisme $L[\lambda_1]$ le résultat du n° précédent. On obtient alors pour K la représentation par une matrice

$$K=\begin{pmatrix} \lambda_1 I+E_1 & O & \cdots\cdots & O & O \\ O & \lambda_1 I+E_2 & \cdots\cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots\cdots & \lambda_1 I+E_{\nu_1} & O \\ O & O & \cdots\cdots & O & K' \end{pmatrix} \tag{21.1}$$

où $\nu_1=\nu[\lambda_1]$ et K' est un endomorphisme défini dans un sous-espace.

On obtient de même pour K' une représentation

$$K'=\begin{pmatrix} \lambda_2 I+E_1 & O & \cdots\cdots & O & O \\ O & \lambda_2 I+E_2 & \cdots\cdots & O & O \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ O & O & \cdots\cdots & \lambda_2 I+E_{\nu_2} & O \\ O & O & \cdots\cdots & O & K'' \end{pmatrix}$$

et ainsi de suite. Le nombre de dimensions étant fini, on a finalement

$$K=\begin{pmatrix} K_1 & O & \cdots\cdots & O \\ O & K_2 & \cdots\cdots & O \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ O & O & \cdots\cdots & K_m \end{pmatrix}, \tag{21.2}$$

où

$$K_j=\begin{pmatrix} \lambda_j I+E_1 & O & \cdots\cdots & O \\ O & \lambda_j I+E_2 & \cdots\cdots & O \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ O & O & \cdots\cdots & \lambda_j I+E_{\nu_j} \end{pmatrix}. \tag{21.3}$$

Cette matrice K est de la forme canonique de Jordan. On est donc parvenu à la conclusion:

Dans le cas de l'espace euclidien complexe à un nombre fini de dimensions, la matrice qui représente un endomorphisme donné peut prendre la forme canonique de Jordan, si l'on prend convenablement les coordonnées.

22. On sait que, si $f(\rho)$ désigne le déterminant

$$f(\rho)=|K-\rho I|,$$

on a

$$f(K)=O. \tag{22.1}$$

Nous allons montrer, sans supposer le nombre de dimensions fini, qu'un endomorphisme K satisfaisant à une équation algébrique (22.1) peut être représenté par une matrice de la forme canonique de Jordan⁽¹⁾.

Considérons d'abord l'endomorphisme appelé projection.

Si $\mathfrak{R}=A\oplus B$, tout vecteur x peut être représenté d'une seule manière comme la somme d'un vecteur x' de A et d'un vecteur x'' de B. L'endomorphisme P défini par $Px=x'$ est la projection. Cette projection sera désignée par $P=B\dashv A$.

On a immédiatemant $P^2=P$.

Réciproquement un endomorphisme P tel que $P^2=P$ est une projection.

En effet

$$N_2=P^2\{\mathfrak{R}\}=P\{\mathfrak{R}\}=N_1.$$

On a donc $\nu\leqq 1$.

D'autre part, si $x\in N^2$, on a

$$o=P^2x=Px.$$

Par suite $x\in N^1$. On a donc $\mu\leqq 1$.

Si $x\in N_1$, il existe un vecteur y tel que $x=Py$. On a alors

$$x=Py=P^2y=Px.$$

---

(1) On suppose que $\mathfrak{K}$ soit un corp de nombres complexes.

Puisque $N^1 \oplus N_1 = \mathfrak{R}$, on peut écrire d'une seule manière $x = x' + x''$, $x' \in N_1$, $x'' \in N^1$. On a alors $Px = x'$. P est donc la projection: $N^1 \div N_1$.

23. Soit K un endomorphisme satisfaisant à une équation algébrique

$$K^n + \alpha_1 K^{n-1} + \cdots + \alpha_n I = O\,. \tag{23.1}$$

Nous considérons l'endomorphisme dépendant d'un paramètre λ:

$$L[\lambda] = K - \lambda I\,.$$

Les sous-espaces N^n, N_n, N^ν, N_ν et les entiers μ, ν dépendant de λ, nous les désignerons par $N^n[\lambda]$, $N_n[\lambda]$, $M[\lambda]$, $N[\lambda]$ et $\mu[\lambda]$, $\nu[\lambda]$.

Le cas de $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. On a évidemment $N^n = \mathfrak{R}$, $N_n = \{o\}$. Par suite $\mu[0] = \nu[0] \leqq n$, on a donc la représentation

$$K = \begin{pmatrix} E_1 & O & \cdots\cdots & O \\ O & E_2 & \cdots\cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ O & O & \cdots\cdots & E_\nu \end{pmatrix}.$$

Le cas de $\alpha_n \neq 0$. On a $\nu[0] = \mu[0] = 0$, $N^1[0] = \{o\}$, $N_1[0] = \mathfrak{R}$. En effet, si $x \in N^1[0]$, on a

$$o = (K^n + \alpha_1 K^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} K)x = -\alpha_n I x = -\alpha_n x\,.$$

Donc, $x = o$.

D'autre part,

$$\mathfrak{R} = -\alpha_n I\{\mathfrak{R}\} = (K^n + \alpha_1 K^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} K)\{\mathfrak{R}\} \subseteqq N_1[0]\,,$$

d'où $N_1[0] = \mathfrak{R}$.

Le cas de

$$\alpha_{n-m} \neq 0,\quad \alpha_{n-m+1} = \cdots = \alpha_n = 0 \qquad (m > 0)\,. \tag{23.2}$$

Si $x \in N^{m+1}[0]$, on a

$$o = (K^n + \cdots + \alpha_{n-m-1} K^{m+1})x = -\alpha_{n-m} K^m x\,,$$

d'où $K^m x = o$. Par suite $N^m[0] = N^{m+1}[0]$, $\mu[0] \leqq m$.

D'autre part,

$$N_m[0] = -\alpha_{n-m} K^m\{\mathfrak{R}\} = (K^n + \cdots + \alpha_{n-m-1} K^{m+1})\{\mathfrak{R}\} \subseteqq N_{m+1}[0]\,,$$

d'où $N_m[0] = N_{m+1}[0]$. Par suite $\nu[0] \leqq m$.

Démontrons ensuite que l'on a

$$K^{n-m} + \alpha_1 K^{n-m+1} + \cdots + \alpha_{n-m} I = O\,. \tag{23.3}$$

dans $N[0]$.

En effet, K faisant correspondre $N[0]$ à lui-même d'une manière biunvioque, le vecteur Kx qui correspond à $x \in N[0]$ différent de o l'est aussi. Si l'on avait

$$y = (K^{n-m} + \alpha_1 K^{n-m+1} + \cdots + \alpha_{n-m} I)x \neq o$$

pour un vecteur $x \in N[0]$, on aurait $K^m y \neq o$, car $y \in N[0]$. Mais on a

$$K^m y = (K^n + \alpha_1 K^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-m} K^m)x = o\,.$$

Cette contradiction démontre la proposition annoncée. On peut donc énoncer le

Théorème 23.1. *Soit K un endomorphisme satisfaisant à la relation* (23.1). *Si l'on a* (23.2), *on a* $\mu[\lambda]=\nu[\lambda]\leqq m$. *On a de plus* (23.3) *dans* $N[0]$.

Cela posé, prenons une racine λ_1 de multiplicité m_1 de l'équation

$$\rho^n+\alpha_1\rho^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}\rho+\alpha_n=0\,. \tag{23.4}$$

L'endomorphisme $L_1+L[\lambda_1]$ satisfait à une équation algébrique

$$L_1{}^n+\beta_1L_1{}^{n-1}+\cdots+\beta_{n-m_1}L^{m_1}=O\,. \tag{23.5}$$

Si l'on pose

$$f(\rho)=\rho^n+\alpha_1\rho^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}\rho+\alpha_n\,,$$

$$g(\rho)=\rho^n+\beta_1\rho^{n-1}+\cdots+\beta_{n-m_1}\rho^{m_1}\,,$$

on a évidemment

$$g(\rho)=f(\rho+\lambda_1)\,.$$

L_1 peut être représentée par la matrice (20.1) (où $\nu=\nu[\lambda_1]$). D'après le théorème 23.1, si l'on ne considère que les vecteurs de $N[\lambda_1]$, on peut supprimer dans (23.5) le facteur L^{m_1}. L'endomorphisme L' défini dans $N[\lambda_1]$, où il coïncide avec L_1, satisfait donc à l'équation algébrique

$$L^{n-m_1}+\beta_1L^{n-m_1}+\cdots+\beta_{n-m_1}I=O\,.$$

L'endomorphisme K peut donc être représenté par la matrice (21.1) et l'on a $L'=K'-\lambda_1I$ dans $N[\lambda_1]$. Si l'on pose

$$f(\rho)=(\rho-\lambda_1)^{m_1}f_1(\rho)\,,\qquad g(\rho)=\rho^{m_1}g_1(\rho)\,,$$

on a

$$g_1(\rho)=f_1(\rho+\lambda_1)\,,$$

et l'endomorphisme K' satisfait à l'équation algébrique de degré $n-m_1$:

$$g_1(K')=O.$$

On peut donc démontrer par induction le

Théorème 23.2. *Soit K un endomorphisme satisfaisant à l'équation algébrique* (23.1). *Alors K peut être représenté par une matrice* (21.2), *où K_j sont des matrices* (21.3), $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ *étant des racines distinctes de l'équation caractéristique* (23.4).

CHAPITRE III. ENDOMORPHISMES ADJOINTS

I. Espaces conjugués

24. Un espace vectoriel (à gauche) $\mathfrak{R}$ sur un corps commutatif $\mathfrak{K}$ et un espace vectoriel (à droite) $\mathfrak{R}^*$ sur le même corps sont appelés conjugués l'un à l'autre, si les conditions suivantes sont remplies:

(i) A chaque paire d'un vecteur x de $\mathfrak{R}$ et d'un vecteur u^* de $\mathfrak{R}^*$ correspond un scalaire appelé produit intérieur et noté par u^*x; il est une fonctionnelle linéaire dans chacun des espaces $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$;

(ii) $u^*=o^*$ si $u^*x=0$ pour tous les $x\in\mathfrak{R}$; et $x=o$ si $u^*x=0$ pour tous les $u^*\in\mathfrak{R}^*$.

On peut prendre, par exemple, pour $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$ le même espace $C[0, 1]$ formé de toutes les fonctions continues dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, le produit intérieur u^*x étant

$$u^*x=\int_0^1 x(t)u^*(t)dt.$$

Théorème 24.1. *Si la dimension de $\mathfrak{R}$ est plus grande que 1, la dimension de l'espace $\mathfrak{R}^*$ conjugué à $\mathfrak{R}$ est aussi plus grande que 1. Si $x\in\mathfrak{R}$, il existe un vecteur $x\neq o$ tel que $u^*x=0$; si $u^*\in\mathfrak{R}^*$, il existe un vecteur $x\neq o$ tel que $u^*x=0$.*

Soient a_1 et a_2 deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathfrak{R}$. Il existe dans $\mathfrak{R}^*$ un vecteur b_1^* tel que $b_1^*a_1\neq 0$. On peut déterminer λ de manière que l'on ait

$$b_1^*(\lambda a_1+a_2)=0\ .$$

λa_1+a_2 n'étant pas égal à o, il existe dans $\mathfrak{R}^*$ un vecteur b_2^* tel que $b_2^*(\lambda a_1+a_2)=0$. b_1^* et b_2^* sont alors linéairement indépendants. La dimension de $\mathfrak{R}^*$ est donc plus grande que 1.

Si $b_1^*x\neq 0$, on peut déterminer λ de manière que $(b_1^*\lambda+b_2^*)x=0$. $u^*=b_1^*\lambda+b_2^*$ est différent de o^* et satisfait à la relation $u^*x=0$.

On peut démontrer de même, étant donné un vecteur u^*, l'existence d'un vecteur $x\neq o$ tel que $u^*x=0$.

25. Nous dirons que x et u^* sont orthogonaux et écrirons $x\perp u^*$ ou $u^*\perp x$ si leur produit intérieur est nul: $u^*x=0$. De même, nous dirons que deux sous-espaces A et B^* sont orthogonaux et écrirons $A\perp B^*$ ou $B^*\perp A$ si le produit intérieur d'un vecteur quelconque de A et d'un vecteur quelconque de B^* est toujours nul. On définira de même l'orthogonalité d'un vecteur de $\mathfrak{R}$ (ou de $\mathfrak{R}^*$) et d'un sous-espace de $\mathfrak{R}^*$ (ou de $\mathfrak{R}$).

Théorème 25.1. *A étant un ensemble dans $\mathfrak{R}$, l'ensemble*

$$B^*=\{y^*\in\mathfrak{R};\ y^*\perp x \text{ pour tous les } x\in A\}$$

est un sous-espace dans $\mathfrak{R}^*$.

Soient, en effet, y_1^* et y_2^* des vecteurs quelconques de B^*. Si $x\in A$, on a

$$y_1^*x=0\ , \qquad y_2^*x=0\ .$$

La linéarité du produit intérieur y^*x par rapport à y^* entraîne

$$(y_1^*\alpha+y_2^*\beta)x=\alpha(y_1^*x)+\beta(y_2^*x)=0\ .$$

$y_1^*\alpha+y_2^*\beta$ appartient donc à B^*.

Nous désignerons le sous-espace B^* par ${}_\perp A$. On définit de même le sous-espace $B_\perp{}^*$ par

$$B_\perp{}^*=\{x\in\mathfrak{R};\ x\perp y^* \text{ pour tous les } y^*\in B^*\}\ .$$

Théorème 25.2. *A et B étant des sous-espaces, on a*

$${}_\perp\{A\oplus B\}={}_\perp A\odot{}_\perp B\ , \qquad {}_\perp\{A\odot B\}\supseteq{}_\perp A\oplus{}_\perp B\ .$$

D'une manière plus générale, si

$$A=\sum_{E\in\mathfrak{F}}\oplus E\ , \qquad B=\prod_{E\in\mathfrak{F}}\odot E\ ,$$

on a

$$ {}_\perp A = \prod_{E\in\mathfrak{F}} \odot {}_\perp E , \qquad {}_\perp B \supseteqq \sum_{E\in\mathfrak{F}} \oplus {}_\perp E . $$

Soit $u^* \perp A$. Quel que soit $E\in\mathfrak{F}$, A contenant E, on a $u^*\perp E$. Réciproquement si $u^*\perp E$ pour $E\in\mathfrak{F}$, on a évidemment $u^*\perp A$. On a donc la première des relations à démontrer.

Si $u_k^*\perp E_k$ $(k=1, \cdots, n)$, on a $u_k^*\perp B$, et par suite $\sum u_k^*\perp B$. On en conclut que l'on a la deuxième des relations à démontrer.

26. Si l'on désigne par $\tilde{A}$, $\tilde{B}^*$ les sous-espaces

$$ \tilde{A} = \{{}_\perp A\}_\perp , \qquad \tilde{B}^* = {}_\perp\{B_\perp{}^*\} , $$

on a évidemment $\tilde{A}\supseteqq A$, $\tilde{B}^*\supseteqq B^*$.

Théorème 26.1. *A étant un ensemble quelconque dans $\mathfrak{R}$, le sous-espace $B^*={}_\perp A$ satisfait à la relation $\tilde{B}^*=B^*$.*

Il est évident que $A_1\supseteqq A_2$ entraîne ${}_\perp A_1 \subseteqq {}_\perp A_2$. Puisque $B_\perp{}^*=\tilde{A}\supseteqq A$, on a

$$ \tilde{B}^* = {}_\perp\{B_\perp{}^*\} \subseteqq {}_\perp A = B^* . $$

Or, on sait que l'on a $\tilde{B}^*\supseteqq B^*$. On a donc la conclusion du théorème.

Théorème 26.2. *A et B étant deux sous-espaces tels que $\tilde{A}=A$, $\tilde{B}=B$, l'intersection $C=A\odot B$ remplit aussi la condition $\tilde{C}=C$.*

D'une manière plus générale, si $\mathfrak{R}$ est une famille de sous-espaces E satisfaisant à la relation $\tilde{E}=E$, l'intersection $D=\bigcap_{\mathfrak{F}} E$ satisfait aussi à la relation $\tilde{D}=D$.

En effet, $D\subseteqq E$ entraîne ${}_\perp D\supseteqq {}_\perp E$. Par suite $\tilde{D}\subseteqq\tilde{E}=E$. Par conséquent,

$$ D \subseteqq \tilde{D} \subseteqq \bigcap_{\mathfrak{F}} E = D . $$

Théorème 26.3. *Si*

$$ A \obar B = \mathfrak{R} , \qquad A^* \obar B^* = \mathfrak{R}^* , \qquad A \perp B^* , \qquad B \perp A^* , $$

on a

$$ {}_\perp A = B^* , \qquad {}_\perp B = A^* , \qquad A_\perp{}^* = B , \qquad B_\perp{}^* = A , $$
$$ \tilde{A} = A , \qquad \tilde{B} = B , \qquad \tilde{A}^* = A^* , \qquad \tilde{B}^* = B^* . $$

On a en effet,

$$ \{o^*\} = {}_\perp\{A \obar B\} = {}_\perp A \odot {}_\perp B , \qquad {}_\perp A \supseteqq B^* , \qquad {}_\perp B \supseteqq A^* . $$

Un vecteur u^* de ${}_\perp A$ peut s'écrire $u^*=u_1^*+u_2^*$, $u_1^*\in A^*$, $u_2^*\in B^*$. $u^*\perp A$, $u_2^*\perp A$ entraînent $u_1^*\perp A$. Or, $u_1^*\perp B$. On a donc $u_1^*=o^*$, par suite ${}_\perp A=B^*$.

On obtient de même les trois autres relations de la première ligne. Ces relations entraînent immédiatement les quatre relations de la deuxième ligne.

27. Considérons deux systèmes de vecteurs $\{a_1, \cdots, a_n\}$ et $\{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ tels que le déterminant

$$ \Delta\begin{pmatrix} a_1 & \cdots\cdots & a_n \\ b_1^* & \cdots\cdots & b_n^* \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_1^* a_1 & \cdots\cdots & b_n^* a_1 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_1^* a_n & \cdots\cdots & b_n^* a_n \end{vmatrix} \tag{27.1} $$

n'est pas nul. La valeur de ce déterminant ne se change pas quand on remplace la dernière ligne par $b_1^*x, \cdots, b_n^*x$, x désignant le vecteur

$$x = a_n - \lambda_1 a_1 - \cdots - \lambda_{n-1} a_{n-1} .$$

Par suite, ces n scalaires ne sont pas tous nul. Si donc on a une relation

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = o ,$$

on a $\lambda_n = 0$. On voit de même $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. Par conséquent, on a le

Théormèe 27.1. *Si*

$$\Delta\begin{pmatrix} a_1 & \cdots\cdots & a_n \\ b_1^* & \cdots\cdots & b_n^* \end{pmatrix} \neq 0 , \tag{27.2}$$

les deux familles de vecteurs: $\{a_1, \cdots, a_n\}$ et $\{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ *sont libres.*

Soient A et B^* les sous-espaces dont les bases sont respectivement $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1^*, \cdots, b_n^*$. Si l'on a (27.2), aucun vecteur $\neq o$ de A ne peut être orthogonal à B^*, car les relations

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n , \qquad b_j^* x = 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

sont équivalentes à un système d'équations homogènes en $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$:

$$\lambda_1 (b_j^* a_1) + \cdots + \lambda_n (b_j^* a_n) = 0 \qquad (j = 1, \cdots, n) .$$

De même, aucun vecteur $\neq o^*$ de B^* ne peut être orthogonal à A.

