Über die Zerlegung der Gruppencharaktere.

Von Kaoru SEKINO.

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$. Ist dann die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ eine lineare Gruppe mod p^n, wobei p eine ungerade Primzahl bedeutet, so lässt sich die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ genau angeben.[1] In der vorliegenden Note soll ein noch übrigbleibender Fall erledigt werden wobei $p=2$ ist.

1. Es sei also $\mathfrak{H}'$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}'$ eine volle lineare Gruppe mod $2^n (n \geqq 3)$. Somit denken wir uns

$$\mathfrak{H}'\tau=(z,\ z+1), \qquad \mathfrak{H}'\rho=(z,\ 5^{-1}z), \qquad \mathfrak{H}'\pi=(z,\ -z)\,.$$

Ferner seien

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}^{\#}+\mathfrak{H}^{\#}\pi, \qquad \mathfrak{H}^{\#}=\mathfrak{H}^0+\mathfrak{H}^0\rho+\cdots+\mathfrak{H}^0\rho^{2^{n-2}-1}\,,$$

$$\mathfrak{H}^0=\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}'\tau+\cdots+\mathfrak{H}'\tau^{2^n-1}\,.$$

Wegen

$$\mathfrak{H}'\rho^j\tau^i\rho^{-j}=\mathfrak{H}'\tau^{5^j i}\,, \tag{1}$$

$$\mathfrak{H}'\pi\tau^i\pi^{-1}=\mathfrak{H}'\tau^{-i} \tag{2}$$

und

$$\mathfrak{H}'\pi\rho^j\pi^{-1}=\mathfrak{H}'\rho^j \tag{3}$$

sind $\mathfrak{H}^{\#}$ und $\mathfrak{H}^0$ beide Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Ist nun e bzw. f der kleinste (pos.) Exponent derart, dass

$$\psi(\tau^e\sigma\tau^{-e})=\psi(\sigma) \qquad \text{bzw.} \qquad \psi(\rho^f\sigma\rho^{-f})=\psi(\sigma)$$

ist,[2] wobei ψ einen einfachen Charakter von $\mathfrak{H}'$ bedeutet.

2. Zunächst sei $e=1$. Es gibt also einen solchen einfachen Charakter χ^0 von $\mathfrak{H}^0$, dass

$$\chi^0(\sigma)=\psi(\sigma) \qquad \text{in} \quad \mathfrak{H}'$$

ist. Bezeichnet $\hat{\chi}^0$ einen erzeugenden Charakter der zyklischen Gruppe $\mathfrak{H}^0/\mathfrak{H}'$, so ist für alle i $(0 \leqq i \leqq 2^n-1)$

$$\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^i=\psi(\sigma) \qquad \text{in} \quad \mathfrak{H}'\,.$$

Da $\chi^0(\rho^f\sigma\rho^{-f})=\psi(\sigma)$ in $\mathfrak{H}'$ ist, muss für ein μ zwischen 0 und 2^n-1

$$\chi^0(\rho^f\sigma\rho^{-f})=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{\mu}$$

sein. Nach (1) ist $\chi^0(\rho^f\sigma\rho^{-f})\hat{\chi}^0(\rho^f\sigma\rho^{-f})^i=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{\mu+5^f i}$. Wenn nun f gleich 2^{n-2} ist, dann ist $\mu=0$. Falls f gleich $2^{f_1}(0 \leqq f_1 < n-2)$ ist, so ist $1-5^f$ genau durch

1) Z. Suetuna, „Zur Theorie der Gruppencharaktere", Jap. J. Math., **18** (1943), 729–744.

2) e, f und g bedeuten 1 oder eine Potenz von 2.

2^{f_1+2} teilbar. Andererseits haben wir

$$\chi^0(\rho^{\nu f}\tau\rho^{-\nu f})=\chi^0(\tau^{5^{\nu f}})=\chi^0(\tau)\hat{\chi}^0(\tau)^{\mu(1+5^f+\cdots+5^{(\nu-1)f})}.$$

Für $\nu=2^{n-2-f_1}$ muss

$$\mu(1+5^f+\cdots+5^{(\nu-1)f})\equiv 0 \pmod{2^n}$$

sein, folglich ist

$$\mu(1-5^{2^{n-2}})\equiv 0 \pmod{2^{n+f_1+2}}$$

und damit

$$\mu\equiv 0 \pmod{2^{f_1+2}}.$$

Daher ist die Kongruenz

$$i\equiv\mu+5^f i \pmod{2^n}$$

stets lösbar. Wir denken uns deshalb χ^0 so gewählt, dass

$$\chi^0(\rho^f\sigma\rho^{-f})=\chi^0(\sigma) \tag{4}$$

ist. Dann ist für einen einfachen Charakter χ^* der durch $\mathfrak{H}^0\rho^f$ erzeugten Gruppe $\mathfrak{H}^*$

$$\chi^*(\sigma)=\chi^0(\sigma) \qquad \text{in} \quad \mathfrak{H}^0,$$

und die g Charaktere von $\mathfrak{H}^\sharp$ $(fg=2^{n-2})$

$$\chi^\sharp(\sigma)\hat{\chi}^\sharp(\sigma)^j=\chi^\sharp_{\chi^*\hat{\chi}^{*j}}(\sigma), \qquad 0\leqq j\leqq g-1,$$

sind genau die χ^0 enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}^\sharp$, wobei $\hat{\chi}^\sharp$ bzw. $\hat{\chi}^*$ einen erzeugenden Charakter der zyklischen Gruppe $\mathfrak{H}^\sharp/\mathfrak{H}^0$ bzw. $\mathfrak{H}^*/\mathfrak{H}^0$ mit der Bedingung $\hat{\chi}^\sharp(\rho^f)=\hat{\chi}^*(\rho^f)$ bezeichnet.