La réciproque est aussi vraie, car, si le déterminant au premier membre de (27.2) est 0, on peut déterminer une combinaison linéaire de $a_1, \cdots, a_n$ de manière qu'elle soit orthogonale à $b_1^*, \cdots, b_n^*$. Par suite on a le

Théorème 27.2. *Soient A et B^* les sous-espaces dont les bases sont respectivement* $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1^*, \cdots, b_n^*$. *Pour que A et B^* soient conjugués l'un à l'autre, il faut et il suffit que l'on ait* (27.2).

Si l'on a (27.2), on peut déterminer les scalaires $\lambda_{j1}, \cdots, \lambda_{jn}$ de manière que

$$(b_1^* \lambda_{j1} + \cdots + b_n^* \lambda_{jn}) a_k = \delta_{jk} \qquad (k = 1, \cdots, n),$$

car le déterminant des coefficients est égal au premier membre de (27.2). Si l'on pose

$$c_j^* = b_1^* \lambda_{j1} + \cdots + b_n^* \lambda_{jn} ,$$

on a $c_j^* a_k = \delta_{jk}$ $(j, k = 1, \cdots, n)$. Par suite,

Théorème 27.3. *Si l'on a* (27.2), *on peut déterminer les n combinaisons linéaires* $c_1^*, \cdots, c_n^*$ de $b_1^*, \cdots, b_n^*$ de *manière que lon ait* $c_j^* a_k = \delta_{jk}$ $(j, k = 1, \cdots, n)$.

Démontrons maintenant le

Théorème 27.4. *S'il existe dans $\mathfrak{R}$ n vecteurs linéairement indépendants $a_1, \cdots, a_n$, il existe dans $\mathfrak{R}^*$ n vecteurs $b_1^*, \cdots, b_n^*$ tels que*

$$b_j^* a_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) , \\ 1 & (j = k) . \end{cases}$$

Il suffit de prouver l'existence de n vecteurs $b_1^*, \cdots, b_n^*$ tels que l'on a (27.2).

Il existe un vecteur b_1^* tel que $b_1^* a_1 \neq 0$. Supposons donc que l'on ait défini $m (< n)$ vecteurs $b_1^*, \cdots, b_m^*$ de manière que l'on ait

$$\varDelta\begin{pmatrix} a_1 & \cdots\cdots & a_m \\ b_1{}^* & \cdots\cdots & b_m{}^* \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Il suffit de montrer que l'on peut trouver un vecteur $b_{m+1}{}^*$ de manière que

$$\varDelta\begin{pmatrix} a_1 & \cdots\cdots & a_m & a_{m+1} \\ b_1{}^* & \cdots\cdots & b_m{}^* & b_{m+1}{}^* \end{pmatrix} \neq 0$$

Supposons le contraire. On aurait, en désignant par u^* un veteur quelconque de $\mathfrak{R}$,

$$\varDelta\begin{pmatrix} a_1 & \cdots\cdots & a_m & a_{m+1} \\ b_1{}^* & \cdots\cdots & b_m{}^* & u^* \end{pmatrix} = 0 .$$

On peut déterminer les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ de manière que

$$\lambda_1 b_j{}^* a_1 + \cdots + \lambda_m b_j{}^* a_m = b_j{}^* a_{m+1} \qquad (j=1, \cdots, m) .$$

On aurait, d'après l'hypothèse,

$$\lambda_1 u^* a_1 + \cdots + \lambda_m u^* a_m = u^* a_{m+1} .$$

Le vecteur $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m - a_{m+1}$ serait donc orthogonal à tous les vecteurs $u^* \in \mathfrak{R}^*$. Ceci entraînerait, d'après (ii),

$$a_{m+1} = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m ,$$

ce qui est impossible, car $a_1, \cdots, a_{m+1}$ sont linéairement indépendants.

28. Théorème 28.1. *Supposons* (27.2). *Si A et B^* sont les sous-espaces, dont les bases sont respectivement $\{a_1, \cdots, a_n\}$ et $\{b_1{}^*, \cdots, b_n{}^*\}$, on a*

$$A \oplus B_\perp{}^* = \mathfrak{R} , \qquad {}_\perp A \oplus B^* = \mathfrak{R}^* .$$

Démontrons, par exemple, la première relation.

Un vecteur quelconque x de A est une combinaison linéaire de $a_1, \cdots, a_n$:

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n .$$

Si $x \in B_\perp{}^*$, on a $b_j{}^* x = 0$ $(j=1, \cdots, n)$, qui peuvent s'écrire

$$\lambda_1 (b_j{}^* a_1) + \cdots + \lambda_n (b_j{}^* a_n) = 0 \qquad (j=1, \cdots, n) .$$

On en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc $A \odot B_\perp{}^* = \{o\}$.

Soit x un vecteur quelconque de $\mathfrak{R}$. On peut déterminer les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de manière que l'on ait

$$\lambda_1 (b_j{}^* a_1) + \cdots + \lambda_n (b_j{}^* a_n) = b_j{}^* x \qquad (j=1, \cdots, n) .$$

Si l'on pose

$$x' = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n , \qquad x'' = x - x' ,$$

on a $b_j{}^* x'' = 0$ $(j=1, \cdots, n)$. Par suite on a $x'' \in B_\perp{}^*$, $x \in A \oplus B_\perp{}^*$.

Théorème 28.2. *Dans le cas d'un sous-espace A* (ou B^*) *à un nombre fini de dimensions, on a $\tilde{A} = A$* (ou $\tilde{B}^* = B^*$).

Un vecteur quelconque x de $\mathfrak{R}$ est la somme d'un vecteur x' de A et d'un vecteur x'' de $B_\perp{}^*$. Si x est orthogonal à ${}_\perp A$, x'' est aussi orthogonal à ${}_\perp A$. Mais il est orthogonal à B^*. Il est donc orthogonal à $B^* \oplus {}_\perp A = \mathfrak{R}^*$. On doit donc avoir $x'' = o$. Par suite $x = x' \in A$. C.Q.F.D.

On ne peut dire que $\tilde{A}=A$ et $\tilde{B}=B$ entrainent $\tilde{C}=C$ pour $C=A\oplus B$. Mais on a le

Théorème 28.3. *Si* $\tilde{A}=A$, $\tilde{B}=B$, $C=A\oplus B$ *et si de plus* dim B *est finie, on a* $\tilde{C}=C$.

Il suffit de considérer le cas où B est monogène, c'est-à-dire engendré par un seul élément b. Soit $C=A\obar B$ (le cas de $B\subseteqq A$ étant trivial). Puisque $C\supset A$, on a ${}_{\perp}A\supseteqq{}_{\perp}C$. Mais si ${}_{\perp}C={}_{\perp}A$, on aurait $\tilde{A}=\tilde{C}\supseteqq C\supset A$ contrairement à l'hypothèse. On a donc ${}_{\perp}C\subset{}_{\perp}A$. ${}_{\perp}A$ contient un vecteur b^* non orthogonal à C. On a nécessairement $b^*b\neq 0$. Soit u^* un vecteur quelconque de ${}_{\perp}A$. Si $u^*b=0$, u^* est orthogonal à C. Si $u^*b\neq 0$, on peut trouver un scalaire λ tel que $(u^*+b^*\lambda)b=0$. $u^*+b^*\lambda$ est alors orthogonal à C. Donc

$$ {}_{\perp}A={}_{\perp}C\obar B^* , $$

B^* étant le sous-espace engendré par b^*.

On a de même $\tilde{C}=\tilde{A}\obar B$. Or, le second membre est $C=A\obar B$. On a donc $\tilde{C}=C$.

29. Considérons un sous-espace A dont la codimension n est finie. Par suite, il existe un sous-espace supplémentaire B à n dimensions. Aucun vecteur $x^*(\neq o^*)$ de $B^*={}_{\perp}A$ ne peut être orthogonal à B. On en conclut que la dimension m de B^* ne peut dépasser n.

En effet, si $b_1{}^*, \cdots, b_{n+1}^*$ appartiennent à B^*, il existe une combinaison linéaire $b_1{}^*\lambda_1+\cdots+b_{n+1}^*\lambda_{n+1}$ orthogonale à B. Elle est orthogonale à A. On a donc

$$ b_1{}^*\lambda_1+\cdots+b_{n+1}^*\lambda_{n+1}=o^* $$

et $b_1{}^*, \cdots, b_{n+1}^*$ sont linéairement dépendants.

Si $m<n$, il existe une combinaison linéaire $\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_n b$ orthogonale à B^*. Par suite $\tilde{A}\supset A$. Si donc $\tilde{A}=A$, on a nécessairement $m=n$.

Si $\{b_1, \cdots, b_n\}$ et $\{b_1{}^*, \cdots, b_n{}^*\}$ sont les bases de B et B^*, le déterminant

$$ \varDelta\begin{pmatrix} b_1 & \cdots\cdots & b_n \\ b_1{}^* & \cdots\cdots & b_n{}^* \end{pmatrix} $$

n'est pas nul. Par suite, d'après le théorème 28.1, $A^*={}_{\perp}B$ est un sous-espace supplémentaire de B^*. On a donc le

Théorème 29.1. *Si* A *est un sous-espace tel que* $\tilde{A}=A$ *et que* $n=$ codim A *est finie,* ${}_{\perp}A$ *est un sous-espace dont la dimension est* n. *Si* $A\obar B=\mathfrak{R}$, *on a* ${}_{\perp}A\obar{}_{\perp}B=\mathfrak{R}^*$.

Démontrons maintenant le

Théorème 29.2. *Soit* A *un sous-espace dont la codimension* n *est finie. Si la dimension de* ${}_{\perp}A=B^*$ *est égale à* n, *on a* $\tilde{A}=A$.

Prenons un sous-espace supplémentaire B de A. Si $\{b_1, \cdots, b_n\}$ et $\{b_1{}^*, \cdots, b_n{}^*\}$ sont les bases de B et de B^*, on a

$$ \varDelta\begin{pmatrix} b_1 & \cdots\cdots & b_n \\ b_1{}^* & \cdots\cdots & b_n{}^* \end{pmatrix}\neq 0 $$

et B ne contient pas de vecteur $\neq o$ orthogonal à B^*, d'où il découle la conclusion du théorème.

II. Endomorphismes d'ordre fini

30. Soit L un endomorphisme de $\mathfrak{R}$. Si l'on a

$$u^*(Lx)=v^*x$$

pour tous les vecteurs $x\in\mathfrak{R}$, le vecteur v^* est déterminé d'une manière unique.

Supposons, en effet, que l'on ait aussi

$$u^*(Lx)=w^*x\,.$$

On a alors

$$(v^*-w^*)x=0$$

pour tous les $x\in\mathfrak{R}$, ce qui exige, d'après (ii), $v^*=w^*$. S'il existe un tel vecteur v^* pour un vecteur quelconque $u^*\in\mathfrak{R}^*$, nous le désignons par $v^*=u^*L$. L est alors défini dans $\mathfrak{R}^*$. Cet endomorphisme L de $\mathfrak{R}^*$ sera appelé l'adjoint de l'endomorphisme L de $\mathfrak{R}$.

Nous ne considérerons que l'endomorphisme admettant son adjoint. On a alors l'associativité:

$$(u^*L)x=u^*(Lx)\,,$$

et l'on peut supprimer les parenthèses sans aucune confusion à craindre.

Si L et H sont de tels endomorphismes, $L+H$, LH et αL le sont aussi.

En effet,

$$\begin{aligned}u^*((L+H)x)&=u^*(Lx+Hx)\\&=u^*(Lx)+u^*(Hx)\\&=(u^*L)x+(u^*H)x\\&=(u^*L+u^*H)x\,.\end{aligned}$$

Donc, l'endomorphisme $L+H$ défini dans $\mathfrak{R}$ admet son adjoint et l'on a

$$u^*(L+H)=u^*L+u^*H\,.$$

On voit de même que l'endomorphisme LH et αL définis dans $\mathfrak{R}$ admet leurs adjoints et que l'on a

$$u^*(LH)=(u^*L)H,\qquad u^*(\alpha L)=(u^*L)\alpha\,.$$

31. L'endomorphisme O défini par $Ox=o$ admet son adjoint et l'on a $u^*O=o^*$. L'endomorphisme I défini par $Ix=x$ admet son adjoint et l'on a $u^*I=u^*$.

Donnons un autre exemple de l'endomorphisme qui admet son adjoint.

L'expression ab^* est un endomorphisme défini par

$$(ab^*)x=(b^*x)a,\qquad u^*(ab^*)=b^*(u^*a)\,.$$

Le corps $\mathfrak{K}$ étant supposé commutatif, on verra sans peine

$$(u^*a)(b^*x)=u^*((ab)^*x)=u^*(a(b^*x))=((u^*a)b^*)x=(u^*(ab^*))x\,.$$

On peut donc écrire u^*ab^*x en supprimant les parenthèses(1).

L'expression

$$L=a_1b_1^*+\cdots+a_nb_n^* \tag{31.1}$$

admet aussi son adjoint. Nous supposons que $\{a_1, \cdots, a_n\}$ et $\{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ soient des familles libres.

Lx est une combinaison linéaire de $a_1, \cdots, a_n$. D'après le théorème 27.3, il existe un système de n vecteurs $c_1, \cdots, c_n$ tels que $b_j^*c_k=\delta_{jk}$ $(j, k=1, \cdots, n)$. On a alors $Lc_k=a_k$. Donc $N_1=L\{\mathfrak{R}\}$ est le sous-espace dont $\{a_1, \cdots, a_n\}$ est une base.

Si $Lx=o$, on a $b_j^*x=0$ $(j=1, \cdots, n)$ et réciproquement. Donc $N^1=L^{-1}\{o\}$ est $B_\perp^*$, B^* étant le sous-espace dont $\{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ est une base. Par suite

Théorème 31.1. *Dans le cas de l'endomorphisme* L *défini par* (31.1), *on a*

$$\dim N_1=\operatorname{codim} N^1=n$$

et $\mu=\nu$ *est fini.*

Considérons maintenant un endomorphisme L tel que $\dim N_1=n$ est finie.

Soit $\{a_1, \cdots, a_n\}$ une base de N_1. Les n vecteurs $c_1, \cdots, c_n$, tels que $Lc_k=a_k$ $(k=1, \cdots, n)$, forment une famille libre.

Considérons un vecteur quelconque $x\in\mathfrak{R}$. Lx étant une combinaison linéaire de $a_1, \cdots, a_n$, on peut écrire

$$Lx=\alpha_1a_1+\cdots+\alpha_na_n\,.$$

On a alors

$$L(x-\alpha_1c_1-\cdots-\alpha_nc_n)=o\,,$$

de sorte que, si l'on désigne par C le sous-espace dont une base est $\{c_1, \cdots, c_n\}$, on a $\mathfrak{R}=C\oplus N^1$. La codimension de N^1 est donc n.

Prenons n vecteurs $a_1^*, \cdots, a_n^*$ tels que $a_j^*a_k=\delta_{jk}$ $(j, k=1, \cdots, n)$. Les n vecteurs a_j^*L $(j=1, \cdots, n)$ sont orthogonaux à N^1. Puisque

$$(a_j^*L)c_k=a_j^*a_k=\delta_{jk}\,,$$

ces n vecteurs sont linéairement indépendants. Par suite ${}_\perp N^1$ est un sous-espace dont la dimension est égale à n, et l'on a $\tilde{N}^1=N^1$.

Posons

$$b_1^*=a_1^*L, \cdots, \qquad b_n^*=a_n^*L\,,$$
$$L'=a_1b_1^*+\cdots+a_nb_n^*\,.$$

On a

$$L'c_k=\sum_j a_jb_j^*c_k=\sum_j a_ja_j^*Lc_k=\sum_j a_ja_j^*a_k=a_k\,.$$

Par suite, on a $L=L'$ dans C. Mais on a évidemment $L'x=o$ pour $x\in N^1$. On a donc $L=L'$ dans tout l'espace $\mathfrak{R}$. Par conséquent, on a le

Théorème 31.2. *Si* L *est un endomorphisme tel que* $\dim N_1=n$ *est finie, on a* (31.1) *où* $\{a_1, \cdots, a_n\}$ *et* $\{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ *sont des familles libres convenablement choisies.*

---

(1) Dorénavant, nous supposerons qu'un vecteur et un scalaire soient permutables; ceci ne causera aucune confusion parce que nous supposons le corps $\mathfrak{K}$ commutatif. On a alors $(ab^*)x=a(b^*x)$, et on peut écrire ab^*x en supprimant les parenthèses.

Si codim $N^1=n$ est finie, un sous-espace supplémentaire C de N^1 est à n dimensions. L fait correspondre N_1 à C d'une manière biunivoque. Par suite dim $N_1=n$ et le théorème 31.2 entraîne le

Théorème 31.3. *Si L est un endomorphisme tel que* codim $N^1=n$ *est finie, on a* (31.1), *où* $\{a_1, \cdots, a_n\}$ *et* $\{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ *sont des familles libres convenablement choisies.*

32. Revenons au cas général. Nous désignerons par ${}^nN^*$, ${}_nN^*$ les sous-espaces définis par

$$ {}^nN^*=\{o^*\}L^{-n}=\{u^*\in\mathfrak{R};\ u^*L^n=o^*\}\ , $$
$$ {}_nN^*=\{\mathfrak{R}\}L^n=\{u^*L^n;\ u^*\in\mathfrak{R}^*\}\ . $$

Supposons, par exemple, que $u^*\in{}^nN^*$, $x\in N_n$. Il existe un vecteur $y\in\mathfrak{R}$ tel que $L^ny=x$ et l'on a

$$ u^*x=u^*(L^ny)=(u^*L^n)y=o^*y=0\ . $$

On a donc le

Théorèm 32.1. *On a* ${}^nN^*\perp N_n$, ${}_nN^*\perp N^n$ $(n=1, 2, \cdots)$.

Il en résulte que l'on a

$$ {}^nN_\perp^*\supseteqq N_n,\quad {}_nN^*\supseteqq N^n,\quad {}^nN^*\subseteqq{}_\perp N_n,\quad {}_nN^*\subseteqq{}_\perp N^n\ . $$

Nous allons montrer que l'on a le

Théorème 32.2. *On a* ${}_nN_\perp^*=N^n$, ${}^nN^*={}_\perp N_n$ $(n=1, 2, \cdots)$.

Il suffit de montrer que si $x\perp{}_nN^*$, x appartient à N^n. Quel que soit $u^*\in\mathfrak{R}^*$, on a $u^*L^n\in{}_nN^*$. Par suite $(u^*L^n)x=0$, qui peut encore s'écrire $u^*(L^nx)=0$. u^* étant un vecteur quelconque de $\mathfrak{R}^*$, on doit avoir $L^nx=o$.

C.Q.F.D.

${}_\perp N^n\supseteqq{}_nN^*$ entraîne $\tilde{N}^n\subseteqq{}_nN_\perp^*=N^n$. On a donc le

Théorème 32.3. *On a* $\tilde{N}^n=N^n$, ${}^n\tilde{N}^*={}^nN^*$ $(n=1, 2, \cdots)$.

Ce théorème peut être considéré comme un cas particulier du

Théorème 32.4. *Si* $\tilde{A}=A$, $B=L^{-1}\{A\}$, *on a* $\tilde{B}=B$.

Soit un vecteur quelconque $u^*\in{}_\perp A$. Si $y\in B$, on a $Ly\in A$, $u^*Ly=0$, d'où $u^*L\in{}_\perp B$. Par suite

$$ \{{}_\perp A\}L\subseteqq{}_\perp B\ . $$

On en déduit

$$ \{\{{}_\perp A\}L\}_\perp\supseteqq\tilde{B}\ . $$

Si x appartient au premier membre, on a $u^*Lx=0$ pour $u^*\in{}_\perp A$, ce qui entraîne $Lx\in\tilde{A}=A$. On a donc $x\in B$. C.Q.F.D.

D'après le théorème 32.1, si $N_1=\mathfrak{R}$, un vecteur quelconque de ${}^1N^*$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathfrak{R}$. Donc ${}^1N^*$ ne contient que o^*.

Théorème 32.5. $N_1=\mathfrak{R}$ *entraîne* ${}^1N^*=\{o^*\}$; ${}_1N^*=\mathfrak{R}^*$ *entraîne* $N_1=\{o\}$.

De même, si $N^1\oplus N_1=\mathfrak{R}$, on a

$$ \{o^*\}={}_\perp\mathfrak{R}={}_\perp\{N^1\oplus N_1\}={}_\perp N^1\odot{}_\perp N_1\supseteqq{}_1N^*\odot{}^1N^*\ . $$

Par suite

Théorème 32.6. $N^n\oplus N_n=\mathfrak{R}$ *entraîne* ${}^nN^*\odot{}_nN^*=\{o^*\}$; ${}^nN^*\oplus{}_nN^*=\mathfrak{R}$ *entraîne* $N^n\odot N_n=\{o\}$.

On en déduit sans peine le

Théorème 32.7. *S'il existe des entier finis* ν *et* ν' *tels que*

$$\{o\}=N^0\subset N^1\subset\cdots\subset N^\nu=N^{\nu+1}=\cdots,$$
$$\mathfrak{R}=N_0\supset N_1\supset\cdots\supset N_\nu=N_{\nu+1}=\cdots;$$
$$\{o^*\}={}^0N^*\subset{}^1N^*\subset\cdots\subset{}^{\nu'}N^*={}^{\nu'+1}N^*=\cdots,$$
$$\mathfrak{R}^*={}_0N^*\supset{}_1N^*\supset\cdots\supset{}_{\nu'}N^*={}_{\nu'+1}N^*=\cdots.$$

on a $\nu=\nu'$.

En effet, puisque $N^\nu\oplus N_\nu=\mathfrak{R}$, on a ${}^\nu N^*\odot{}_\nu N^*=\{o^*\}$. Par suite $\nu'\leqq\nu$. On a de même $\nu'\geqq\nu$.

Nous supposerons désormais dans ce chapitre l'ordre ν de l'endomorphisme fini, soit dans $\mathfrak{R}$ soit dans $\mathfrak{R}^*$.

Les théorèmes 26.3 et 32.1 entraînent immédiatement le

Théorème 32.8. *On a* $\tilde{N}_\nu=N_\nu$, ${}_\nu\tilde{N}^*={}_\nu\tilde{N}^*$.

Le théorème 32.4 entraîne ensuite le

Théorème 32.9. *Si*

$$A^k=N^k\oplus N_{\nu-k}, \qquad {}^kA^*={}^kN^*\oplus{}_{\nu-k}N^*,$$

on a

$$\tilde{A}^k=A^k, \qquad {}^k\tilde{A}^*={}^kA^*.$$

33. Nous avons remarqué au n° 20 que l'endomorphisme L d'ordre fini ν peut être représenté par une matrice (20.1). Remarquons que cette même matrice peut représenter l'endomorphisme adjoint. Pour cela, il suffit de désigner le vecteur de $\mathfrak{R}^*$ par une matrice avec une seule ligne dont les éléments sont des vecteurs de ${}_0^1N^*$, ${}_1^1N^*$, ${}_0^2N^*$, ${}_2^1N^*$, ${}_1^2N^*$, ${}_0^3N^*$, $\cdots$, ${}_{\nu-1}^{\ \ 1}N^*$, $\cdots$, ${}_{\ 1}^{\nu-1}N^*$, ${}_0^\nu N^*$, ${}_\nu N^*$ rangés dans cet ordre.

Si un endomorphisme K satisfaisant à une équation algébrique (23.1) dans $\mathfrak{R}$ admet son adjoint, l'équation (23.1) est satisfaite dans $\mathfrak{R}^*$.

Car, le premier membre de (23.1) représente un endomorphisme de $\mathfrak{R}$ admettant son adjoint. Il est égal à O dans $\mathfrak{R}$. Il est donc égal à O dans $\mathfrak{R}^*$.

Par suite,

Théorème 33.1. *Si un endomorphisme K de $\mathfrak{R}$ satisfaisant à une équation algébrique* (23.1) *admet son adjoint, celui-ci satisfait à la même équation dans $\mathfrak{R}^*$. Elle peut être représentée par une même matrice* (21.2) *soit dans $\mathfrak{R}$ soit dans $\mathfrak{R}^*$.*

III. Le cas où l'espace principal a un nombre fini de dimensions

34. Puisque

$${}_k^jN^*\subseteqq{}^jN^*\odot{}_kN^*, \qquad {}^jN^*\perp N_j, \qquad {}_kN^*\perp N^k,$$

on a ${}_k^jN^*\perp N_q^p$ pour $p\leqq k$ ou $q\geqq j$.

Considérons en particulier le sous-espace ${}_{\nu-1}^{\ \ 1}N^*$. Il est orthogonal à tous les N_q^p et N_ν sauf N_0^ν. Si un vecteur $u^*\in{}_{\nu-1}^{\ \ 1}N$ est orthogonal à N_0^ν, il est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathfrak{R}$. On a donc $u^*=o^*$. Par suite aucun vecteur $\neq o^*$ de ${}_{\nu-1}^{\ \ 1}N^*$ ne peut être orthogonal à N_0^ν.

Supposons qu'un vecteur u^* de ${}_{\nu-k}^{\;k}N^*$ soit orthogonal à $N_{k-1}^{\nu-k+1}$. Un vecteur quelconque de celui-ci peut s'écrire $L^{k-1}x$, $x\in N_0^{\nu}$. On a par hypothèse

$$0=u^*(L^{k-1}x)=(u^*L^{k-1})x\,.$$

u^*L^{k-1} appartient à ${}_{\nu-1}^{\;1}N^*$. x désignant un vecteur quelconque de N_0^{ν}, on a $u^*L^{k-1}=o^*$, ce qui exige $u^*=o^*$. On a donc le

Théorème 34.1. *${}_{\nu-k}^{\;k}N^*$ et $N_{k-1}^{\nu-k+1}$ sont conjugués l'un à l'autre.*

Si donc l'un des sous-espaces $N_{\nu-k}^{k}$ et ${}_{\nu-k}^{\;k}N^*$ $(k=1,\cdots,\nu)$ a un nombre fini de dimensions, les autres ont le même nombre de dimensions.

35. Considérons maintenant le cas où l'espace principal N^{ν} de l'endomorphisme L a un nombre fini de dimensions.

D'après le théorème 34.1, ${}_0^{\nu}N^*$ et N_0^{ν} ont le même nombre m_{ν} de dimensions et on peut en extraire les vecteurs ${}_pa^*$ et a_q de manière que l'on ait

$${}_pa^*L^{\nu-1}a_q=\delta_{pq}\qquad(p,\,q=1,\,\cdots,\,m_{\nu})\,.$$

Supposons, d'une manière générale, que $N_0^{\,r}$ et ${}_0^{\,r}N^*$ aient le même nombre m_r de dimensions pour $r>j$ et que l'on puisse en extraire les vecteurs ${}_p^{\,r}a^*$, $a_p^{\,r}$ $(p=1,\cdots,m_r)$ tels que

$$\text{(35.1)}\qquad {}_p^{\,r}a^*L^{r-1}a_q^{\,r}=\delta_{pq}\qquad(p,\,q=1,\,\cdots,\,m_r)\,.$$

Si N_{j-1}^{1} n'est pas orthogonal à ${}_q^{\,p}N^*$, on a $p>j-1$, $q=0$. On peut faire correspondre à chaque vecteur x de N_{j-1}^{1} un seul vecteur y tel que

$$y-x\in N_j^{\,1}\mathbin{\text{⦶}}\cdots\mathbin{\text{⦶}}N_{\nu-1}^{1}\qquad y\perp{}_0^{\,r}N^*\qquad(r>j)\,.$$

En effet, y peut s'écrire

$$y=x+\sum_{r=j+1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m_r}\lambda_{rq}L^{r-1}a_q^{\,r}$$

et l'orthogonalité de y à ${}_k^{\,s}a^*(s>j)$ entraîne

$$\lambda_{sk}+\sum_{r<s}\sum_{q=1}^{m_r}\lambda_{rq}\cdot{}_k^{\,s}a^*L^{r-1}a_q^{\,r}+{}_k^{\,s}a^*x=0\,.$$

Le système de ces $m_{j+1}+\cdots+m_{\nu}$ équations en $\lambda_{sk}(k=1,\cdots,m_s;\ s=j+1,\cdots,\nu)$ admet une seule solution.

Soit $\{L^{j-1}b_k;\ k=1,\cdots,m_j\}$ une base de N_{j-1}^{1}, les b_k représentant les vecteurs de $N_0^{\,j}$. Le vecteur y correspondant à $x=L^{j-1}b_k$ peut s'écrire $L^{j-1}a_k$ où

$$a_k=b_k+\sum_{r=j+1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m_r}\lambda_{krq}L^{r-j}a_q^{\,r}\,.$$

Par suite,

$$a_k-b_k\in D_1^{\,j}\,.$$

Si N' est le sous-espace engendré par $a_k(k=1,\cdots,m_j)$, on a

$$\text{(35.2)}\qquad N^{j}=N'\mathbin{\text{⦶}}\{N^{j-1}\oplus D_1^{\,j}\}\,.$$

En effet, si

$$\sum_k\alpha_ka_k\in N^{j-1}\oplus D_1^{\,j}\,,$$

on a

$$\sum_k \alpha_k b_k \in N_0{}^j \odot \{N^{j-1} \oplus D_1{}^j\} = \{o\} ,$$

d'où $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Par suite

$$N' \odot \{N^{j-1} \oplus D_1{}^j\} = \{o\} .$$

Alors l'égalité à démontrer est évidente.

Cette égalité montre que l'on peut prendre N' pour $N_0{}^j$. Dans ce cas N^1_{j-1} est orthogonal à tous les ${}_q{}^pN^*$ sauf ${}_0{}^jN^*$. Si un vecteur de N^1_{j-1} est orthogonal à ${}_0{}^jN^*$, il est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathfrak{N}^*$. Il est donc o.

De même, si l'on prend convenablement ${}_0{}^jN^*$, ${}_{j-1}^{\;1}N^*$ est orthogonal à tous les $N_q{}^p$ sauf $N_0{}^j$ et un vecteur $\neq o^*$ de ${}_{j-1}^{\;1}N^*$ ne peut être orthogonal à $N_0{}^j$. Alors N^1_{j-1} et ${}_0{}^jN^*$ sont conjugués l'un à l'autre. On a donc le

Lemme. *On peut déterminer les $N_0{}^j$ et ${}_0{}^jN^*$ $(j=1, \cdots, \nu)$ de manière que N^1_{j-1} soit orthogonal à tous les ${}_q{}^pN^*$ sauf ${}_0{}^jN^*$ et que ${}_{j-1}^{\;1}N^*$ soit orthogonal à tous les $N_q{}^p$ sauf $N_0{}^j$. Si l'on prend convenablement la base $\{a_k{}^j;\, k=1, \cdots, m_j\}$ de $N_0{}^j$ et la base $\{{}_k{}^ja^*;\, k=1, \cdots, m_j\}$ de ${}_0{}^jN^*$, on a* (35.1) *pour $r=1, \cdots, \nu$.*

36. Supposons maintenant que l'on ait pu définir les $N_0{}^r$ et ${}_0{}^rN^*(r<j)$ de manière que, si $p+q<j$, $r+s<j$, $N_q{}^p$ et ${}_s{}^rN^*$ soient orthogonaux sauf le cas de $p+q=r+s=q+s+1$. Nous supposons de plus que l'on ait (35.1), $\{a_k{}^r;\, k=1, \cdots, m_r\}$ et $\{{}_k{}^ra^*;\, k=1, \cdots, m_r\}$ désignant respectivement les bases de $N_0{}^r$ et de ${}_0{}^rN^*$. D'après le lemme, on sait que cette hypothèse est réalisée pour $j=2$.

x désignant un vecteur de $N_0{}^j$, on peut déterminer d'une seule manière un vecteur y tel que

$$y - x \in \sum_{p+q<j} \oplus N_q{}^p, \qquad y \perp {}_q{}^pN^* \qquad (p+q<j) .$$

En effet, y peut s'écrire d'une seule manière

$$y = x + \sum_{r=1}^{j-1} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{m_r} \lambda_{ksr} L^s a_k{}^r$$

et l'orthogonalité de y à ${}_k{}^pa^*L^q$ entraîne

$$\lambda_{k,\,p-q-1,\,p} = -{}_k{}^pa^*L^qx .$$

Soit $b_k{}^j$ le vecteur y correspondant à $x=a_k{}^j$. On verra sans peine que le sous-espace N' engendré par $b_k{}^j(k=1, \cdots, m_j)$ satisfait à la condition (35.2). ${}_{j-1}^{\;1}N^*$ étant orthogonal à $N_q{}^p(p+q<j)$, on a

$${}_p{}^ja^*L^{j-1}b_q{}^j = {}_p{}^ja^*L^{j-1}a_q{}^j = \delta_{pq} .$$

On peut donc remplacer $N_0{}^j$ par N' et $a_k{}^j$ par $b_k{}^j$; les conditions supposées remplies restent encore vraies.

Supposons donc $N_0{}^j \perp {}_q{}^pN^*$ et ${}_0{}^jN^* \perp N_q{}^p$ $(p+q<j)$. On a alors $N_q{}^p \perp {}_s{}^rN^*$, ${}_q{}^pN^* \perp N_s{}^r$ pour $j=p+q>r+s$.

En effet, soient x et u^* des vecteurs quelconques de $N_0{}^j$ et de ${}^{r+s}_{\;\;0}N^*$. L^qx et u^*L^s représentent respectivement des vecteurs quelconques dans $N_q{}^p$ et ${}_s{}^rN^*$.

Or, on a

$$(u^*L^s)(L^qx) = (u^*L^{s+q})x = 0 .$$

Donc, $N_q{}^p \perp {}_s{}^rN^*$.

Démontrons ensuite, qu'étant donné un vecteur x de $N_0{}^j$, on peut déterminer d'une seule manière un vecteur y tel que

$$y-x \in N_1^{j-1} \oplus \cdots \oplus N_{j-1}^1 ,$$
$$y \perp {}^{j-k}_{k}N^* \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ j-2) .$$

En effet, y peut s'écrire d'une seule manière

$$y=x+\sum_{r=1}^{j-1}\sum_{k=1}^{m_j}\lambda_{kr}L^r a_k{}^j$$

et l'orthogonalité de y à ${}_{h}{}^{j}a^* L^s$ entraîne

$$\lambda_{k,\,j-s-1}+\sum_{r=0}^{j-s-2}\sum_{k=1}^{m_j}\lambda_{kr}\cdot{}_{h}{}^{j}a^* L^{r+s}a_k{}^j+{}_{h}{}^{j}a^* L^s x=0 .$$

Le système de ces équations en λ_{kr} admet une seule solution. Soit $b_k{}^j$ le vecteur y correspondant à $x=a_k{}^j$. Si l'on désigne par N' le sous-espace engendré par $b_k{}^j (k=1, \cdots, m_j)$, on a (35.2). On a de plus $N' \perp {}_q{}^p N^*$ pour $p+q<j$, car $N_k{}^{j-k} \perp {}_q{}^p N^*$ comme nous l'avons vu tout à l'heure. On peut donc prendre N' pour $N_0{}^j$. $N_0{}^j$ est alors orthogonal à ${}^{j-k}_{k}N^* (k<j-1)$. On en conclut que $N_q{}^p$ est orthogonal à ${}_s{}^r N^*$ pour $p+q=r+s=j$ sauf le cas de $r=q+1$, $s=p-1$.

Nous avons pu ainsi définir les sous-espaces $N_0{}^j$ et ${}_0{}^j N^*$ de manière que l'hypothèse exposée au début de ce n° soit remplie, en remplaçant j par $j+1$. On a donc le

Théorème 36.1. *On peut définir les sous-espaces $N_0{}^j$ et ${}_0{}^j N^*$ de manière que $N_q{}^p$ et ${}_s{}^r N^*$ soient orthogonaux sauf le cas de $p+q=r+s=q+s+1$.*

Alors $N_q{}^p$ et ${}^{q+1}_{p-1}N^*$ sont conjugués l'un à l'autre. Ils ont donc le même nombre de dimensions.

37. Supposons les conditions du théorème 36.1 remplies. On peut prendre les bases $\{a_k{}^r ; k=1, \cdots, m_r\}$ et $\{{}_k{}^r a^* ; k=1, \cdots, m_r\}$ de manière que l'on ait (35.1). Si l'on pose

$$H=\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{q=1}^{m_p}L^r a_q{}^p\cdot{}_q{}^p a^* L^{p-r} , \tag{37.1}$$

on a

$$HL^{r-1}a_q{}^p=L^r a_q{}^p=L(L^{r-1}a_q{}^p) ,$$
$${}_q{}^p a^* L^{p-r-1}H={}_q{}^p a^* L^{p-r}=({}_q{}^p a^* L^{p-r-1})L .$$

Par suite H coïncide avec L dans N^ν et avec O dans N_ν. Si l'on désigne par L' l'endomorphisme qui coïncide avec O dans N^ν et avec L dans N_ν, on a $L=H+L'$.