Es wäre nun $\chi^\sharp(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^\sharp(\sigma)\hat{\chi}^\sharp(\sigma)^\nu$ $(\nu\not\equiv 0)$. Dann wäre

$$\chi^\sharp(\pi\rho^f\pi^{-1})=\chi^\sharp(\rho^f)=\chi^\sharp(\rho^f)\hat{\chi}^\sharp(\rho^f)^\nu.$$

Also müsste

$$f\nu\equiv 0 \qquad \pmod{2^{n-2}}$$

sein, folglich wäre

$$\nu\equiv 0 \qquad \pmod{g},$$

gegen unsere Annahme. Andererseits gilt nach (3) $\hat{\chi}^\sharp(\pi\sigma\pi^{-1})=\hat{\chi}^\sharp(\sigma)$, so dass nur folgende zwei Fälle möglich sind:

I) $\chi^\sharp(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^\sharp(\sigma)$. In diesem Fall gilt für einen einfachen Charakter Ξ von $\mathfrak{G}$

$$\Xi(\sigma)=\chi^\sharp(\sigma) \qquad \text{in} \quad \mathfrak{H}^\sharp,$$

und die $2g$ Charaktere von $\mathfrak{G}$

$$\Xi(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k, \qquad 0\leqq j\leqq g-1, \qquad 0\leqq k\leqq 1,$$

sind genau die χ^0 enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$, wobei $\hat{\Xi}$ bzw. $\hat{\hat{\Xi}}$

einen Charakter der abelschen Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}^0$ mit der Bedingung $\hat{\Xi}(\rho)=\hat{\chi}^{\sharp}(\rho)$ bzw. $\hat{\hat{\Xi}}(\pi)=-1$ und $\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)=1$ für alle σ aus $\mathfrak{H}^{\sharp}$ bezeichnet.

II) $\chi^{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})\neq\chi^{\sharp}(\sigma)\hat{\chi}^{\sharp}(\sigma)^{\nu}$ für jedes ν zwischen 0 und $g-1$. In diesem Fall ist der von $\chi^{\sharp}$ induzierte Charakter $\Xi_{\chi^{\sharp}}$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$ und die g Charaktere von $\mathfrak{G}$ ($\Xi'=\Xi_{\chi^{\sharp}}$)

$$\Xi'(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\,,\qquad 0\leqq j\leqq g-1\,,$$

sind genau die χ^0 enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$.

3. Wir denken uns einen Charakter $\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^i$ $(1\leqq i\leqq 2^n-1)$. Nun sei $i\equiv 2^l 5^h \pmod{2^n}$. Es gilt nach (4)

$$\chi^0(\rho^{fj}\sigma\rho^{-fj})\hat{\chi}^0(\rho^{fj}\sigma\rho^{-fj})^i=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{5^{fj}i}$$

und die f Charaktere $\psi(\rho^j\sigma\rho^{-j})$ mit $0\leqq j\leqq f-1$ sind voneinander verschieden, also gibt es ft bzgl. $\mathfrak{H}^{\sharp}$ zu $\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^i$ konjugierte Charaktere von $\mathfrak{H}^0$, wobei t den kleinsten (pos.) Exponenten bedeutet, derart, dass

$$i\equiv 5^{ft}i \qquad \pmod{2^n}$$

ist.[3] Alsdann gibt es einen einfachen Charakter $\chi^{**}_{l,h}(\sigma)$ der durch $\mathfrak{H}^0\rho^{ft}$ erzeugten Gruppe $\mathfrak{H}^{**}$, derart, dass in $\mathfrak{H}^0$

$$\chi^{**}_{l,h}(\sigma)=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{2^l 5^h}$$

und der diesen Charakter von $\mathfrak{H}^{**}$ enthaltende, einfache Charakter von $\mathfrak{H}^*$ eben $\chi^*_{l,h}=\chi^*_{\chi^{**}_{l,h}}$ ist. Also sind die s Charaktere von $\mathfrak{H}^{\sharp}$ $(st=g)$

$$\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\sigma)\hat{\chi}^{\sharp}(\sigma)^j=\chi^{\sharp}{}_{\chi^*_{l,h}\hat{\chi}^{*j}}(\sigma)=\chi^{\sharp}{}_{\chi^{**}_{l,h}\hat{\chi}^{**j}}(\sigma)\,,\qquad 0\leqq j\leqq s-1\,,$$