Si l'on pose

$$\underline{H}=\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{p}\sum_{q=1}^{m_p}L^{r-1}a_q{}^p\cdot{}_q{}^p a^* L^{p-r-1} , \tag{37.2}$$

on a

$$\underline{H}L^r a_q{}^p=L^{r-1}a_q{}^p ,$$
$${}_q{}^p a^* L^{p-r}H={}_q{}^p a^* L^{p-r-1} .$$

Si donc on désigne par $\underline{L}'$ qui coïncide avec O dans N^ν et avec l'inverse de L dans N_ν, $\underline{L}=\underline{H}+\underline{L}'$ est un endomorphisme supplémentaire de L. Il est défini dans $\mathfrak{N}$ ainsi que dans $\mathfrak{N}^*$. Nous avons donc le

Théorème 37.1. *Dans notre présent cas, où l'espace principal a un nombre fini de dimensions, il existe un endomorphisme, admettant son adjoint, qui est supplémentaire dans $\mathfrak{R}$ ainsi que dans $\mathfrak{R}^*$.*

On sait que, si l'on ne considère que l'espace $\mathfrak{R}$, il existe un endomorphisme supplémentaire $\underline{L}$ de L. Mais on ne peut dire que $\underline{L}$ admet son adjoint bien que L admette son adjoint. Dans le cas où $\underline{L}$ admet son adjoint, peut-on dire que son adjoint est un supplément de l'adjoint de L? C'est un des problèmes que nous allons étudier dans le chapitre suivant sans supposer la dimension de l'espace principal finie.

CHAPITRE IV. ENDOMORPHISMES SUPPLÉMENTAIRES

I. Endomorphismes d'ordre fini

38. $\underline{L}$ étant un endomorphisme quelconque de $\mathfrak{R}$, nous désignons par $\underline{N}^n$ et $\underline{N}_n$ les sous-espaces définis comme au n°19. Si en particulier $\underline{L}$ est un supplément de L, on a

(i) $L\underline{L}=I$ dans N_1 et $\underline{L}L=I$ dans $\underline{N}_1$;

(ii) $L\{\underline{N}^n\}\subseteqq\underline{N}^{n+1}$, $\underline{L}\{N^n\}\subseteqq N^{n+1}$;

(iii) $L\{\underline{N}_n\}\subseteqq\underline{N}_{n-1}$, $\underline{L}\{N_n\}\subseteqq N_{n-1}$.

Réciproquement, un endomorphisme $\underline{L}$ satisfaisant à ces conditions est-il un supplément de L?

Remarquons d'abord quelques conséquences immédiates de ces conditions.

(ii) entraîne

$$L^m\{\underline{N}^n\}\subseteqq\underline{N}^{m+n}, \qquad \underline{L}^m\{N^n\}\subseteqq N^{m+n} \tag{38.1}$$

et (iii) entraîne

$$L^m\{\underline{N}^n\}\subseteqq\underline{N}_{n-m}, \qquad \underline{L}^m\{N_n\}\subseteqq N_{n-m}. \tag{38.2}$$

Puis (i) entraîne

$$L^n\underline{L}^n=I, \qquad \underline{L}^nL^n=I \tag{38.3}$$

respectivement dans N_n et dans $\underline{N}_n$.

Soit x un vecteur quelconque de N^ν, $\underline{L}^\nu x$ appartenant à $\underline{N}_\nu$, on a

$$\underline{L}^\nu L^\nu\underline{L}^\nu x=\underline{L}^\nu x.$$

Or, on a

$$\underline{L}^\nu x\in N^{2\nu}=N^\nu.$$

Par suite

$$\underline{L}^\nu L^\nu\underline{L}^\nu x=o.$$

Donc, on a $\underline{L}^\nu x=o$, c'est-à-dire $N^\nu\subseteqq\underline{N}^\nu$.

D'autre part,

$$\underline{L}\{N_\nu\}\subseteqq N_{\nu+1}=N_\nu\,, \qquad L\{\underline{L}\{N_\nu\}\}=N_\nu\,.$$

On doit donc avoir $\underline{L}\{N_\nu\}=N_\nu$, et la correspondance par $\underline{L}$ de N_ν à lui-même est biunivoque. Il s'ensuit que N_ν ne contient aucun vecteur de $\underline{N}^\nu$.

Si $n\geqq\nu$, on a

$$\begin{aligned}\underline{L}^n\{\mathfrak{N}\}&=L^n\{N^\nu\obar N_\nu\}\\&=\underline{L}^n\{N^\nu\}\oplus\underline{L}^n\{N_\nu\}\\&=\underline{L}^n\{N_\nu\}=N_\nu\,.\end{aligned}$$

Ainsi $N_n=N_\nu$ pour $n\geqq\nu$.

$\underline{N}^\nu\odot N_\nu=\{o\}$ entraîne, d'après le théorème 14.3, $\underline{N}^\nu=\underline{N}^{\nu+1}$. Par suite, l'ordre de $\underline{L}$ ne peut dépasser ν. On peut alors démontrer réciproquement que l'ordre ν de L ne peut dépasser celui de $\underline{L}$. L'ordre de $\underline{L}$ est donc égal à ν.

On a donc le

Théorème 38.1. *Si L est un endomorphisme d'ordre ν et si un endomorphisme $\underline{L}$ satisfait aux conditions* (i), (ii), (iii), *l'ordre de $\underline{L}$ est égal* à ν.

39. Avant d'aller plus loin, démontrons un

Théorème 39.1. *Si $A\odot B=\{o\}$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$A\obar B=A'\obar B$$

est

$$A\equiv A' \quad (\mathrm{mod}\ \ B)\,.$$

Cette condition signifie que la relation $x\equiv x'$ (mod B) qui est équivalente à $x-x'\in B$, établit une correspondance biunivoque entre A et A'.

La condition est nécessaire.

En effet, si $x\in A$, x appartenant à $A'\obar B$, on peut écrire d'une seule manière $x=x'+y$, $x'\in A'$, $y\in B$, et réciproquement.

La condition est suffisante.

En effet, si $a'\in A'\odot B$, on peut écrire $a'=a+b$, $a\in A$, $b\in B$. $a=a'-b$ appartenant à $A\odot B=\{o\}$, il est o. La relation $x'\equiv o$ (mod B) est satisfaite par $x'=o$ et par $x'=a'$. On a donc $a'=o$.

Si $x\in A$, $y\in B$, on peut écrire $x=x'+y'$, $x'\in A'$, $y'\in B$, et l'on a

$$x+y=x'+(y+y')\in A'\obar B\,.$$

On a donc $A\obar B\subseteqq A'\obar B$. On peut démontrer de même l'inclusion réciproque.

Cela posé, nous allons montrer

$$N_0{}^1\equiv N^1\odot\underline{N}^1 \qquad (\mathrm{mod}\ N^1\odot N_1)\,,$$

ce qui prouve que l'on a

$$N^1=\{N^1\odot\underline{N}^1\}\obar\{N^1\odot N_1\}\,.$$

Par suite, on peut prendre $N^1\odot\underline{N}^1$ pour $N_0{}^1$.

Supposons

$$x-x'=y\in N^1\odot N_1\,,$$

x et x' appartenant respectivement à N_0^1 et $N^1 \odot \underline{N}^1$. D'après l'hypothèse, on a $Lx' = \underline{L}x' = o$ et $L\underline{L}y = y$. On a donc $y = L\underline{L}x$ et le vecteur $x' \in N^1 \odot \underline{N}^1$, s'il existe, se détermine d'une seule manière.

Or, x appartenant à N_0^1, le vecteur $x' = x - L\underline{L}x$ appartient à $N^1 \odot \underline{N}^1$, car

$$Lx = o, \qquad L^2\underline{L}x = o, \qquad \underline{L}x' = \underline{L}x - \underline{L}L\underline{L}x = \underline{L}x - \underline{L}x = o.$$

Réciproquement, si $x' \in N^1 \odot \underline{N}^1$, x' peut s'écrire d'une seule manière comme une somme d'un vecteur de N_0^1 de $N^1 \odot N_1$, c'est la conséquence évidente de la définition de N_0^1.

De même, on peut prendre $N^1 \odot \underline{N}^1$ pour $\underline{N}_0^1$, la signification de $\underline{N}_0^n$ étant la même qu'au n° 19. On peut donc poser

$$N_0^1 = \underline{N}_0^1 = N^1 \odot \underline{N}^1 \tag{39.1}$$

40. Nous avons démontré au n° 38

$$\underline{N}^\nu = N^\nu, \qquad \underline{N}_\nu = N_\nu .$$

On a donc

$$N^n \oplus \underline{N}_n = \mathfrak{R}, \qquad N_n \oplus \underline{N}^n = \mathfrak{R} \tag{40.1}$$

pour $n \geq \nu$. Mais ces relations sont valables encore pour $n < \nu$, c'est ce que nous allons montrer.

Si $a \in N^n \odot \underline{N}_n$, on a $\underline{L}^n L^n a = a$, tandis que $L^n a = o$. Donc $a = o$.

x désignant un vecteur quelconque, $x' = \underline{L}^n L^n x$ appartient à $\underline{N}_n$, et

$$L^n(x - x') = L^n x - L^n \underline{L}^n L^n x = o .$$

Par suite $x'' = x - x'$ appartient à N^n. La première des relations (40.1) est donc démontrée. La seconde de ces relations se démontre d'une même manière.

Il est évident que $\underline{L}\{N_n\}$ est contenu dans $N_{n-1} \odot \underline{N}_1$. Pour démontrer l'égalité

$$\underline{L}\{N_n\} = N_{n-1} \odot \underline{N}_1 , \tag{40.2}$$

il suffit de montrer qu'un vecteur quelconque x du second membre appartient au premier. x appartenant à N_{n-1}, $y = Lx$ appartient à N_n; et x appartenant à $\underline{N}_1$, on a

$$\underline{L}y = \underline{L}Lx = x .$$

x appartient donc au premier membre de (40.2)

On peut démontrer de même

$$L\{\underline{N}_n\} = N_1 \odot \underline{N}_{n-1} . \tag{40.2'}$$

D'une manière plus générale, on a

$$\underline{L}\{N_m \odot \underline{N}_n\} = N_{m-1} \odot \underline{N}_{n+1} , \tag{40.3}$$

$$L\{N_m \odot \underline{N}_n\} = N_{m+1} \odot \underline{N}_{n-1} . \tag{40.3'}$$

Il est clair que les seconds membres contiennent les premiers. Pour démontrer l'inclusion inverse, prenons par exemple un vecteur quelconque x de $N_{m-1} \odot \underline{N}_{n+1}$.

$y = Lx$ appartient à $N_m \odot \underline{N}_n$, et x appartenant à $\underline{N}_1$, on a $\underline{L}y = x$. Le premier membre de (40.3) contient donc le second.

On peut démontrer de même les formules

$$\underline{L}\{N^p \odot N_q \odot \underline{N}^{q+1} \odot \underline{N}_{p-1}\} = N^{p+1} \odot N_{q-1} \odot \underline{N}^q \odot \underline{N}_p \,, \tag{40.4}$$

$$L\{N^{p+1} \odot N_{q-1} \odot \underline{N}^q \odot \underline{N}_p\} = N^p \odot N_q \odot \underline{N}^{q+1} \odot \underline{N}_{p-1} \,. \tag{40.4'}$$

Ces formules contiennent comme cas particuliers les formules

$$\underline{L}\{N^1 \odot N_q \odot \underline{N}^{q+1}\} = N^2 \odot N_{q-1} \odot \underline{N}^q \odot \underline{N}_1 \,, \tag{40.5}$$

$$L\{N^{p+1} \odot \underline{N}^1 \odot \underline{N}_p\} = N^p \odot N_1 \odot \underline{N}^2 \odot \underline{N}_{p-1} \,. \tag{40.5'}$$

en faisant une convention d'écrire $N_0 = \underline{N}_0 = \mathfrak{N}$.

41. Nous allons maintenant démontrer que l'on peut prendre

$$N_q{}^p = \underline{N}_{p-1}^{q+1} = N^p \odot \underline{N}^{q+1} \odot N_q \odot \underline{N}_{p-1} \,. \tag{41.1}$$

Nous l'avons déjà démontré pour $p+q=1$, c'est-à-dire pour $N_0{}^1$, $\underline{N}_0{}^1$. Nous supposons donc que l'on puisse définir $N_q{}^p$ et $\underline{N}_q{}^p$ par (41.1) pour $p+q<n$.

La condition qui détermine $N_0{}^n$ étant

$$N^n = N_0{}^n \obar \{N^{n-1} \oplus D_1{}^n\} \,,$$

nous allons montrer que l'on a

$$N_0{}^n \equiv N^n \odot \underline{N}^1 \odot \underline{N}_{n-1} \qquad (\mathrm{mod}\ N^{n-1} \oplus D_1{}^n) \,, \tag{41.2}$$

ce qui prouve que l'on peut prendre pour $N_0{}^n$ le second membre de cette relation.

On a d'abord

$$\begin{aligned} N^{n-1} \oplus D_1{}^n &= \{N^{n-1} \ominus \{N^{n-1} \odot D_1{}^n\}\} \obar D_1{}^n \\ &= \{N^{n-1} \ominus D_1^{n-1}\} \obar D_1{}^n \\ &= \{N_0{}^1 \obar \cdots \obar N_0^{n-1}\} \obar D_1{}^n \\ &\subseteqq \{N^{n-1} \odot \underline{N}^1\} \oplus D_1{}^n \\ &\subseteqq N^{n-1} \oplus D_1{}^n \,. \end{aligned}$$

On en conclut

$$N^{n-1} \oplus D_1{}^n = \{N^{n-1} \odot \underline{N}^1\} \oplus D_1{}^n \,.$$

Mais on a

$$\{N^{n-1} \odot \underline{N}^1\} \odot D_1{}^n = \{o\} \,,$$

car $\underline{N}^1 \odot N_1 = \{o\}$. On a donc

$$N^{n-1} \oplus D_1{}^n = \{N^{n-1} \odot \underline{N}^1\} \obar D_1{}^n \,.$$

Cela posé, supposons que l'on ait

$$\begin{cases} x = x' + x_1'' + x_2'' \,, \\ x \in N_0{}^n \,, \quad x' \in N^n \odot \underline{N}^1 \odot \underline{N}_{n-1} \,, \quad x_1'' \in N^{n-1} \odot \underline{N}^1 \,, \quad x_2'' \in D_1{}^n \,. \end{cases} \tag{41.3}$$

Puisque $x' \in \underline{N}^1$, $x_1'' \in \underline{N}^1$, on a $\underline{L}x = \underline{L}x_2''$. x_2'' appartenant à N_1, on a $L\underline{L}x = x_2''$. x_1'' appartenant à N^{n-1}, on a $L^{n-1}x = L^{n-1}(x' + x_2'')$. x' appartenant à $\underline{N}_{n-1}$, on a

$$\underline{L}^{n-1}L^{n-1}x = x' + \underline{L}^{n-1}L^{n-1}x_2'' .$$

Ainsi, si l'on a (41.3), on a

$$x_2'' = L\underline{L}x , \quad x' = \underline{L}^{n-1}L^{n-1}(x - x_2'') , \quad x_1'' = x - x' - x_2'' . \tag{41.4}$$

Réciproquement, $x \in N_0^n$ et (41.4) entraînent (41.3).

En effet, on a évidemment $x_2'' \in D_1^n$, $x' \in \underline{N}_{n-1}$. x et x_2'' appartenant à N^n, x' appartient à N^n. On a $\underline{L}x_2'' = \underline{L}x$, d'où $x - x_2'' \in \underline{N}^1$. Par suite, $x' \in \underline{N}^1$.

Puisque

$$\begin{aligned} L^{n-1}x_1'' &= L^{n-1}(x - x' - x_2'') \\ &= L^{n-1}(x - x_2'') - L^{n-1}x' = o , \end{aligned}$$

on a $x_1'' \in N^{n-1}$. x' appartenant à $\underline{N}^1$, on a $\underline{L}x_1'' = \underline{L}(x - x_2'')$. Mais on a $\underline{L}x_2'' = \underline{L}x$. Donc $x_1'' \in \underline{N}_1$.

Par conséquent, la relation $x - x' \in N^{n-1} \oplus D_1^n$ fait correspondre à chaque vecteur x de N_0^n un vecteur x' de $N^n \odot \underline{N}^1 \odot \underline{N}_{n-1}$ et un seul.

La réciproque est évidente.

Nous pouvons donc définir N_0^n par

$$N_0^n = N^n \odot \underline{N}^1 \odot \underline{N}_{n-1} .$$

Alors

$$N_k^{n-k} = L^k \{N_0^n\}$$

et les relations (40.4) entraînent

$$N_k^{n-k} = N^{n-k} \odot N_k \odot \underline{N}^{k+1} \odot \underline{N}_{n-k-1} .$$

On voit de même que l'on peut prendre $N^1 \odot N_{n-1} \odot \underline{N}^n$ pour $\underline{N}_0^n$. On a alors

$$\underline{N}_k^{n-k} = N^{k+1} \odot N_{n-k-1} \odot \underline{N}^{n-k} \odot \underline{N}_k .$$

Les formules (41.1) sont donc démontrées pour $p + q = n$.

Les formules (41.1) étant établies, les formules (40.4) montrent que $\underline{L}$ est un supplément de L.

En résumant les résultats obtenus dans cette section, on peut énoncer le

Théorème 41.1. *Soit L un endomorphisme de $\mathfrak{R}$ d'ordre fini. Pour qu'un endomorphisme*(1) *$\underline{L}$ soit un supplément de L, il faut et il suffit que l'on ait* (i), (ii) *et* (iii). *On peut alors définir les sous-espaces N_q^p, $\underline{N}_q^p$ par les formules* (41.1) *et on a* (40.1). *L'ordre de $\underline{L}$ est égal à celui de L.*

42. Supposons qu'un supplément $\underline{L}$ de L admette son adjoint, L admettant

---

(1) Ou plutôt, on définit supplément de L comme un endomorphisme $\underline{L}$ satisfaisant à ces conditions.

encore son adjoint dont l'ordre est aussi fini. L'adjoint de $\underline{L}$ est-il un supplément de l'adjoint de L?

On a toujours

$$u^*\underline{L}L\underline{L}x=u^*\underline{L}x\,,$$

ce qui prouve que l'on a $L\underline{L}=I$ dans ${}_1\underline{N}^*$, en posant

$${}^n\underline{N}^*=\{o^*\}\underline{L}^{-n}\,,\qquad {}_n\underline{N}^*=\{\mathfrak{R}\}\underline{L}^n\,.$$

On voit de même $\underline{L}L=I$ dans ${}_1N^*$. On a donc la condition suivante qui correspond à (i):

(i′) $\underline{L}L=I$ dans ${}_1N^*$ et $L\underline{L}=I$ dans ${}_1\underline{N}^*$.