genau die $\chi^0\hat{\chi}^{0i}$ enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}^{\sharp}$, wobei $\hat{\chi}^{**}$ einen erzeugenden Charakter von $\mathfrak{H}^{**}/\mathfrak{H}^0$ mit der Bedingung $\hat{\chi}^{\sharp}(\rho^{ft})=\hat{\chi}^*(\rho^{ft})=\hat{\chi}^{**}(\rho^{ft})$ bezeichnet. Ferner ist $\chi^*{}_{l,h}(\sigma)=\chi^*{}_{l,h+f}(\sigma)$, so dass genau die folgenden voneinander verschieden sind:

$$\chi^*{}_{l,h}(\sigma)\,,\qquad 0\leqq h\leqq(f,\ 2^{n-l-2})-1\,.$$

Ferner ist, genauso wie im § 2, $\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\sigma)\hat{\chi}^{\sharp}(\sigma)^{\nu}$ $(\nu\neq 0)$ unmöglich, so dass nur folgende zwei Fälle möglich sind:

III) $\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\sigma)$. In diesem Fall gilt für einen einfachen Charakter $\Xi_{l,h}$ von $\mathfrak{G}$

$$\Xi_{l,h}(\sigma)=\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\sigma) \qquad \text{in} \quad \mathfrak{H}^{\sharp}\,,$$

und die $2s$ Charaktere von $\mathfrak{G}$

$$\Xi_{l,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k\,,\qquad 0\leqq j\leqq s-1\,,\qquad 0\leqq k\leqq 1\,,$$

sind genau die $\chi^0\hat{\chi}^{0i}$ enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$.

IV) $\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\pi\sigma\pi^{-1})\neq\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\sigma)\hat{\chi}^{\sharp}(\sigma)^{\nu}$ für jedes ν zwischen 0 und $s-1$. In diesem

---

3) $t=\begin{cases}1, & \text{falls } g_1\leqq l,\\ 2^{g_1-l}, & \text{falls } g_1>l,\end{cases}\qquad (g=2^{g_1}).$

Fall sind die s Charaktere von $\mathfrak{G}$ $(\Xi'_{i,h}=\Xi_{\chi^{\sharp}_{i,h}})$

$$\Xi'_{i,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\,,\qquad 0\leqq j\leqq s-1\,,$$

genau die $\chi^0\hat{\chi}^{0i}$ enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$.

Falls $i\equiv -2^l5^h \pmod{2^n}$ ist, sei $\chi^{\sharp}_{l,\bar{h}}(\sigma)$ bzw. $\Xi_{l,\bar{h}}(\sigma)$ der $\chi^0\hat{\chi}^{0^{-2^l5^h}}$ enthaltende, einfache Charakter der Gruppe $\mathfrak{H}^{\sharp}$ bzw. $\mathfrak{G}$ $(\Xi'_{l,\bar{h}}=\Xi_{\chi^{\sharp}_{l,\bar{h}}})$.

4. Nun seien

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_{\sharp}+\mathfrak{H}_{\sharp}\pi\,,\qquad \mathfrak{H}_{\sharp}=\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}'\rho+\cdots+\mathfrak{H}'\rho^{2^{n-2}-1}\,,$$
$$\mathfrak{H}_{*}=\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}'\rho^f+\cdots+\mathfrak{H}'\rho^{f(g-1)}.$$

Zunächst gibt es einen solchen einfachen Charakter χ_* von $\mathfrak{H}_*$, dass

$$\chi_*(\sigma)=\psi(\sigma)\qquad \text{in } \mathfrak{H}'$$

ist. Es sei $\hat{\chi}_{\sharp}$ bzw. $\hat{\chi}_*$ ein erzeugender Charakter der zyklischen Gruppe $\mathfrak{H}_{\sharp}/\mathfrak{H}'$ bzw. $\mathfrak{H}_*/\mathfrak{H}'$ mit der Bedingung $\hat{\chi}^{\sharp}(\rho)=\hat{\chi}_{\sharp}(\rho)$ bzw. $\hat{\chi}^*(\rho^f)=\hat{\chi}_*(\rho^f)$. Alsdann sind die ψ enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}_{\sharp}$ genau die folgenden:

$$\chi_{\sharp}(\sigma)\hat{\chi}_{\sharp}(\sigma)^j=\chi_{\sharp_{\chi_*\hat{\chi}_*^j}}(\sigma)\,,\qquad 0\leqq j\leqq g-1\,.$$

Ferner ist $\chi_{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi_{\sharp}(\sigma)\hat{\chi}_{\sharp}(\sigma)^{\nu}$ $(\nu\neq 0)$ unmöglich und es gilt $\hat{\chi}_{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})=\hat{\chi}_{\sharp}(\sigma)$ (vgl. § 2), so dass nur folgende zwei Fälle möglich sind:

V) $\chi_{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi_{\sharp}(\sigma)$. In diesem Fall gilt für einen einfachen Charakter χ von $\mathfrak{H}$

$$\chi(\sigma)=\chi_{\sharp}(\sigma)\qquad \text{in } \mathfrak{H}_{\sharp}$$

und die $2g$ Charaktere von $\mathfrak{H}$

$$\chi(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^k\,,\qquad 0\leqq j\leqq g-1\,,\qquad 0\leqq k\leqq 1\,,$$

sind genau die ψ enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}$, wobei $\hat{\chi}$ bzw. $\hat{\hat{\chi}}$ einen Charakter der abelschen Gruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$ mit der Bedingung $\hat{\Xi}(\sigma)=\hat{\chi}(\sigma)$ bzw. $\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)=\hat{\hat{\chi}}(\sigma)$ für alle σ aus $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