Considérons un vecteur quelconque $u^*\in{}^nN^*$. Pour montrer que l'on a $u^*\underline{L}\in{}^{n+1}N^*$, considérons le produit intérieur $u^*\underline{L}L^{n+1}x$. $L^{n+1}x$ appartenant à N_{n+1}, $\underline{L}L^{n+1}x$ appartient à N_n. ${}^nN^*$ étant ortogonal à N_n, on a

$$u^*\underline{L}L^{n+1}x=0$$

quel que soit $x\in\mathfrak{R}$, ce qui prouve $u^*\underline{L}\in{}^{n+1}N^*$. Par suite

$$\{{}^nN^*\}\underline{L}\subseteqq{}^{n+1}N^*\,.$$

On démontre de même $\{{}^n\underline{N}^*\}\subseteqq{}^{n+1}\underline{N}^*$.

Par suite on a la condition suivante qui correspond à la condition (ii):

(ii′) $\{{}^nN^*\}\underline{L}\subseteqq{}^{n+1}N^*\,,\qquad \{{}^n\underline{N}^*\}L\subseteqq{}^{n+1}\underline{N}^*\,.$

La condition qui correspond à (iii) est

(iii′) $\{{}_n\underline{N}^*\}L\subseteqq{}_{n-1}\underline{N}^*\,,\qquad \{{}_nN^*\}\underline{L}\subseteqq{}_{n-1}N^*\,.$

La deuxième de ces relations est une conséquence immédiate de

$$L^n\underline{L}=L^n\underline{L}^nL^{n-1}\,, \tag{42.1}$$

qui peut encore s'écrire

$$L^n\underline{L}(\underline{L}^{n-1}L^{n-1}-I)=O\,. \tag{42.1′}$$

Si $x\in\underline{N}_{n-1}$, on a $\underline{L}^{n-1}L^{n-1}x=x$. Par suite (42.1′) subsiste dans $\underline{N}_{n-1}$. Si $x\in N^{n-1}$, on a $\underline{L}x\in N^n$ et

$$L^n\underline{L}(\underline{L}^{n-1}L^{n-1}-I)x=-L^n\underline{L}x=o\,.$$

On a donc (42.1′) dans $\mathfrak{R}$, en tenant compte de (40.1).

Le théorème 41.1 nous conduit donc au

Théorème 42.1. *Soit L un endomorphisme d'ordre fini défini dans $\mathfrak{R}$ et admettant son adjoint dont l'ordre est aussi fini. Si un supplément de L admet son adjoint, cet adjoint est un supplément de l'adjoint de L.*

43. Supposons l'existence d'un supplément $\underline{L}$ de L admettant son adjoint. On peut définir les $N_q{}^p$ et $\underline{N}_q{}^p$ par (41.1) et les ${}_s{}^rN^*$ et ${}_s{}^r\underline{N}^*$ par

$${}_s{}^rN^*={}^{s+1}_{r-1}\underline{N}^*={}^rN^*\odot{}^{s+1}\underline{N}^*\odot{}_sN^*\odot{}_{r-1}\underline{N}^*\,. \tag{43.1}$$

A l'aide de ces expressions on voit immédiatement que $N_q{}^p$ et ${}_s{}^rN^*$ sont orthogonaux sauf le cas de $r=q+1$, $s=p-1$. Il s'ensuit qu'aucun vecteur $\neq o$ de $N_q{}^p$ ne peut être orthogonal à ${}^{q+1}_{p-1}N$ et réciproquement. On peut donc énoncer le

Théorème 43.1. *Si un endomorphisme L d'ordre fini admet son adjoint d'ordre fini et s'il existe un supplément $\underline{L}$ admettant aussi son adjoint, les $N_q{}^p$ ${}_s{}^rN^*$ peuvent se définir par* (41.1) *et* (43.1). *Alors $N_q{}^p$ et ${}_s{}^rN^*$ sont orthogonaux sauf le cas de $r=q+1$, $s=p-1$; $N_q{}^q$ et ${}^{q+1}_{p-1}N^*$ sont conjugués l'un à l'autre.*

Dans le cas où l'espace principal N^ν de L a un nombre fini de dimensions, le supplément $\underline{L}$ admet toujours son adjoint. Donc, les résultats de la section III du chapitre III peuvent être considérés comme cas particuliers des résultats obtenus dans cette section.

Remarquons enfin que l'on a le

Théorème 43.2. *Soit L un endomorphisme d'ordre fini admettant son adjoint. S'il existe un supplément $\underline{L}$ de L admettant son adjoint, on a*

$$N_n = {}^nN_\perp{}^*\,, \qquad \tilde{N}_n = N_n\,, \qquad {}_nN^* = {}_\perp N^n\,, \qquad {}_n\hat{N}_* = {}_nN^*\,.$$

En effet, le théorème précédent montre que ${}_q{}^pN_\perp{}^*$ est la somme directe des $N_s{}^r$(N^{q+1}_{p-1} exclu) et de N_ν, ${}^nN^*$ étant la somme directe des ${}_q{}^pN^*$ tels que $p<n$, ${}^nN_\perp{}^*$ est, d'après le théorème 25.2, l'intersection des ${}_q{}^pN_\perp{}^*$ tels que $p\leqq n$. On en conclut que ${}^nN_\perp{}^*$ est la somme directe de N_ν et des $N_s{}^r$ tels que $s>n$, qui n'est autre que N_n.

On peut démontrer de même ${}_nN^* = {}_\perp N^n$.

Puisque $N^n = {}_nN_\perp{}^*$, ${}^nN^* = {}_\perp N_n$, on a $\tilde{N}_n = N_n$, ${}_n\tilde{N}^* = {}_nN^*$.

II. Endomorphismes d'ordre infini

44. Dans le cas d'un endomorphisme L d'ordre infini, nous appellerons endomorphisme supplémentaire ou supplément de L tout endomorphisme $\underline{L}$ satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du n° 38.

Les formules établies au n° 40 sont valables même dans le cas de l'ordre infini, c'est ce que l'on peut vérifier sans peine. A l'aide de (40.1), on peut conclure que $N^m = N^{m+1}$ et $N_n = N_{n+1}$ entraînent respectivement $\underline{N}_m = \underline{N}_{m+1}$, $\underline{N}^n = \underline{N}^{n+1}$. Si donc on désigne par $\underline{\mu}$, $\underline{\nu}$ les entiers μ, ν relatifs à $\underline{L}$, on a $\underline{\mu} = \nu$, $\underline{\nu} = \mu$.

Nous allons maintenant démontrer la relation

$$\text{(44.1)} \qquad \{N^m \odot \underline{N}^n\} \oplus \{N^m \odot N_n\} \oplus \{\underline{N}^n \odot \underline{N}_m\} \oplus \{N_n \odot \underline{N}_m\} = \mathfrak{R}\,.$$

Soit $x \in N_n$. Si l'on pose

$$x' = \underline{L}^m L^m x, \qquad x = x' + x''\,,$$

on a

$$x' \in N_n \odot \underline{N}_m, \qquad x'' \in N_n\,,$$

et puis

$$L^m x'' = L^m x - L^m \underline{L}^m L^m x = o\,.$$

Par suite $x'' \in N_n \odot N^m$. Puisque $N^m \odot \underline{N}_m = \{o\}$, on a

$$N_n = \{N_n \odot N^m\} \oplus \{N_n \odot \underline{N}_m\}\,. \tag{44.2}$$

On a de même

$$\underline{N}_m = \{\underline{N}_m \odot \underline{N}^n\} \oplus \{\underline{N}_m \odot N_n\}\,. \tag{44.2'}$$

Si $x \in \underline{N}^n$, et si l'on définit x' et x'' comme tout à l'heure, on a

$$x' \in \underline{N}^n \odot \underline{N}_m\,, \qquad x'' \in \underline{N}^n$$

puis

$$L^m x'' = L^m x - L^m \underline{L}^m L^m x = o\,.$$

Par suite $x'' \in \underline{N}^n \odot N^m$. Puisque $N^m \odot \underline{N}_m = \{o\}$, on a

$$\underline{N}^n = \{\underline{N}^n \odot N^m\} \oplus \{\underline{N}^n \odot \underline{N}^m\}\,. \tag{44.3}$$

On a de même

$$N^m = \{N^m \odot N_n\} \oplus \{N^m \odot \underline{N}^n\}\,. \tag{44.3'}$$

(44.2) et (44.3) entraînent (44.1).

En somme nous avons le

Théorème 44.1. *Si un endomorphisme L admet un supplément $\underline{L}$, les formules établies au* n° 40 *subsistent. On a de plus $\mu = \underline{\nu}$, $\nu = \underline{\mu}$ et* (44.1), (44.2), (44.2'), (44.3) *et* (44.3').

Posons maintenant

$$N^\infty = \bigcup N^m\,, \quad N_\infty = \bigcap N_n\,, \quad \underline{N}^\infty = \bigcup \underline{N}^n\,, \quad \underline{N}_\infty = \bigcap \underline{N}_m\,.$$

Si $x \in N^\infty \odot \underline{N}_\infty$, il existe un enteir m tel que $x \in N^m$. Puisque $x \in \underline{N}_m$ quel que soit m, on a $x = o$. Par suite $\underline{N}^\infty \odot N_\infty = \{o\}$. On a de même $N_\infty \odot \underline{N}^\infty = \{o\}$.

Supposons que l'on ait

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = o\,,$$

x_1, x_2, x_3, x_4 appartenant respectivement à

$$N^{\infty\infty} = N^\infty \odot \underline{N}^\infty, \quad N_\infty^{\ \infty} = N^\infty \odot N_\infty, \quad \underline{N}_\infty^{\ \infty} = \underline{N}^\infty \odot \underline{N}_\infty, \quad N_{\infty\infty} = N_\infty \odot \underline{N}_\infty. \tag{44.4}$$

Puisque

$$x_1 + x_3 = -x_2 - x_4 \in N_\infty \odot \underline{N}^\infty = \{o\}\,,$$

on a $x_1 + x_3 = x_2 + x_3 = o$. Alors

$$x_1 = -x_3 \in N^\infty \odot \underline{N}_\infty = \{o\}\,, \qquad x_2 = -x_4 \in N^\infty \odot \underline{N}_\infty\,.$$

On a donc $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = o$.

Par suite,

Théorème 44.2. *Les quatre sous-espaces* (44.4) *sont linéairement indépendants.*

45. Démontrons les formules suivantes plus générale que (40.4), (40.4'):

$$L\{N^p \odot N_q \odot \underline{N}^{r-1} \odot \underline{N}_{s+1}\} = N^{p-1} \odot N_{q+1} \odot \underline{N}^r \odot \underline{N}_s\,, \tag{45.1}$$

$$(45.1') \qquad \underline{L}\{N^{p-1}\odot N_{q+1}\odot \underline{N}^{r}\odot \underline{N}_{s}\}=N^{p}\odot N_{q}\odot \underline{N}^{r-1}\odot \underline{N}_{s+1} .$$

Il est clair que les seconds membres contiennent respectivement les premiers. Prenons, par exemple, un vecteur quelconque x du second membre de (45.1). $y=\underline{L}x$ appartient au second membre de (45.1'). x appartenant à N_1, on a

$$x=L\underline{L}x=Ly\in L\{N^{p}\odot N_{q}\odot \underline{N}^{r-1}\odot \underline{N}_{s+1}\} .$$

On a donc (45.1).

On peut de même démontrer (45.1').

Ces formules nous montrent immédiatement que, si l'on pose

$$(45.2) \qquad \mathfrak{R}^{m}=\sum_{p+q\leqq m}\oplus\{N^{p}\odot \underline{N}^{q}\} ,$$

on a

$$L\{\mathfrak{R}^{m}\}\subseteqq\mathfrak{R}^{m} . \qquad \underline{L}\{\mathfrak{R}^{m}\}\subseteqq\mathfrak{R}^{m} .$$

L et $\underline{L}$ peuvent donc être considérés comme des endomorphismes définis dans $\mathfrak{R}^{m}$. Les sous-espaces $N^{n}[m]$, $\underline{N}^{n}[m]$ correspondant à N^{n} et $\underline{N}^{n}$ sont évidemment

$$N^{n}[m]=N^{n}\odot\mathfrak{R}^{m} , \qquad \underline{N}^{n}[m]=\underline{N}^{n}\odot\mathfrak{R}^{m} .$$

Les sous-espaces $N_{n}[m]$, $\underline{N}_{n}[m]$ correspondant à N_{n} et $\underline{N}_{n}$ sont

$$N_{n}[m]=\sum_{p+q\leqq m}\oplus\{N^{p-n}\odot \underline{N}^{q+n}\odot N_{n}\}, \quad \underline{N}_{n}[m]=\sum_{p+q\leqq m}\oplus\{N^{p+n}\odot \underline{N}^{q-n}\odot \underline{N}_{n}\},$$

c'est ce que l'on voit sans peine à l'aide des formules (45.1) et (45.1').

Ces relations montrent que l'on a

$$N^{m-1}[m]=\underline{N}^{m-1}[m]=\mathfrak{R}^{m} , \qquad N_{m-1}[m]=\underline{N}_{m-1}[m]=\{o\} .$$

L et $\underline{L}$ sont donc d'ordres au plus égaux à $m-1$ dans $\mathfrak{R}^{m}$.

Puisque $N_{1}[m]\subseteqq N_{1}$, $\underline{N}_{1}[m]\subseteqq\underline{N}_{1}$, on a

(i'') $L\underline{L}=I$ dans $N_{1}[m]$ et $\underline{L}L=I$ dans $\underline{N}_{1}[m]$.

Puisque $L\{\underline{N}^{n}\odot\mathfrak{R}^{m}\}\subseteqq\underline{N}^{n+1}\odot\mathfrak{R}^{m}$, $\underline{L}\{N^{n}\odot\mathfrak{R}^{m}\}\subseteqq N^{n+1}\odot\mathfrak{R}^{m}$, on a

(ii'') $L\{\underline{N}^{n}[m]\}\subseteqq\underline{N}^{n+1}[m]$, $\underline{L}\{N^{n}[m]\}\subseteqq N^{n+1}[m]$.

Considérons enfin le sous-espace $L\{\underline{N}_{n}[m]\}$. Il est égal à

$$\sum\oplus\{N^{p+n-1}\odot\underline{N}^{q-n+1}\odot\underline{N}_{n-1}\odot N_{1}\}\subseteqq\underline{N}_{n-1}[m] .$$

On a donc

(iii'') $L\{\underline{N}_{n}[m]\}\subseteqq\underline{N}_{n-1}[m]$, $\underline{L}\{N_{n}[m]\}\subseteqq N_{n-1}[m]$.

Nous pouvons ainsi énoncer le

Théorème 45.1. *Si $\underline{L}$ est un supplément de L dans $\mathfrak{R}$, il est encore un supplément de L dans $\mathfrak{R}^{m}$.*

Grâce à ce théorème, on peut poser

$$N_{q}{}^{p}[m]=\underline{N}{}^{q+1}_{p-1}[m]=N^{p}[m]\odot\underline{N}^{q+1}[m]\odot N_{q}[m]\odot\underline{N}_{p-1}[m] .$$

On a donc

$$N_{q}{}^{p}[m]\subseteqq N^{p}\odot\underline{N}^{q+1}\odot N_{q}\odot\underline{N}_{p-1} .$$

$p+q$ étant moindre que m, on a

$$N^p[m]\supseteqq N^p\odot\underline{N}^{q+1}, \qquad N_q[m]\supseteqq N^p\odot\underline{N}^{q+1}\odot N_q,$$

$$\underline{N}^{q+1}[m]\supseteqq N^p\odot\underline{N}^{q+1}, \qquad \underline{N}_{p-1}[m]\supseteqq N^p\odot\underline{N}^{q+1}\odot\underline{N}_{p-1}.$$

On a par suite

$$N_q{}^p[m]\supseteqq N^p\odot\underline{N}^{q+1}\odot N_q\odot\underline{N}_{p-1}.$$

Par conséquent, les sous-espaces $N_q{}^p[m]=N_q{}^p$ sont indépendants de m, et l'on a

$$\mathfrak{N}^m=\sum_{p+q<m}\oplus N_q{}^p,$$

m pouvant être aussi grand que l'on veut, on a le

Théorème 45.2. *Le sous-espace $N^\infty\odot\underline{N}^\infty$ est la somme directe de tous les sous-espaces $N_q{}^p=\underline{N}_{p-1}^{q+1}$ définis par* (41.1).

46. Si $N^\infty\odot N_\infty$ contient un vecteur $x\neq o$, on a $N^1\odot N_\infty\supset\{o\}$.

En effet, soit m le plus petit entier tel que $x\in N^m\odot N_\infty$. $L^{m-1}x$ est alors un vecteur $\neq o$ de $N^1\odot N_\infty$.

Cela posé, les formules suivantes peuvent être considérées comme des cas limites de (45.1), (45.1′):

$$L\{N^p\odot N_q\odot\underline{N}^{r-1}\odot\underline{N}_\infty\}=N^{p-1}\odot N_{q+1}\odot\underline{N}^r\odot\underline{N}_\infty, \tag{46.1}$$

$$\underline{L}\{N^{p-1}\odot N_{q+1}\odot\underline{N}^r\odot\underline{N}_\infty\}=N^p\odot N_q\odot\underline{N}^{r-1}\odot\underline{N}_\infty, \tag{46.1′}$$

$$L\{N^p\odot N_\infty\odot\underline{N}^{r-1}\odot\underline{N}_{s+1}\}=N^{p-1}\odot N_\infty\odot\underline{N}^r\odot\underline{N}_s, \tag{46.2}$$

$$\underline{L}\{N^{p-1}\odot N_\infty\odot\underline{N}^r\odot\underline{N}_s\}=N^p\odot N_\infty\odot\underline{N}^{r-1}\odot\underline{N}_{s+1}, \tag{46.2′}$$

et on peut les démontrer de la même manière, si l'on remarque que l'on a les formules suivantes faciles à vérifier:

$$L\{N_\infty\}=N_\infty, \qquad \underline{L}\{\underline{N}_\infty\}=\underline{N}_\infty, \tag{46.3}$$

$$L\{\underline{N}_\infty\}\subseteqq\underline{N}_\infty, \qquad \underline{L}\{N_\infty\}\subseteqq N_\infty. \tag{46.3′}$$

On voit de même

$$\underline{L}\{N_\infty{}^n\}=N_\infty{}^{n+1}, \qquad L\{N_\infty{}^{n+1}\}=N_\infty{}^n, \tag{46.4}$$

$$L\{\underline{N}_\infty{}^n\}=\underline{N}_\infty{}^{n+1}, \qquad \underline{L}\{\underline{N}_\infty{}^{n+1}\}=\underline{N}_\infty{}^n, \tag{46.4′}$$

en posant

$$N_\infty{}^n=N^n\odot\underline{N}_{n-1}\odot N_\infty, \qquad \underline{N}_\infty{}^n=\underline{N}^n\odot N_{n-1}\odot\underline{N}_\infty. \tag{46.5}$$

$N_\infty{}^1$ et $N_\infty{}^n$ se correspondant biunivoquement par $\underline{L}^{n-1}$, on a $N_\infty{}^n\supset\{o\}$ lorsque $N^\infty\odot N_\infty\supset\{o\}$.