VI) $\chi_{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})\neq\chi_{\sharp}(\sigma)\hat{\chi}_{\sharp}(\sigma)^{\nu}$ für jedes ν zwischen 0 und $g-1$. In diesem Fall sind die g Charaktere von $\mathfrak{H}$ $(\chi'=\chi_{\chi_{\sharp}})$

$$\chi'(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j\,,\qquad 0\leqq j\leqq g-1\,,$$

genau die ψ enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}$.

5. Schliesslich möchten wir betrachten, wie die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{G}$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$ zerfallen.

Erstens ist bei passender Wahl $\chi^*(\sigma)=\chi_*(\sigma)$ in $\mathfrak{H}_*$, so dass in $\mathfrak{H}_{\sharp}(0\leqq j\leqq g-1)$

$$\chi^{\sharp}(\sigma)\hat{\chi}^{\sharp}(\sigma)^j=\chi_{\sharp}(\sigma)\hat{\chi}_{\sharp}(\sigma)^j$$

ist. Zweitens sei $\mathfrak{H}_{**}$ die durch $\mathfrak{H}'\rho^{ft}$ erzeugte Gruppe. Dann ist

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{H}_{\sharp}}\chi^{\sharp}_{l,h}(\sigma)\chi_{\sharp}(\sigma^{-1})=\sum_{\sigma\in\mathfrak{H}_{**}}\chi^{\sharp}_{l,h}(\sigma)\chi_{\sharp}(\sigma^{-1})\,,$$

so dass die t Charaktere

$$\chi_\sharp(\sigma)\hat{\chi}_\sharp(\sigma)^{js}, \qquad 0 \leq j \leq t-1,$$

ebensoviel mal in $\chi^\sharp_{l,h}(\sigma)$ enthalten. Wenn daher $\chi^\sharp_{l,h}(\sigma)$ wirklich $\chi_\sharp(\sigma)$ enthält, ist in $\mathfrak{H}$ $(0 \leq j \leq s-1)$

$$\chi^\sharp_{l,h}(\sigma)\hat{\chi}^\sharp(\sigma)^j = \sum_{\nu=0}^{t-1} \chi_\sharp(\sigma)\hat{\chi}_\sharp(\sigma)^{j+\nu s}.$$

A) Wenn unter den zu ψ konjugierten Charakteren genau die folgenden

$$\psi(\rho^j\sigma\rho^{-j}), \qquad 0 \leq j \leq f-1,$$

voneinander verschieden sind, so ist $\psi(\pi\sigma\pi^{-1}) = \psi(\sigma)$ oder $= \psi(\rho^\nu\sigma\rho^{-\nu})$. Falls $\psi(\pi\sigma\pi^{-1}) = \psi(\rho^\nu\sigma\rho^{-\nu})$ ist, ist $\psi(\rho^{2\nu}\sigma\rho^{-2\nu}) = \psi(\sigma)$, und damit $\nu = f/2$.

A, 1) Falls $\psi(\pi\sigma\pi^{-1}) = \psi(\sigma)$ ist, dann ist $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1}) = \psi(\pi\sigma\pi^{-1}) = \psi(\sigma)$ in $\mathfrak{H}'$, folglich muss für ein μ zwischen 0 und 2^n-1 $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^\mu$ sein. Ferner ist nach (2) $\hat{\chi}^0(\pi\sigma\pi^{-1}) = \hat{\chi}^0(\sigma)^{-1}$.

A, 1, 1) $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi^0(\sigma)$. In diesem Fall ist in $\mathfrak{H}^0$

$$\begin{aligned}\chi^\sharp(\pi\sigma\pi^{-1}) &= \chi^0(\pi\sigma\pi^{-1}) + \chi^0(\rho\pi\sigma\pi^{-1}\rho^{-1}) + \cdots \\ &= \chi^0(\pi\sigma\pi^{-1}) + \chi^0(\pi\rho\sigma\rho^{-1}\pi^{-1}) + \cdots \\ &= \chi^0(\sigma) + \chi^0(\rho\sigma\rho^{-1}) + \cdots \\ &= \chi^\sharp(\sigma).\end{aligned}$$

Daher ist $\chi^\sharp(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi^\sharp(\sigma)$, folglich $\chi_\sharp(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi_\sharp(\sigma)$. Dann gelten I) und V). Andererseits ist in $\mathfrak{H}^0$ ($i \equiv 2^l 5^h \pmod{2^n}$)

$$\begin{aligned}\chi^\sharp_{l,h}(\pi\sigma\pi^{-1}) &= \chi^0(\pi\sigma\pi^{-1})\hat{\chi}^0(\pi\sigma\pi^{-1})^i + \chi^0(\rho\pi\sigma\pi^{-1}\rho^{-1})\hat{\chi}^0(\rho\pi\sigma\pi^{-1}\rho^{-1})^i + \cdots \\ &= \chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{-i} + \chi^0(\rho\sigma\rho^{-1})\hat{\chi}^0(\rho\sigma\rho^{-1})^{-i} + \cdots \\ &= \chi^\sharp_{l,\bar{h}}(\sigma).\end{aligned}$$