Si $x\in N_\infty{}^n$ est différent de o, le correspondant $L^{n-1}x$ dans $N_\infty{}^1$ est aussi différent de o. Par suite x n'appartient pas à N^{n-1} de sorte que

$$N_\infty{}^n\odot\{N_\infty{}^1\oplus\cdots\oplus N_\infty{}^{n-1}\}=\{o\}.$$

On peut donc considérer la somme directe des sous-espaces $N_\infty{}^n(n=1, 2, \cdots)$. Nous dirons qu'elle coïncide avec $N^\infty\odot N_\infty$.

Pour le voir il suffit de montrer que l'on a

$$N^n \odot N_\infty = N_\infty{}^n \oplus \{N^{n-1} \odot N_\infty\} .$$

Le second membre est évidemment contenu dans le premier.

Soit $x \in N^n \odot N_\infty$. Si l'on pose

$$x' = (I - \underline{L}^{n-1} L^{n-1})x , \qquad x'' = \underline{L}^{n-1} L^{n-1} x ,$$

on a

$$x' \in N^{n-1} \odot N_\infty , \qquad x'' \in \underline{L}^{n-1}\{N_\infty{}^1\} = N_\infty{}^n .$$

Par suite on a la relation à démontrer.

On a par conséquent le

Théorème 46.1. *Si l'on définit les sous-espaces* $N_\infty{}^n$ *et* $\underline{N}_\infty{}^n$ *par* (46.5), *on a* (46.4), (46.4′) *et*

$$N^\infty \odot N_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus N_\infty{}^n , \qquad \underline{N}^\infty \odot \underline{N}_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \underline{N}_\infty{}^n . \tag{46.6}$$

47. Nous allons montrer que l'on a le

Théorème 47.1. $L^n\underline{L}^n$, $\underline{L}^m L^m$, $L^p\underline{L}^p$ et $\underline{L}^q L^q$ *sont permutables, c'est-à-dire on a*

$$L^n \underline{L}^{m+n} L^m = \underline{L}^m L^{m+n} \underline{L}^n , \qquad L^m \underline{L}^{m+n} L^n = \underline{L}^n L^{m+n} \underline{L}^m , \tag{47.1}$$

$$L^n \underline{L}^n L^m \underline{L}^m = L^m \underline{L}^m L^n \underline{L}^n , \qquad \underline{L}^n L^n \underline{L}^m L^m = \underline{L}^m L^m \underline{L}^n L^n . \tag{47.2}$$

A l'aide de (44.1), un vecteur quelconque x peut s'écrire d'une seule manière

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 ,$$
$$x_1 \in N^m \odot \underline{N}^n , \quad x_2 \in N^m \odot N_n , \quad x_3 \in \underline{N}^n \odot \underline{N}_m , \quad x_4 \in N_n \odot \underline{N}_m .$$

On a alors

$$L^n \underline{L}^{m+n} L^m x = L^n \underline{L}^{m+n} L^m (x_3 + x_4) .$$

$L^m x_3$ appartenant à $\underline{N}^{m+n}$, on a

$$L^n \underline{L}^{m+n} L^m x = L^n \underline{L}^{m+n} L^m x_4 .$$

x_4 appartenant à $\underline{N}_m$, on a $\underline{L}^m L^m x_4 = x_4$ et x_4 appartenant à N_n, on a $L^n \underline{L}^n x_4 = x_4$. On a donc

$$L^n \underline{L}^{m+n} L^m x = x_4 .$$

On voit de même

$$\underline{L}^m L^{m+n} \underline{L}^n x = x_4 .$$

La première des formules (47.1) est donc établie.

Les deux membres de la première des formules (47.2) sont égaux à $L^r\underline{L}^r$, r désignant le plus grand des entiers m et n.

On peut démontrer de la même manière les autres formules.

Si l'on pose

$$x_0{}^1 = (I - \underline{L}L)(I - L\underline{L})x ,$$

on a

$$\begin{aligned} L x_0{}^1 &= L(I - \underline{L}L)(I - L\underline{L})x \\ &= (L - L\underline{L}L)(I - L\underline{L})x = o . \end{aligned}$$

On a de même $\underline{L}x_0^1=o$. Par suite $x_0^1\in N_0^1$.

On a immédiatement

$$x_0^1=(I-L\underline{L})(I-\underline{L}L)x_0^1 \,,$$

d'où l'on déduit

$$(I-\underline{L}L)(I-L\underline{L})(x-x_0^1)=o \,.$$

D'une manière générale, on peut déterminer $x_q^p\in N_q^p$ de manière que

$$(47.3) \qquad (I-L^k\underline{L}^k)(I-\underline{L}^{n-k}L^{n-k})(x-\sum_{r+s<n} x_s^r)=o \qquad (0<k<n) \,.$$

Pour le démontrer par l'induction par rapport à n, nous supposons la formule (47.3) démontrée.

Nous définissons x_q^p pour $p+q=n$ par

$$(47.4) \qquad x_q^p=(I-\underline{L}^{q+1}L^{q+1})(I-\underline{L}^pL^p)(x-\sum_{r+s<n} x_s^r) \,.$$

Puisque

$$L^p(I-\underline{L}^pL^p)=O \,, \qquad \underline{L}^{q+1}(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})=O \,,$$

on a $x_q^p\in N^p\odot\underline{N}^{q+1}$.

En outre, on a, en tenant compte de la permutabilité,

$$\begin{aligned}
&L^q\underline{L}^q(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})(I-\underline{L}^pL^p)\\
&\quad=(I-\underline{L}^pL^p)(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})L^q\underline{L}^q\\
&\quad=(I-\underline{L}^pL^p)(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})(I-(I-L^q\underline{L}^q))\\
&\quad=(I-\underline{L}^pL^p)(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})-(I-\underline{L}^pL^p)(I-L^q\underline{L}^q) \,.
\end{aligned}$$

On peut poser $k=q$, $n-k=p$ dans (47.3). On a donc

$$L^q\underline{L}^qx_q^p=(I-\underline{L}^pL^p)(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})(x-\sum_{r+s<n} x_s^r)=x_q^p\in N_q \,.$$

On peut démontrer de même $x_q^p\in \underline{N}_{p+1}$. x_q^p appartient donc à N_q^p. Il nous reste à démontrer

$$(47.5) \qquad (I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})(I-\underline{L}^pL^p)(x-\sum_{r+s\leqq n} x_s^r)=o \,.$$

x_s^r appartenant à N_s^r pour $r+s=n$, on a

$$L^{q+1}\underline{L}^{q+1}x_s^r=o \quad \text{ou} \quad x_s^r$$

suivant que $s<q$ ou $s>q$ et

$$\underline{L}^pL^px_s^r=o \quad \text{ou} \quad x_s^r$$

suivant que $r<p$ ou $r>p$. On a donc

$$(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})(I-\underline{L}^pL^p)x_s^r=x_q^p \quad \text{ou} \quad o$$

suivant que $r=p$, $s=q$ ou non. Le premier membre de la relation à démontrer peut s'écrire

$$(47.6) \qquad (I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})(I-\underline{L}^pL^p)(x-\sum_{r+s<n} x_s^r)-x_q^p \,.$$

Cette expression est égale à o d'après la définition de x_q^p.

Cette démonstration nous montre que les x_q^p se déterminent d'une seule manière.

En effet, si l'on a (47.5), on doit avoir (47.4), car le premier membre de (47.5) est égal à l'expression (47.6). On est donc parvenu à ce

Théorème 47.2. *A chaque vecteur $x \in \mathfrak{R}$, on peut associer d'une seule manière une série $\sum x_q^p (p=1, 2, \cdots; q=0, 1, \cdots)$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

(i) $x_q^p \in N_q^p$;

(ii) *On a* (47.3) *pour* $0<k<n$.

Remarque 1. Si l'on a (i) et (ii), nous écrirons $x \equiv \sum x_q^p$ (mod A), A désignant le sous-espace formé de tous les vecteurs x tels que $x_q^p = o$ ($p=1, 2, \cdots$; $q=0, 1, \cdots$). Il est clair que si

$$x \equiv \sum x_q^p , \qquad y \equiv \sum y_q^p \qquad (\text{mod } A),$$

on a

$$\lambda x \pm \mu y \equiv \sum (\lambda x_q^p + \mu y_q^p) \qquad (\text{mod } A).$$

n désignant un entier positif quelconque, on a

$$L^n \underline{L}^n x' = x' \qquad \underline{L}^n L^n x'' = x''$$

pour $x' \in N_\infty$, $x'' \in \underline{N}_\infty$. On a donc

$$(I - L^p \underline{L}^p)(I - \underline{L}^q L^q) x = o$$

pour $x \in N_\infty \oplus \underline{N}_\infty$, $p>0$, $q>0$. Par suite

$$A \supseteq N_\infty \oplus \underline{N}_\infty . \tag{47.7}$$

Remarque 2. Si $p+q \leqq n$, on a

$$(I - L^p \underline{L}^p)(I - \underline{L}^q L^q)(x - \sum_{r+s<n} x_s^r) = o . \tag{47.8}$$

C'est la généralisation de la formule (47.3). Celle-ci entraîne

$$(I - L^p \underline{L}^p)(I - \underline{L}^q L^q)(x - \sum_{r+s<p+q} x_s^r) = o .$$

Mais, pour $p+q \leqq r+s<n$, on a

$$(I - L^p \underline{L}^p)(I - \underline{L}^q L^q) x_s^r = o$$

comme nous avons remarqué plus haut.

48. Etudions le sous-espace A introduit au n° précédent.

Théorème 48.1. *A chaque vecteur $x \in A$ on peut associer deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} x_\infty^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^\infty$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

(i′) $x_\infty^n \in N_\infty^n$ $(n=1, 2, \cdots)$;

(ii′) *On a*

$$(I - \underline{L}^m L^m)(x - \sum_{n=1}^{m} x_\infty^n) = o \tag{48.1}$$

pour $m=1, 2, \cdots$;

(i″) $x_n^\infty \in \underline{N}_\infty^{n+1}$ $(n=0, 1, \cdots)$;

(ii″) *On a*

$$(I - L^m \underline{L}^m)(x - \sum_{n=0}^{m-1} x_n^\infty) = o \tag{48.1′}$$

pour $m=1, 2, \cdots$

Supposons, par exemple, les conditions (i′) et (ii′) remplies. La relation (48.1) est équivalente à

$$x_{\infty}^{m}=(I-\underline{L}^{m}L^{m})(x-\sum_{n=1}^{m-1}x_{\infty}^{n}) . \tag{48.2}$$

On a en particulier

$$x_{\infty}^{1}=(I-\underline{L}L)x .$$

Les conditions (i′) et (ii′) déterminent donc complètement les x_{∞}^{m}.

Il est à démontrer que le vecteur x_{∞}^{m} défini par (48.2) appartient à N_{∞}^{m} en supposant $x_{\infty}^{n}\in N_{\infty}^{n}$ pour $n<m$.

On a évidemment $x_{\infty}^{m}\in N^{m}$, parce que

$$L^{m}(I-\underline{L}^{m}L^{m})=o .$$

(48.2) peut encore s'écrire

$$x_{\infty}^{1}+\cdots+x_{\infty}^{m}=(I-\underline{L}^{m}L^{m})x .$$

En remarquant $L^{m-1}x_{\infty}^{n}=o$ $(n<m)$, on a

$$\begin{aligned}\underline{L}^{m-1}L^{m-1}x_{\infty}^{m}&=(I-\underline{L}^{m}L^{m})\underline{L}^{m-1}L^{m-1}x\\&=(I-\underline{L}^{m}L^{m})(I-(I-\underline{L}^{m-1}L^{m-1}))x\\&=(I-\underline{L}^{m}L^{m})(x-\sum_{n=1}^{m-1}x_{\infty}^{n})=x_{\infty}^{m} ,\end{aligned}$$

d'où $x_{\infty}^{m}\in\underline{N}_{m-1}$.

Par hypothèse, on a $x_{\infty}^{n}\in N_{\infty}$, d'où $L^{p}\underline{L}^{p}x_{\infty}^{n}=x_{\infty}^{n}$ quelque grand que soit p. Par suite

$$\begin{aligned}L^{p}\underline{L}^{p}x_{\infty}^{m}&=(I-\underline{L}^{m}L^{m})L^{p}\underline{L}^{p}(x-\sum_{n=1}^{m-1}x_{\infty}^{n})\\&=(I-\underline{L}^{m}L^{m})((I-(I-L^{p}\underline{L}^{p}))x-\sum_{n=1}^{m-1}x_{\infty}^{n}) .\end{aligned}$$

Or, on a par hypothèse

$$(I-\underline{L}^{m}L^{m})(I-L^{p}\underline{L}^{p})x=o .$$

Donc

$$L^{p}\underline{L}^{p}x_{\infty}^{m}=(I-\underline{L}^{m}L^{m})(x-\sum_{n=1}^{m-1}x_{\infty}^{n})=x_{\infty}^{m} .$$

p étant arbitraire, on a $x_{\infty}^{m}\in N_{\infty}$.

On peut démontrer de même que (i″) et (ii″) déterminent d'une seule manière les vecteurs $x_{n}^{\infty}\in N_{\infty}^{n+1}$.

Considérons en particulier un vecteur $x\in A$ tel que $x_{\infty}^{n}=o$. On a alors

$$(I-\underline{L}^{m}L^{m})x=o \tag{48.3}$$

qui est équivalente à $x=\underline{L}^{m}L^{m}x$. Par suite x appartient à $\underline{N}_{\infty}$.

Réciproquement, un vecteur quelconque $x\in\underline{N}_{\infty}$ satisfait à (48.3) quel que soit m. Par suite l'ensemble de tous les vecteurs $x\in A$ tels que $x_{\infty}^{n}=o$ est le sous-espace $\underline{N}_{\infty}$. Nous pouvons donc écrire $x\equiv\sum x_{\infty}^{n}$ (mod $\underline{N}_{\infty}$).

De même, l'ensemble de tous les vecteurs $x\in A$ tels que $x_{n}^{\infty}=o$ est le sous-espace N_{∞}. Nous écrivons donc $x\equiv\sum x_{n}^{\infty}$ (mod N_{∞}). L'ensemble de tous les vecteurs $x \in A$ tels que $x_{\infty}{}^{n}=o$, $x_{n}{}^{\infty}=o$, est le sous-espace $N_{\infty\infty}=N_{\infty}\odot\underline{N}_{\infty}$. Nous écrivons donc

$$x \equiv \sum_{n=1}^{\infty} x_{\infty}{}^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n}{}^{\infty} \quad (\mathrm{mod}\ N_{\infty\infty})\,. \tag{48.4}$$

Il pourra arriver, dans certains cas, que l'on a $N_{\infty}{}^{n}=\{o\}$ pour $n=1, 2, \cdots$. Cela signifie que l'on a $N_{\infty}{}^{\infty}=\{o\}$. x étant un vecteur quelconque de A, on a

$$(I-L^{m}\underline{L}^{m})(I-\underline{L}^{n}L^{n})x=o$$

quels que soient les entiers positifs m et n. Cette relation peut s'écrire

$$(I-\underline{L}^{n}L^{n})x=L^{m}\underline{L}^{m}(I-L^{n}\underline{L}^{n})x\,,$$

d'où l'on conclut $(I-\underline{L}^{n}L^{n})x \in N_{\infty}$.

Or, on a

$$L^{n}(I-\underline{L}^{n}L^{n})x=o\,,$$

d'où l'on déduit $(I-\underline{L}^{n}L^{n})x \in N^{n}$. $N_{\infty}{}^{\infty}=\{o\}$ entraîne donc

$$(I-\underline{L}^{n}L^{n})x=o$$

qui peut encore s'écrire $x=\underline{L}^{n}L^{n}x$. On en conclut $x \in \underline{N}_{\infty}$.

On verra de même que si l'on a $N_{n}{}^{\infty}=\{o\}$ pour $n=0, 1, \cdots$, on a $A=N_{\infty}$. On peut donc énoncer le

Théorème 48.2. *Si l'on a* $N_{\infty}{}^{m}=\{o\}$ $(m=1, 2, \cdots)$, *A coïncide avec* $\underline{N}_{\infty}$; *si l'on a* $N_{n}{}^{\infty}=\{o\}$ $(n=0, 1, \cdots)$, *A coïncide avec* N_{∞}; *si l'on a* $N_{\infty}{}^{m}=\{o\}$, $N_{n}{}^{\infty}=\{o\}$ $(m=1, 2, \cdots; n=0, 1, \cdots)$, *$A$ coïncide avec* $N_{\infty\infty}$.

49. Nous voulons maintenant démontrer le

Théorème 49.1. *Si* $x \equiv \sum x_{q}{}^{p}$ (mod A), *on a* $Lx \equiv \sum Lx_{q}{}^{p}$ (mod A), *c'est-à-dire on peut appliquer l'opérateur L à la serie* $\sum x_{q}{}^{p}$ *terme à terme.*

Soit

$$y=Lx \equiv \sum y_{q}{}^{p} \qquad (\mathrm{mod}\ A)$$

et supposons que l'on ait

$$y_{q}{}^{p}=\begin{cases} Lx_{q-1}^{p+1} & (q>0) \\ o & (q=0) \end{cases} \tag{49.1}$$

pour $p+q<n$. Il suffit de montrer que l'on a (49.1) pour $p+q=n$. $y_{q}{}^{p}(p+q=n)$ est défini par

$$y_{q}{}^{p}=(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})(I-\underline{L}^{p}L^{p})(y-\sum_{r+s<n} y_{s}{}^{r})\,.$$

Or, on a

$$y-\sum_{r+s<n} y_{s}{}^{r}=L(x-\sum_{r+s<n} x_{s}{}^{r}) \in N_{1}$$

d'où l'on déduit

$$(I-\underline{L}^{p}L^{p})(y-\sum_{r+s<n} y_{s}{}^{r}) \in N_{1}, \qquad y_{q}{}^{p} \in N_{1}\,.$$

On a donc

$$y_{q}{}^{p}=L\underline{L}(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})L\underline{L}(I-\underline{L}^{p}L^{p})L(x-\sum_{r+s<n} x_{s}{}^{r})\,.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\underline{L}(I-L^{q+1}\underline{L}^{q+1})L&=\underline{L}L(I-L^q\underline{L}^{q+1}L)\\&=\underline{L}L(I-\underline{L}L^{q+1}\underline{L}^q)\\&=\underline{L}L(I-L^q\underline{L}^q)\,,\end{aligned}$$

$$\underline{L}(I-\underline{L}^\nu L^\nu)L=(I-\underline{L}^{\nu+1}L^{\nu+1})-(I-\underline{L}L)\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}y_q{}^\nu=&L(I-L^q\underline{L}^q)(-\underline{L}^{\nu+1}L^{\nu+1})(x-\sum_{r+s<n}x_s{}^r)\\&+L(I-L^q\underline{L}^q)(I-\underline{L}L)(x-\sum_{r+s<n}x_s{}^r)\\=&Lx_{q-1}^{\nu+1}\,.\end{aligned}$$

On obtient de même le

Théorème 49.1′. *Si* $x\equiv\sum x_q{}^\nu$ (mod A), *on a* $\underline{L}x\equiv\sum\underline{L}x_q{}^\nu$ (mod A), *c'est-à-dire on peut appliquer l'opérateur* $\underline{L}$ *à la série* $\sum x_q{}^\nu$ *terme à terme.*

On obtient un résultat analogue par rapport à la série (48.4), c'est-à-dire on a le

Théorème 49.2. *Si,* x *étant un vecteur de* A, *on a* (48.4), *on a*

$$Lx\equiv\sum_{n=1}^{\infty}Lx_\infty{}^n+\sum_{n=0}^{\infty}Lx_n{}^\infty\qquad(\text{mod }N_{\infty\infty})\,,\tag{49.2}$$

$$\underline{L}x\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\underline{L}x_\infty{}^n+\sum_{n=0}^{\infty}\underline{L}x_n{}^\infty\qquad(\text{mod }N_{\infty\infty})\,.\tag{49.2′}$$

Le vecteur $y=Lx$ appartenant à A, on peut écrire

$$y\equiv\sum y_\infty{}^n+\sum y_n{}^\infty\qquad(\text{mod }N_{\infty\infty})\,.$$

Il est à démontrer

$$\begin{aligned}&y_\infty{}^n=Lx_\infty{}^{n+1}&&(n=1,\,2,\,\cdots)\,,\\&y_n{}^\infty=\begin{cases}Lx_{n-1}^\infty\\o\end{cases}&&\begin{matrix}(n=1,\,2,\,\cdots)\\(n=0).\end{matrix}\end{aligned}$$

Supposons que l'on ait $y_\infty{}^n=Lx_\infty{}^{n+1}$ pour $n<m$. On a alors

$$\begin{aligned}y_\infty{}^m&=(I-\underline{L}^mL^m)L(x-\sum_{n=1}^{m-1}x_\infty{}^{n+1})\\&=L\underline{L}(I-\underline{L}^mL^m)L(x-\sum_{n-1}^{m-1}x_\infty{}^{n+1})\\&=L((I-\underline{L}^{m+1}L^{m+1})-(I-\underline{L}L))(x-\sum_{n=1}^{m}x_\infty{}^n)\\&=L(I-\underline{L}^{m+1}L^{m+1})(x-\sum_{n=1}^{m}x_\infty{}^n)=Lx_\infty{}^{m+1}\,.\end{aligned}$$

$y_m{}^\infty$ est défini par

$$y_m{}^\infty=(I-L^{m+1}\underline{L}^{m+1})(y-\sum_{n=0}^{m-1}y_n{}^\infty)\,.$$

Supposons que l'on ait $y_n{}^\infty=Lx^\infty{}_{n-1}$ pour $n=1,\,\cdots,\,m-1$, $y_0{}^\infty$ étant égal à o. On a alors

$$\begin{aligned} y_m{}^\infty &= (I - L^{m+1}\underline{L}^{m+1})L(x - \sum_{n=1}^{m-1} x_{n-1}^\infty) \\ &= L(I - L^m\underline{L}^m)(x - \sum_{n=1}^{m-1} x_{n-1}^\infty) = Lx_{m-1}^\infty . \end{aligned}$$

La formule (49.2) est donc démontrée. On peut de même démontrer (49.2′).

50. Supposons $\mu < \infty$, $\nu = \infty$. $N_0{}^n = \{o\}$, $N_\infty{}^n = \{o\}$ pour $n > \mu$. $N_q{}^p$ et $N_0{}^{p+q}$ se correspondant d'une manière biunivoque par L^q, on a $N_q{}^p = \{o\}$ pour $p+q > \mu$; $N_\infty{}^{n-k}$ et $N_\infty{}^n$ se correspondant par L^k, on a $N_\infty{}^{n-k} = \{o\}$ pour $n > \mu$, k étant un entier positif quelconque moindre que n. Tous les $N_\infty{}^n$ sont donc $\{o\}$ et $N_\infty{}^\infty = \{o\}$. D'après le théorème 48.2, A coïncide avec $\underline{N}_\infty$.

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de $N_q{}^p$, on peut poser

$$x' = \sum x_q{}^p , \qquad x = x' + x''$$

et x'' appartient à A. Par suite

$$\mathfrak{R} = N^{\infty\infty} \obar \underline{N}_\infty . \tag{50.1}$$

Si $\underline{N}_\infty{}^\infty = \{o\}$, $A = \underline{N}_\infty$ coïnciderait, d'après le théorème 48.2, avec $N_{\infty\infty}$, et on aurait $N_n = \underline{N}_\infty$ pour $n \geqq \mu$ contrairement à l'hypothèse $\nu = \infty$. On a donc $\underline{N}_\infty{}^\infty \supset \{o\}$.

x'' étant un vecteur de $\underline{N}_\infty$, on peut écrire

$$x'' \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x_n{}^\infty \qquad (\mathrm{mod}\ N_{\infty\infty}) .$$

Nous écrirons alors

$$x \equiv \sum x_q{}^p + \sum x_n{}^\infty \qquad (\mathrm{mod}\ N_{\infty\infty}) . \tag{50.2}$$

Pour que x appartienne à N^μ, il faut d'abord que l'on ait $x_n{}^\infty = o$ $(n = 0, 1, \cdots)$, car

$$L^\mu x \equiv \sum L^\mu x_n{}^\infty \qquad (\mathrm{mod}\ N_{\infty\infty}) .$$

x'' appartient donc à $N_{\infty\infty}$. Puis $L^\mu x'' = o$ exige $x'' = o$. Par suite on a

$$N^\mu = \sum_{p+q \leqq \mu} \obar N_q{}^p \tag{50.3}$$

et $N_q{}^p \supset \{o\}$ pour $p+q = \mu$.

En somme, nous avons le

Théorème 50.1. *Si* $\mu < \infty$, $\nu = \infty$, *on a* (50.1), (50.3) *et* $N^{\infty\infty} = N^\mu$, $A = \underline{N}_\infty$, $\underline{N}_\infty{}^\infty \supset \{o\}$; *si* $\mu = \infty$, $\nu < \infty$ *on a* $A = N_\infty$, $N_\infty{}^\infty \supset \{o\}$ *et*

$$\mathfrak{R} = N^{\infty\infty} \odot N_\infty , \tag{50.1′}$$

$$N^{\infty\infty} = \sum_{p+q \leqq \nu} \obar N_q{}^p . \tag{50.3′}$$

S'il n'existe qu'un nombre fini de $N_q{}^p$ tels que $N_q{}^p \supset \{o\}$, un vecteur quelconque x peut s'écrire

$$x = \sum x_q{}^p + x' ,$$

x' appartenant à A. On a donc le

Théorème 50.2. *S'il n'existe qu'un nombre fini de* $N_q{}^p$ *tels que* $N_q{}^p \supset \{o\}$, on a

$$\mathfrak{R} = N^{\infty\infty} \obar A .$$

III. Le cas où un endomorphisme et un de ses suppléments admettent leurs adjoints

51. Nous étudions dans cette section le cas où un endomorphisme L et un supplément $\underline{L}$ admettent respectivement leurs adjoints. Le raisonnement au n° 42 s'applique ici et l'on a le

Théorème 51.1. *Si un endomorphisme L et un supplément $\underline{L}$ admettent respectivement leurs adjoints, l'adjoint de $\underline{L}$ est un supplément de l'adjoint de L.*

Nous définissons ${}^{n}N^*$, ${}_{n}N^*$, ${}_{n}\underline{N}^*$, ${}^{n}\underline{N}^*$, comme dans la section II du chapitre III. Posons de plus

$$
{}^{\infty}N^*=\bigcup{}^{n}N^*, \qquad {}_{\infty}N^*=\bigcap{}_{n}N^*,
$$
$$
{}^{\infty}\underline{N}^*=\bigcup{}^{n}\underline{N}^*, \qquad {}_{\infty}\underline{N}^*=\bigcap{}_{n}\underline{N}^*,
$$
$$
{}_{q}{}^{p}N^*={}_{p-1}^{q+1}\underline{N}^*={}^{p}N^*\odot{}^{q+1}\underline{N}^*\odot{}_{q}N^*\odot{}_{p-1}\underline{N}^*,
$$
$$
{}_{\infty}{}^{n}N^*={}^{n}N^*\odot{}_{n-1}\underline{N}^*\odot{}_{\infty}N^*, \quad {}_{\infty}{}^{n}\underline{N}^*={}^{n}\underline{N}^*\odot{}_{n-1}N^*\odot{}_{\infty}\underline{N}^*.
$$

Désignons par μ^*, ν^* les entiers relatifs à l'adjoint de L qui correspondent aux entiers μ, ν relatifs à L.

Comme au n° 43, on peut démontrer que N_q^p et ${}_{m}{}^{n}N^*$ sont orthogonaux sauf le cas de $p=m+1$, $q=n-1$. Peut-on dire alors que ${}_{m}{}^{n}N^*$ et N_{n-1}^{m+1} sont conjugués l'un à l'autre?

On voit, en tenant compte de (44.1), qu'aucun vecteur $\nsim o^*$ de ${}_{m}{}^{n}N^*$ n'est orthogonal à $\underline{N}^n\odot\underline{N}_m$. De même, aucun vecteur $\nsim o^*$ de ${}_{m}{}^{n}N^*(={}_{n-1}^{m+1}\underline{N}^*)$ n'est orthogonal à $N^{m+1}\odot N_{n-1}$. Mais ${}_{m}{}^{n}N^*$ est orthogonal à $N^m\oplus N_n$.

Appliquons le théorème 12.1, en posant

$$
A^1=N^m, \qquad A^2=N^{m+1}, \qquad A_1=N_{n-1}, \qquad A_2=N_n,
$$
$$
B^1=\underline{N}^{n-1}, \qquad B^2=\underline{N}^n, \qquad B_1=\underline{N}_m, \qquad B_2=\underline{N}_{m+1}.
$$

Les formules (9.5) deviennent (7.1), (7.1′), (7.2), (7.2′), D étant égal à A_2^1. On a donc

$$
\{A^1\oplus A_2\}\obar A_1^2\supseteqq A^2\odot A_1.
$$

Cela signifie que l'on a

$$
\{N^m\oplus N_n\}\obar N_{n-1}^{m+1}\supseteqq N^{m+1}\odot N_{n-1}.
$$

Donc aucun vecteur $\nsim o^*$ de ${}_{m}{}^{n}N^*$ ne peut être orthgonal à N_{n-1}^{m+1}.

Le théorème 43.1 est ainsi étendu au cas de l'endomorphisme d'ordre infini:

Théorème 51.2. *Si un endomorphisme L et un supplément $\underline{L}$ admettent respectivement leurs adjoints, N_q^p et ${}_{s}{}^{r}N^*$ sont orthogonaux sauf le cas de $r=q+1$, $s=p-1$; N_q^p et ${}_{p-1}^{q+1}N^*$ sont conjugués.*

On voit sans peine

$$
\mathfrak{N}=\{N^m\oplus N_n\oplus\underline{N}^{n-1}\oplus\underline{N}_{m+1}\}\obar N_{n-1}^{m+1}. \tag{51.1}
$$

Par suite

(51.2) $${}_m{}^nN_\perp{}^* = N^m \oplus N_n \oplus \underline{N}^{n-1} \oplus \underline{N}_{m+1} .$$

On a de même

(51.2′) $${}_\perp N_n{}^m = {}^nN^* \oplus {}_mN^* \oplus {}^{m-1}\underline{N}^* \oplus {}_{n+1}\underline{N}^* ,$$

(51.1′) $$\mathfrak{R} = \{{}^nN^* \oplus {}_mN^* \oplus {}^{m-1}\underline{N}^* \oplus {}_{n+1}\underline{N}^*\} \obar_{m-1}^{n+1} N^* .$$

Théorème 51.3. *Soit L un endomorphisme de $\mathfrak{R}$ admettant son adjoint. S'il existe un supplément $\underline{L}$ admettant son adjoint, on a*

$$\tilde{N}_n = N_n , \qquad \underline{\tilde{N}}_n = \underline{N}_n , \qquad {}_n\tilde{N}^* = {}_nN^* , \qquad {}_n\underline{\tilde{N}}^* = {}_n\underline{N}^* .$$

On sait que l'on a

$$N_n \obar \underline{N}^n = \mathfrak{R} , \qquad \tilde{N}_n \supseteq N_n .$$

Il suffit donc de montrer $\tilde{N}_n \odot \underline{N}^n = \{o\}$.

Soit $x \in \tilde{N}_n \odot \underline{N}^n$. x est orthogonal à ${}_\perp N_n = {}^nN^*$ et à ${}_n\underline{N}^*$. x est donc orthogonal à

$${}^nN^* \obar {}_n\underline{N}^* = \mathfrak{R}^* ;$$

ceci exige $x = o$. C.Q.F.D.

Corollaire 1. *On a*

$${}^nN_\perp{}^* = N_n , \qquad {}_\perp N^n = {}_nN^* .$$

En effet, on a ${}^nN^* = {}_\perp N_n$ et puis

$${}^nN_\perp{}^* = \tilde{N}_n = N_n .$$

A l'aide du théorème 26.2, on peut énoncer le

Corollaire 2. *On a*

$$\tilde{N}_\infty = N_\infty , \qquad {}_\infty\tilde{N}^* = {}_\infty N^* .$$

Le théorème 25.2 montre que l'on a

$${}^\infty N_\perp{}^* = \bigcap {}^nN_\perp{}^* = \bigcap N_n = N_\infty .$$

On a donc ${}^\infty N_\perp{}^* = N_\infty$. Celle-ci entraîne ${}_\perp N_\infty = {}^\infty\tilde{N}^*$. Par suite, on a le

Corollaire 3. *On a*

$${}^\infty N_\perp{}^* = N_\infty , \qquad {}_\perp N^\infty = {}_\infty N^* ;$$
$${}_\infty N_\perp{}^* = \tilde{N}^\infty , \qquad {}_\perp N_\infty = {}^\infty\tilde{N}^* .$$

52. Nous avons montré que l'on peut associer à un vecteur x une série $\sum x_q{}^p$ ($x_q{}^p \in N_q{}^p$). On peut de même associer à chaque vecteur $u^* \in \mathfrak{R}^*$ une série $\sum {}_q{}^pu^*$ (${}_q{}^pu^* \in {}_q{}^pN^*$). Nous écrirons alors $u^* \equiv \sum {}_q{}^pu^*$ (mod A^*), A^* désignant le sous-espace formé de tous les vecteurs u^* tels que ${}_q{}^pu^* = o^*$. Nous allons démontrer le

Théorème 52.1. *Si $x \equiv \sum x_s{}^r$ (mod A), $u^* \in {}_q{}^pN^*$, on a $u^*x = u^*x_{p-1}^{q+1}$; si $u^* \equiv \sum {}_s{}^ru^*$ (mod A^*), $x \in N_q{}^p$, on a $u^*x = {}_{p-1}^{q+1}u^*x$.*

D'après la fomule (44.1), où l'on pose $m = q+1$, $n = p$, on peut écrire

$$x = y + z + v + w ,$$
$$y \in N^{q+1} \odot \underline{N}^p , \qquad z \in N^{q+1} \odot N_p ,$$

$$v\in \underline{N}^{p}\odot\underline{N}_{q+1}\,,\qquad w\in N_{p}\odot\underline{N}_{q+1}\,.$$

z, v et w sont orthogonaux à

$${}_{q}^{p}N^{*}={}^{p}N^{*}\odot{}_{q}N^{*}\odot{}_{p-1}\underline{N}^{*}\odot{}^{q+1}\underline{N}^{*}\,,$$

et l'on a $u^{*}x=u^{*}y=u^{*}y_{p-1}^{q+1}$. Puisque

$$x_{s}^{r}=y_{s}^{r}+z_{s}^{r}+v_{s}^{r}+w_{s}^{r}\,,$$

il suffit donc de montrer que

$$z_{s}^{r}=v_{s}^{r}=w_{s}^{r}=o$$

pour $r=q+1$, $s=p-1$.

Considérons d'abord

$$z_{p-1}^{q+1}=(I-L^{p}\underline{L}^{p})(I-\underline{L}^{q+1}L^{q+1})(z-\sum_{r+s<n}z_{s}^{r})\,,$$

où $n=p+q$. Or, on a

$$(I-L^{p}\underline{L}^{p})z=o\,,\qquad (I-L^{p}\underline{L}^{p})(I-\underline{L}^{q+1}L^{q+1})z_{s}^{r}\in N_{s}^{r}\,.$$

z_{p-1}^{q+1} appartient donc à l'intersection de N_{p-1}^{q+1} et de $\sum_{r+s<n}\oplus N_{s}^{r}$. Par suite $z_{p-1}^{q+1}=o$.

On peut de même démontrer $v_{p-1}^{q+1}=o$.

Pour $r+s\leqq n(=p+q)$, on a

$$(I-\underline{L}^{r}L^{r})(I-L^{s+1}\underline{L}^{s+1})w=o\,,$$

d'où l'on déduit $w_{s}^{r}=o$, pour $r+s\leqq n$.

Comme nous avons associé à un vecteur quelconque x de A deux séries $\sum_{n=1}^{\infty}x_{\infty}^{n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty}x_{n}^{\infty}$ on peut associer, à un vecteur quelconque u^{*} de A^{*}, deux séries $\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\infty}^{n}u^{*}$ (${}_{\infty}^{n}u^{*}\in{}_{\infty}^{n}N^{*}$) et $\sum_{n=0}^{\infty}{}_{n}^{\infty}u^{*}$ (${}_{n}^{\infty}u^{*}\in{}^{n+1}{}_{\infty}N^{*}$) et écrire

$$u^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\infty}^{n}u^{*}+\sum_{n=0}^{\infty}{}_{n}^{\infty}u^{*}\qquad(\mathrm{mod}\ {}_{\infty}N^{*}\odot{}_{\infty}\underline{N}^{*})\,. \tag{52.1}$$

On a alors le

Théorème 52.2. *Si l'on a* (48.4), *on a* $u^{*}x=u^{*}x_{\infty}^{n}$ *ou* $u^{*}x_{n-1}^{\infty}$ *suivant que* $u^{*}\in{}^{n}{}_{\infty}\underline{N}^{*}$ *ou* ${}_{\infty}^{n}N^{*}$; *si l'on a* (52.1), *on a* $u^{*}x={}_{\infty}^{n}u^{*}x$ *ou* ${}_{n-1}^{\infty}u^{*}x$ *suivant que* $x\in\underline{N}_{\infty}^{n}$ *ou* N_{∞}^{n}.