Es gilt $\chi^\sharp_{l,h}(\sigma) = \chi^\sharp_{l,\bar{h}}(\sigma)$ in $\mathfrak{H}^0$ dann und nur dann, falls für ein μ $i \equiv -5^{f\mu}i \pmod{2^n}$ ist. Für $i \not\sim 2^{n-1}$ gilt IV) und deshalb ist in $\mathfrak{G}$ $\Xi'_{l,h}(\sigma) = \Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)$. Ferner ist $\chi^\sharp_{n-1,0}(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi^\sharp_{n-1,0}(\sigma)$. Also gelten in $\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned}\Xi(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k &= \Xi_{n-1,0}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k \\ &= \chi(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^k, \quad 0 \leq j \leq g-1, \quad 0 \leq k \leq 1;\end{aligned}$$

$$\Xi'_{l,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j = \sum_{\omega=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{t-1} \chi(\sigma)\chi(\sigma)^{j+\nu s}\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^\omega, \quad 0 \leq j \leq s-1, \quad \text{für } 2^l 5^h (\not\sim 2^{n-1}).$$

Es sei noch bemerkt, dass $\Xi(\sigma) \not\sim \Xi_{n-1,0}(\sigma)$ in $\mathfrak{G}$ gilt.

A, 1, 2) $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^\mu$ für ein μ zwischen 1 und 2^n-1. In diesem Fall ist

$$\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^\mu = \chi^0(\rho^f\pi\sigma\pi^{-1}\rho^{-f}) = \chi^0(\pi\rho^f\sigma\rho^{-f}\pi^{-1}) = \chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{5^f\mu},$$

folglich muss

$$\mu(1-5^f)\equiv 0 \pmod{2^n}$$

sein. Nun sei $\mu=2^a(2\mu_1+1)$ $(0\leqq a\leqq n-2)$, somit ist $2^{n-a-2}|f$. Ist $f=2^{n-a-2}$, sind $\chi^0(\rho^f\sigma\rho^{-f})\hat{\chi}^0(\rho^f\sigma\rho^{-f})^{2^a\mu_1}=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{2^a\mu_1}$ und $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1})\hat{\chi}^0(\pi\sigma\pi^{-1})^{2^a\mu_1}=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{2^a\mu_1+2^a}$. Also denken wir uns χ^0 so gewählt, dass

$$\chi^0(\rho^f\sigma\rho^{-f})=\chi^0(\sigma) \quad \text{und} \quad \chi^0(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{2^a}$$

sind. Ist $f>2^{n-a-2}$, denken wir uns χ^0 so gewählt, dass

$$\chi^0(\rho^f\sigma\rho^{-f})=\chi^0(\sigma) \quad \text{und} \quad \chi^0(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^0(\sigma)$$

sind. Falls $\mu=2^{n-1}$ ist, können wir $\chi^0(\sigma)$ auf dieselbe Weise normieren. Folglich kommen nur die Werte $1, 2, \cdots, 2^{n-2}$ als μ in Betracht. Dabei ist $f=2^{n-a-2}$, so ist $t=1$.

Nun sei für ein a zwischen 0 und $n-2$ $\mu=2^a$. Somit ist in $\mathfrak{H}^0$

$$\begin{aligned}\chi^{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})&=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{2^a}+\cdots\\ &=\chi^{\sharp}{}_{a,0}(\sigma)\,,\end{aligned}$$

so ist für ein ν zwischen 0 und g $\chi^{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^{\sharp}{}_{a,0}(\sigma)\hat{\chi}^{\sharp}(\sigma)^{\nu}$. Also ist $\chi_{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi_{\sharp}(\sigma)\hat{\chi}_{\sharp}(\sigma)^{\nu}$, folglich muss $\nu=0$ sein und deshalb ist in $\mathfrak{G}$ $\Xi'(\sigma)=\Xi'_{a,0}(\sigma)$. Andererseits ist

$$\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{2^a-i}+\cdots \qquad \text{in} \quad \mathfrak{H}^0\,,$$