Supposons par exemple $u^{*}\in{}_{\infty}^{n}N^{*}$. Si l'on pose

$$x'=x-x_{0}^{\infty}-x_{1}^{\infty}-\cdots-x_{n-1}^{\infty}\,,$$

on a

$$(I-L^{k}\underline{L}^{k})x'=o\qquad(k=1,\ \cdots,\ n)\,.$$

On a en particulier

$$x'=L^{n}\underline{L}^{n}x'\in N_{n}\,.$$

Par suite

$$u^{*}x=u^{*}(x'+x_{0}^{\infty}+x_{1}^{\infty}+\cdots+x_{n-1}^{\infty})=u^{*}x_{n-1}^{\infty}\,.$$

On peut achever de la manière analogue la démonstration dans les autres cas.

Le théorème 52.1 entraîne le

Théorème 52.3. *On a*

$$ {}^{\infty\infty}N_{\perp}{}^{*}=A, \qquad {}_{\perp}N^{\infty\infty}=A^{*}. $$

Soit, en effet, $x\equiv\sum x_q{}^p$ (mod A). u^* désignant un vecteur quelconque de ${}_{p-1}^{q+1}N^*$, on a $u^*x=u^*x_q{}^p$. Donc, pour que x soit orthogonal à ${}_{p-1}^{q+1}N^*$, il faut et il suffit que $x_q{}^p$ soit orthogonal à ${}_{p-1}^{q+1}N^*$, ce qui exige $x_q{}^p=o$.

53. Considérons le cas de $\mu<\infty$, $\nu=\infty$. On sait déjà que l'on a $N_q{}^p=\{o\}$ pour $p+q>\mu$ et $N_q{}^p\supset\{o\}$ pour $p+q=\mu$. $N_q{}^p$ et ${}_{p-1}^{q+1}N^*$ étant conjugués, on a ${}_{p-1}^{q+1}N^*\supset\{o^*\}$ pour $p+q=\mu$.

Si $m+n>\mu$, on a $N_{n-1}^{m+1}=\{o\}$ et les formules (51.1) et (51.2) entraînent ${}_n{}^mN_{\perp}{}^*=\mathfrak{R}$, ce qui exige ${}_n{}^mN^*=\{o^*\}$. On a donc

$$ {}^{\infty\infty}N^*=\sum_{p+q\leqq\mu}{}_q{}^pN^*, \qquad \mathfrak{R}^*={}^{\infty\infty}N^*\obar A^*. $$

Si $u^*\in{}_\infty{}^\infty\underline{N}^*$, u^* est orthogonal à $N^\mu(\subset\underline{N}^\infty)$ et à $\underline{N}_\infty$. D'après le théorème 50.1, la somme directe de N^μ et de $\underline{N}_\infty$ est $\mathfrak{R}$. On a donc nécessairement $u^*=o^*$. Par suite on a ${}_\infty{}^\infty\underline{N}^*=\{o^*\}$ et $A^*={}_\infty N^*$. Si $u^*\in{}_\infty N^*$, $u^*\underline{L}^m=o^*$ entraîne $u^*=o^*$. Si donc $u^*\underline{L}^m=o^*$, on a $u^*\in{}^{\infty\infty}N^*$. On en conclut que l'on a ${}^m\underline{N}^*={}^\mu\underline{N}^*$ pour $m>\mu$. Par suite, ${}_mN^*$ étant un sous-espace supplémentaire de ${}^m\underline{N}^*$, on a $\nu^*=\mu$.

Si l'on avait de plus ${}_\infty{}^\infty N^*=\{o^*\}$, on aurait $A^*={}_{\infty\infty}N^*$, $\mu^*=\mu$, ce qui exigerait $N_\infty{}^\infty=\{o\}$ contrairement à l'hypothèse. On a donc ${}_\infty{}^\infty\underline{N}^*\supset\{o^*\}$, ce qui exige $\mu^*=\infty$.

Cette démonstration montre de plus que si μ et ν sont finis, μ^* et ν^* sont aussi finis. On a alors $\mu=\nu=\mu^*=\nu^*$. Si $\mu=\nu=\infty$, on doit donc avoir $\mu^*=\nu^*=\infty$. Nous obtenons ainsi dans tous les cas le

Théorème 53.1. *Si L est un endomorphisme admettant son adjoint et s'il existe un supplément $\underline{L}$ admettant son adjoint, on a $\mu=\nu^*$ et $\nu=\mu^*$.*

54. Démontrons le

Théorème 54.1. *$\tilde{N}^{\infty\infty}\oplus A=\mathfrak{R}$ entraîne ${}^{\infty\infty}\tilde{N}^*\odot A^*=\{o^*\}$ et ${}^{\infty\infty}\tilde{N}^*\oplus A^*=\mathfrak{R}^*$ entraîne $\tilde{N}^{\infty\infty}\odot A=\{o\}$. Si donc on a*

$$ \tilde{N}^{\infty\infty}\oplus A=\mathfrak{R}, \qquad {}^{\infty\infty}\tilde{N}^*\oplus A^*=\mathfrak{R}^*, $$

on a

$$ \tilde{N}^{\infty\infty}\obar A=\mathfrak{R}, \qquad {}^{\infty\infty}\tilde{N}^*\obar A^*=\mathfrak{R}^*. \tag{54.1} $$

Dans ce cas, A et A^* sont conjugués.

Soit $u^*\in{}^{\infty\infty}\tilde{N}^*\odot A^*$. Puisque $A^*={}_\perp N^{\infty\infty}$, u^* est orthogonal à $\tilde{N}^{\infty\infty}$. Puisque $A={}^{\infty\infty}N_\perp{}^*$, u^* est orthogonal à A. u^* est donc orthogonal à $A\oplus\tilde{N}^{\infty\infty}$ et $A\oplus\tilde{N}^{\infty\infty}=\mathfrak{R}$ entraîne $u^*=o^*$.

De même $A^*\oplus{}^{\infty\infty}\tilde{N}^*=\mathfrak{R}^*$ entraîne $A\odot\tilde{N}^{\infty\infty}=\{o\}$.

Si l'on a (54.1), un vecteur de A^* orthogonal à A est nécessairement o^* et réciproquement. A et A^* sont donc conjugués.

Si $x\equiv\sum x_q{}^p$ (mod A) et si de plus $x\in\tilde{N}^{\infty\infty}$, nous écrirons $x\simeq\sum x_q{}^p$. Si l'on a

(54.1), un vecteur quelconque de $\mathfrak{R}$ peut s'écrire d'une seule manière

$$x=x'+x'' , \qquad x'\in\tilde{N}^{\infty\infty} , \qquad x''\in A .$$

On a alors

$$x'\simeq\sum_{p,q}x_q{}^p , \qquad x''\equiv\sum_{n=1}^{\infty}x_{\infty}{}^n+\sum_{n=0}^{\infty}x_n{}^{\infty} \qquad (\mathrm{mod}\ N_{\infty\infty}) .$$

Nous écrirons alors

$$x\equiv\sum_{p,q}x_q{}^p+\sum_{n=1}^{\infty}x_{\infty}{}^n+\sum_{n=0}^{\infty}x_n{}^{\infty} \qquad (\mathrm{mod}\ N_{\infty\infty}) .$$

Théorème 54.2. *Si l'on a* (54.1), $N_{\infty}{}^{n}$ *et* ${}_{\infty}{}^{n}\underline{N}^*$ *sont conjugués et* $\underline{N}_{\infty}{}^{n}$ *et* ${}_{\infty}{}^{n}N^*$ *sont conjugués.*

Soit $u^*\in{}_{\infty}{}^{n}N^*$. Si l'on a (48.4), on a, d'après le théorème 52.2, $u^*x=u^*x^{\infty}_{n-1}$. Si u^* est orthogonal à N^{∞}_{n-1}, u^* est orthogonal à x. A et A^* étant conjugués, on a $u^*=o^*$. C.Q.F.D.

Si $x\in A$, Lx appartient aussi à A; c'est une conséquence immédiate du théorème 49.1. De même, si $u^*\in A^*$, u^*L appartient à A^*.

u^* désignant un vecteur quelconque de A^*, la condition pour que x appartienne à $\tilde{N}^{\infty\infty}$ est $u^*x=o$. u^*L appartenant à A^*, on a $u^*Lx=o$ pour $u^*\in A^*$. Lx appartient donc à $\tilde{N}^{\infty\infty}$. On a donc le

Théorème 54.3. *Si* $x\simeq\sum_{p,q}x_q{}^p$, *on a*

$$Lx\simeq\sum_{p,q}Lx_q{}^p , \qquad Lx\simeq\sum_{p,q}Lx_q{}^p ;$$

Si $u^*\simeq\sum_{p,q}{}_q{}^pu^*$, *on a*

$$u^*L\simeq\sum_{p,q}{}_q{}^pu^*L , \qquad u^*L\simeq\sum_{p,q}{}_q{}^pu^*\underline{L} .$$

Considérons un vecteur quelconque $x\in A$ orthogonal à ${}_{\infty}{}^{\infty}N^*$. Soit (48.4) le développement de x. u^* désignant un vecteur quelconque de ${}_{\infty}{}^{n}N^*$, on a

$$u^*x=u^*x^{\infty}_{n-1}=o ,$$

d'où $x^{\infty}_{n-1}=o$. Par suite x appartient à N_{∞} et l'on a ${}_{\infty}{}^{\infty}N_{\perp}{}^*=N_{\infty}\obar\tilde{N}^{\infty\infty}$. On a de même ${}_{\infty}{}^{\infty}\underline{N}_{\perp}{}^*=\underline{N}_{\infty}\obar\tilde{N}^{\infty\infty}$. Puis, en tenant compte du théorème 25.2, on a

$$\{{}_{\infty}{}^{\infty}N^*\obar{}_{\infty}{}^{\infty}\underline{N}^*\}_{\perp}=N_{\infty\infty}\obar\tilde{N}^{\infty\infty} .$$

On a donc le

Théorème 54.4. *Dans le cas où l'on a* (54.1), *on a*

$${}_{\infty}{}^{\infty}N_{\perp}{}^*=N_{\infty}\obar\tilde{N}^{\infty\infty}, \qquad {}^{\infty}{}_{\infty}\underline{N}_{\perp}{}^*=\underline{N}_{\infty}\obar\tilde{N}^{\infty\infty};$$

$${}_{\perp}N_{\infty}{}^{\infty}={}_{\infty}N^*\obar{}^{\infty\infty}\tilde{N}^* , \qquad {}_{\perp}\underline{N}_{\infty}{}^{\infty}={}_{\infty}\underline{N}^*\obar{}^{\infty\infty}\tilde{N}^*;$$

$$\{{}_{\infty}{}^{\infty}N^*\obar{}_{\infty}{}^{\infty}\underline{N}^*\}_{\perp}=N_{\infty\infty}\obar\tilde{N}^{\infty\infty}; \quad {}_{\perp}\{N_{\infty}{}^{\infty}\obar\underline{N}_{\infty}{}^{\infty}\}={}_{\infty\infty}N^*\obar{}^{\infty\infty}N^* .$$

55. Supposons enfin les relations suivantes remplies:

$$\tilde{N}^{\infty\infty}\oplus\tilde{N}_{\infty}{}^{\infty}\oplus\tilde{N}_{\infty}{}^{\infty}\oplus\underline{N}_{\infty\infty}=\mathfrak{R} , \tag{55.1}$$

$${}^{\infty\infty}\tilde{N}^*\oplus{}_{\infty}{}^{\infty}\tilde{N}^*\oplus{}_{\infty}{}^{\infty}\underline{\tilde{N}}^*\oplus{}_{\infty\infty}N^*=\mathfrak{R}^* . \tag{55.1'}$$

On voit immédiatement

$$A \supsetneqq \tilde{N}_\infty{}^\infty \oplus \underline{\tilde{N}}_\infty{}^\infty \oplus N_\infty{}^\infty .$$

$$A^* \supsetneqq {}_\infty{}^\infty\tilde{N}^* \oplus {}_\infty{}^\infty\underline{\tilde{N}}^* \oplus {}_\infty{}^\infty N^* .$$

D'après le théorème 54.1, on doit avoir ici les égalités.

N_∞ satisfaisant à la relation $\tilde{N}_\infty = N_\infty$, on a $N_\infty \supsetneqq \tilde{N}_\infty{}^\infty \oplus N_\infty{}^\infty$.

Considérons un vecteur quelconque $x \in N_\infty \odot \underline{\tilde{N}}_\infty{}^\infty$. D'après le théorème 54.4, x est orthogonal à ${}_\infty{}^\infty\tilde{N}^*$, ${}_\infty\underline{N}^*$. Il est donc orthogonal à

$${}_\infty{}^\infty\tilde{N}^* \oplus {}_\infty\underline{N}^* \supsetneqq {}_\infty{}^\infty\tilde{N}^* \oplus {}_\infty{}^\infty\underline{\tilde{N}}^* \oplus {}_{\infty\infty}N = A^* .$$

A et A^* étant conjugués, on a $x = o$. Par suite

$$A = N_\infty \obar \underline{\tilde{N}}_\infty{}^\infty .$$

On a de même

$$A = \underline{N}_\infty \obar \tilde{N}_\infty{}^\infty .$$

$N_{\infty\infty}$ étant l'intersection de N_∞ et de $\underline{N}_\infty$, on a

$$N_\infty = N_{\infty\infty} \obar \tilde{N}_\infty{}^\infty , \qquad \underline{N}_\infty = N_\infty{}^\infty \odot \underline{\tilde{N}}_\infty{}^\infty .$$

On obtient ainsi le

Théorème 55.1. *Dans le cas où l'on a* (55.1), (55.1′), *on a*

$$\mathfrak{N} = \tilde{N}_\infty{}^\infty \obar \tilde{N}_\infty{}^\infty \obar \underline{\tilde{N}}^{\infty\infty} \obar N_{\infty\infty} , \qquad \mathfrak{N}^* = {}^{\infty\infty}\tilde{N}^* \obar {}_\infty{}^\infty\tilde{N}^* \obar {}_\infty{}^\infty\underline{\tilde{N}}^* \obar {}_{\infty\infty}N^* ;$$

$$A = \tilde{N}_\infty{}^\infty \obar \underline{\tilde{N}}_\infty{}^\infty \obar N_{\infty\infty} , \qquad A^* = {}_\infty{}^\infty\tilde{N}^* \obar {}_\infty{}^\infty\underline{\tilde{N}} \obar {}_{\infty\infty}N^* ;$$

$$N_\infty = \tilde{N}_\infty{}^\infty \obar N_{\infty\infty}, \ \underline{N}_\infty = \underline{\tilde{N}}_\infty{}^\infty \obar N_{\infty\infty}, \ {}_\infty N^* = {}_\infty{}^\infty\tilde{N}^* \obar {}_{\infty\infty}N^*, \ {}_\infty\underline{N}^* = {}_\infty{}^\infty\underline{\tilde{N}}^* \obar {}_{\infty\infty}N^* .$$

Un vecteur quelconque x de $\mathfrak{N}$ peut s'écrire d'une seule manière sous la forme

$$x = x' + x'' + y , \qquad x' \in \tilde{N}^{\infty\infty} , \qquad x'' \in \tilde{N}_\infty{}^\infty \obar \underline{\tilde{N}}_\infty{}^\infty , \qquad y \in N_{\infty\infty} .$$

Dans le cas particulier où l'on a $y = o$, nous écrirons

$$x \simeq \sum_{p,\,q} x_q{}^p + \sum_{m=1}^{\infty} x_\infty{}^m + \sum_{n=0}^{\infty} x_n{}^\infty . \tag{55.2}$$

De même, si u^* appartient à

$${}^{\infty\infty}\tilde{N}^* \obar {}_\infty{}^\infty\tilde{N}^* \obar {}_\infty{}^\infty\underline{\tilde{N}}^* ,$$

nous écrirons

$$u^* \simeq \sum_{p,\,q} {}_q{}^p u^* + \sum_{m=1}^{\infty} {}_\infty{}^m u^* + \sum_{n=0}^{\infty} {}_n{}^\infty u^* . \tag{55.2′}$$

On a alors le

Théorème 55.2. *Si l'on a* (55.2), (55.2′), *on a*

$$\begin{aligned} Lx &\simeq \sum Lx_q{}^p + \sum Lx_\infty{}^m + \sum Lx_n{}^\infty , \\ \underline{L}x &\simeq \sum \underline{L}x_q{}^p + \sum \underline{L}x^m{}_\infty + \sum \underline{L}x_n{}^\infty , \\ u^*L &\simeq \sum {}_q{}^p u^*L + \sum {}_\infty{}^m u^*L + \sum {}_n{}^\infty u^*L , \\ u^*\underline{L} &\simeq \sum {}_q{}^p u^*\underline{L} + \sum {}_\infty{}^m u^*\underline{L} + \sum {}_n{}^\infty u^*\underline{L} . \end{aligned}$$

Pour démontrer par exemple la première de ces relations, il suffit de montrer

$$L\{\tilde{N}_{\infty}^{\infty}\}\subseteqq\tilde{N}_{\infty}^{\infty}, \qquad L\{\underline{\tilde{N}}^{\infty\infty}\}\subseteqq\underline{\tilde{N}}_{\infty}^{\infty}. \tag{55.3}$$

La condition $x\in\tilde{N}_{\infty}^{\infty}$ est équivalente à

$$x\perp{}_{\infty}N^{*}\oplus{}^{\infty\infty}\tilde{N}^{*}.$$

Si $u^{*}\in{}_{\infty}N^{*}\oplus{}^{\infty\infty}\tilde{N}^{*}$, on a $u^{*}L\in{}_{\infty}N^{*}\oplus{}^{\infty\infty}\tilde{N}^{*}$. On a donc $u^{*}Lx=0$; puis

$$\underline{L}x\perp{}_{\infty}N^{*}\oplus{}^{\infty\infty}\tilde{N}^{*}.$$

Lx appartient donc à $\tilde{N}_{\infty}^{\infty}$.

Démontrons au lieu de la deuxième de (55.3), la relation

$$L\{\tilde{N}_{\infty}^{\infty}\}\subseteqq\tilde{N}_{\infty}^{\infty}.$$

Si $u^{*}\in{}^{\infty\infty}\tilde{N}^{*}$, $u^{*}\underline{L}$ appartient à ${}^{\infty\infty}\tilde{N}^{*}$. C'est une conséquence du théorème 54.3. Il suffit donc de montrer que si $u^{*}\in{}_{\infty}N^{*}$, $u^{*}\underline{L}$ appartient à ${}_{\infty}N^{*}$. Mais ceci est évident d'après la propriété de l'endomorphisme supplémentaire.

(à suivre)

TABLE DES MATIÈRES