so ist $\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\sigma)$ in $\mathfrak{H}^0$ dann und nur dann, falls für ein μ $i\equiv 2^a-5^{f\mu}i$ $\pmod{2^n}$ ist. Nun bezeichne $\mathfrak{M}$ die Menge solcher Zahlen i. Für $i(\not\sim 2^a)\notin\mathfrak{M}$ gibt es ein $i^*(=2^{l^*}5^{h^*})\notin\mathfrak{M}$ derart, dass in $\mathfrak{G}$ entweder $\Xi'_{l,h}=\Xi'_{l^*,h^*}$ oder $\Xi'_{l,h}=\Xi'_{l^*,\bar{h}^*}$ ist. Also gelten in $\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned}&\Xi'(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j=\sum_{\omega=0}^{1}\chi(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^{\omega}\,, \qquad 0\leqq j\leqq g-1;\\ &\Xi'_{l,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j=\Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j=\sum_{\omega=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{t-1}\chi(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^{\omega}\,,\\ &\qquad\qquad 0\leqq j\leqq s-1\,, \qquad \text{für} \quad 2^l5^h(\not\sim 2^a)\notin\mathfrak{M};\\ &\Xi_{l,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k=\Xi_{l,\bar{h}}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k=\sum_{\nu=0}^{t-1}\chi(\sigma)\,\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^k\,,\\ &\qquad\qquad 0\leqq j\leqq s-1\,, \qquad 0\leqq k\leqq 1\,, \qquad \text{für} \quad 2^l5^h\in\mathfrak{M}\,.\end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, dass $\Xi'_{l,h}(\sigma)\not\sim\Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)$ und $\Xi_{l,h}(\sigma)\not\sim\Xi_{l,\bar{h}}(\sigma)$ in $\mathfrak{G}$ gelten.

A, 2) Falls $\psi(\pi\sigma\pi^{-1})=\psi(\rho^{f/2}\sigma\rho^{-f/2})$ ist, dann ist für ein μ zwischen 0 und 2^n-1 $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^0(\rho^{f/2}\sigma\rho^{-f/2})^0\hat{\chi}(\rho^{f/2}\sigma\rho^{-f/2})^{\mu}$. Also sind $\chi^{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^{\sharp}(\sigma)$ oder $=\chi^{\sharp}{}_{a,0}(\sigma)$ und in $\mathfrak{H}^0$ $\chi^{\sharp}{}_{l,h}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{\mu-5^{-f/2}i}+\cdots$, folglich gelten die gleichartigen Formeln wie in A, 1).

B) Wenn unter den zu ψ konjugierten Charakteren genau die folgenden

$$\psi(\pi^k\rho^j\sigma\rho^{-j}\pi^{-k})\,, \qquad 0\leqq j\leqq f-1\,, \qquad 0\leqq k\leqq 1\,,$$

voneinander verschieden sind, so ergibt sich $\psi(\pi\sigma\pi^{-1})\not\sim\psi(\sigma)$, $\not\sim\psi(\rho^{f/2}\sigma\rho^{-f/2})$, deshalb ist der von einem einfachen Charakter von $\mathfrak{H}^{\#}$ bzw. $\mathfrak{H}_{\#}$ induzierte Charakter ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$. Dann gelten II), IV) und VI). Also gelten in $\mathfrak{H}$:

$$\Xi'(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j = \Xi'_{n-1,0}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j = \chi'(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j, \qquad 0 \leqq j \leqq g-1;$$

$$\Xi'_{l,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j = \Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j = \sum_{\nu=0}^{t-1} \chi'(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}, \qquad 0 \leqq j \leqq s-1 .$$

Es sei noch bemerkt, dass $\Xi'(\sigma) \neq \Xi'_{n-1,0}(\sigma)$ und $\Xi'_{l,h}(\sigma) \neq \Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)$ in $\mathfrak{G}$ gelten.

6. Nun sei $e>1(2^m e = 2^n)$; und wir denken uns einen Charakter $\psi(\tau^{i'}\sigma\tau^{-i'})$ $(1 \leqq i' \leqq e-1)$. Nun sei $i' \equiv 2^{l'}5^{h'} \pmod{2^n}$. Es gibt ft' bzgl. $\mathfrak{H}_{\#}$ zu $\psi(\tau^{i'}\sigma\tau^{-i'})$ konjugierte Charaktere von $\mathfrak{H}'$, wobei t' den kleinsten (pos.) Exponenten bedeutet, derart, dass

$$i' \equiv 5^{-ft'} i' \pmod{e}$$

ist.[4] Alsdann gibt es einen einfachen Charakter $\chi_{\Delta l',h'}(\sigma)$ der durch $\mathfrak{H}'\rho^{ft'}$ erzeugten Gruppe $\mathfrak{H}_{\Delta}$, derart, dass in $\mathfrak{H}'$

$$\chi_{\Delta l',h'}(\sigma) = \psi(\tau^{2^{l'}5^{h'}}\sigma\tau^{-2^{l'}5^{h'}})$$

und der diesen Charakter von $\mathfrak{H}_{\Delta}$ enthaltende, einfache Charakter von $\mathfrak{H}_*$ eben $\chi_{*l',h'}(\sigma) = \chi_{*\chi_{\Delta l',h'}}(\sigma)$ ist. Also sind die s' Charaktere von $\mathfrak{H}_{\#}$ $(s't' = g)$

$$\chi_{\# l',h'}(\sigma)\hat{\chi}_{\#}(\sigma)^j = \chi_{\#\chi_{*l',h'}\hat{\chi}_*^j}(\sigma) = \chi_{\#\chi_{\Delta l',h'}\hat{\chi}_\Delta^j}(\sigma), \qquad 0 \leqq j \leqq s'-1 ,$$

genau die $\psi(\tau^{i'}\sigma\tau^{-i'})$ enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}_{\#}$, wobei $\hat{\chi}_\Delta$ einen erzeugenden Charakter von $\mathfrak{H}_\Delta/\mathfrak{H}'$ mit der Bedingung $\hat{\chi}_*(\rho^{ft'}) = \hat{\chi}_\Delta(\rho^{ft'})$ bezeichnet. Hierbei sind genau die folgenden voneinander verschieden (vgl. § 3):

$$\chi_{*l',h'}(\sigma), \qquad 0 \leqq h' \leqq (f,\ 2^{n-m-l'-2})-1 .$$

Ferner ist $\chi_{\# l',h'}(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi_{\# l',h'}(\sigma)\hat{\chi}_{\#}(\sigma)^{\nu}$ $(\nu \neq 0)$ numöglich (vgl. § 2), so dass nur folgende zwei Fälle möglich sind:

VII) $\chi_{\# l',h'}(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi_{\# l',h'}(\sigma)$. In diesem Fall gilt für einen einfachen Charakter χ von $\mathfrak{H}$

$$\chi_{l',h'}(\sigma) = \chi_{\# l',h'}(\sigma) \qquad \text{in } \mathfrak{H}_{\#}$$

und die $2s'$ Charaktere von $\mathfrak{H}$

$$\chi_{l',h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^k, \qquad 0 \leqq j \leqq s'-1, \qquad 0 \leqq k \leqq 1,$$

sind genau die $\psi(\tau^{i'}\sigma\tau^{-i'})$ enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}$.

VIII) $\chi_{\# l',h'}(\pi\sigma\pi^{-1}) \neq \chi_{\# l',h'}(\sigma)\hat{\chi}_{\#}(\sigma)^{\nu}$ für jedes ν zwischen 0 und $s'-1$. In diesem Fall sind die s' Charaktere von $\mathfrak{H}$ $(\chi'_{l',h'} = \chi_{\chi_{\# l',h'}})$

$$\chi'_{l'h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j, \qquad 0 \leqq j \leqq s'-1 ,$$

---

4) $l' = \begin{cases} 1, & \text{falls } g_1 \leqq m+l', \\ 2^{g_1-m-l'}, & \text{falls } g_1 > m+l'. \end{cases}$

genau die $\psi(\tau^{l'}\sigma\tau^{-l'})$ enthaltenden, einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}$.

Falls $i' \equiv -2^{l'}5^{h'} \pmod{2^n}$ ist, sei $\chi_{\mathfrak{z}l', \bar{h}'}(\sigma)$ bzw. $\chi_{l', \bar{h}'}(\sigma)$ der $\psi(\tau^{-2^{l'}5^{h'}}\sigma\tau^{2^{l'}5^{h'}})$ enthaltende, einfache Charakter der Gruppe $\mathfrak{H}_{\mathfrak{z}}$ bzw. $\mathfrak{H}$ ($\chi'_{l', \bar{h}'} = \chi_{\chi_{\mathfrak{z}l', \bar{h}'}}$).

Es bezeichne $\Xi(\sigma)$ den $\chi^0(\sigma)$ enthaltenden, einfachen Charakter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wobei $\chi^0(\sigma)$ den einfachen Charakter von $\mathfrak{H}^0$ bedeutet, derart, dass

$$\chi^0(\sigma) = \psi(\sigma) + \psi(\tau\sigma\tau^{-1}) + \cdots + \psi(\tau^{e-1}\sigma\tau^{-e+1}) \qquad \text{in} \quad \mathfrak{H}'$$

ist, und zwar bezeichne $\Xi_{l,h}(\sigma)$ bzw. $\Xi_{l,\bar{h}}(\sigma)$ den $\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{2^l5^h}$ bzw. $\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{-2^l5^h}$ enthaltenden, einfachen Charakter der Gruppe $\mathfrak{G}$.[5] Hierbei ist t der kleinste (pos.) Exponent, derart, dass

$$i \equiv 5^{ft}i \qquad \pmod{2^m}$$

ist.[6] Falls $t' < t$ ist, sei $t't^* = t$.

Also gelten folgende Resultate genauso wie im Fall, wobei p eine ungerade Primzahl ist.

C) Wenn unter den zu ψ konjugierten Charakteren genau die folgenden

$$\psi(\rho^j\tau^i\sigma\tau^{-i}\rho^{-j}), \qquad 0 \leq i \leq e-1, \qquad 0 \leq j \leq f-1,$$

voneinander verschieden sind, so kommen folgende zwei Fälle vor (vgl. A)).

C, 1) $\psi(\pi\sigma\pi^{-1}) = \psi(\sigma)$. In diesem Fall ist $\chi_{\mathfrak{z}l', h'}(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi_{\mathfrak{z}l', \bar{h}'}(\sigma)$. Für $i' \not\equiv 2^{n-m-1}$ gilt VIII) und deshalb ist in $\mathfrak{H}$ $\chi'_{l', h'}(\sigma) = \chi'_{l', \bar{h}'}(\sigma)$. Ferner ist $\chi'_{n-m-1, 0}(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi'_{n-m-1, 0}(\sigma)$.

C, 1, 1) $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi^0(\sigma)$. In diesem Fall gelten in $\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned}\Xi(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k &= \Xi_{m-1,0}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k \\ &= (\chi(\sigma) + \chi_{n-m-1,0}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^j\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^{k\ 7)} \\ &\quad + \sum_{l'=0}^{n-m-2}\sum_{h'}\chi'_{l',h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j, \qquad 0 \leq j \leq g-1, \qquad 0 \leq k \leq 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Xi'_{l,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j &= \sum_{\omega=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{t-1}(\chi(\sigma) + \chi_{n-m-1,0}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^{\omega} \\ &\quad + 2\sum_{\substack{l',h' \\ (t'<t)}} t' \sum_{\nu=0}^{t^*-1}\chi'_{l',h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s} + 2t\sum_{\substack{l',h' \\ (t' \geqq t)}}\chi'_{l',h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j, \\ &\qquad 0 \leq j \leq s-1, \qquad \text{für} \quad 2^l5^h(\not\equiv 2^{m-1}).\end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, dass $\Xi(\sigma) \not\equiv \Xi_{m-1,0}(\sigma)$ und $\Xi'_{l,h}(\sigma) = \Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)$ in $\mathfrak{G}$ gelten.

C, 1, 2) $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{2^{\alpha}}$ für ein α zwischen 0 und $m-2$. In diesem Fall gelten in $\mathfrak{H}$:

$$\Xi'(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j = \sum_{\omega=0}^{1}(\chi(\sigma) + \chi_{n-m-1,0}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^j\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^{\omega}$$

5) In bezug auf $\Xi'(\sigma)$, $\Xi'_{l,h}(\sigma)$ und $\Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)$ vergleiche §§ 2–5.

6) $t = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad g_1 \leq n-m+l', \\ 2^{g_1-n+m-l'}, & \text{falls} \quad g_1 > n-m+l'. \end{cases}$

7) Dies ist eine abgekürzte Bezeichnung für die Summe zweier einfacher Charaktere.

$$+2\sum_{l'=0}^{n-m-2}\sum_{h'}\chi'_{l',h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j, \qquad 0\leq j\leq g-1;$$

$$\Xi'_{l,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j=\Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j$$
$$=\sum_{\omega=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{t-1}(\chi(\sigma)+\chi_{n-m-1,0}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^{\omega}$$
$$+2\sum_{\substack{l',h'\\(l'<l)}}t'\sum_{\nu=0}^{t^*-1}\chi'_{l',h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}+2t\sum_{\substack{l',h'\\(l'\geq l)}}\chi'_{l',h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j,$$
$$0\leq j\leq s-1, \qquad \text{für}\ \ 2^l5^h(\sim 2^a)\notin\mathfrak{M};$$

$$\Xi_{l,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k=\Xi_{l,\bar{h}}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j\hat{\hat{\Xi}}(\sigma)^k$$
$$=\sum_{\nu=0}^{t-1}(\chi(\sigma)+\chi_{n-m-1,0}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}\hat{\hat{\chi}}(\sigma)^k$$
$$+\sum_{\substack{l',h'\\(l'<l)}}\sum_{\nu=0}^{t^*-1}\chi'_{l',h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}+t\sum_{\substack{l',h'\\(l'\geq l)}}\chi'_{l',h'}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma)^j,$$
$$0\leq j\leq s-1, \qquad 0\leq k\leq 1, \qquad \text{für}\ \ 2^l5^h\in\mathfrak{M},$$

wobei $\mathfrak{M}$ die Menge solcher Zahlen i bezeichnet, dass für ein μ $i\equiv 2^a-5^{f\mu}i$ (mod 2^m) ist.

Es sei noch bemerkt, dass $\Xi'_{l,h}(\sigma)\sim\Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)$ und $\Xi_{l,h}(\sigma)\sim\Xi_{l,\bar{h}}(\sigma)$ in $\mathfrak{G}$ gelten.

C, 2) $\psi(\pi\sigma\pi^{-1})=\psi(\rho^{f/2}\sigma\rho^{-f/2})$ oder $=\psi(\tau^i\sigma\tau^{-i})$ für ein i mit $1\leq i\leq e-1$. Falls $\psi(\pi\sigma\pi^{-1})=\psi(\tau^i\sigma\tau^{-i})$ ist, ist $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^0(\sigma)$ in $\mathfrak{H}^0$, und damit ist für ein μ zwischen 0 und 2^m-1 $\chi^0(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{\mu}$. Falls $\psi(\pi\sigma\pi^{-1})=\psi(\rho^{f/2}\sigma\rho^{-f/2})$ ist, sind $\chi^{\sharp}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^{\sharp}(\sigma)$ oder $=\chi^{\sharp}_{a,0}(\sigma)$ und in $\mathfrak{H}^0$ $\chi^{\sharp}_{l,h}(\pi\sigma\pi^{-1})=\chi^0(\sigma)\hat{\chi}^0(\sigma)^{\mu-5^{-f/2}l}+\cdots$. Also gelten die gleichartigen Formeln wie in C, 1).

D) Wenn unter den zu ψ konjugierten Charakteren genau die folgenden

$$\psi(\pi^k\rho^j\tau^i\sigma\tau^{-i}\rho^{-j}\pi^{-k}), \quad 0\leq i\leq e-1, \quad 0\leq j\leq f-1, \quad 0\leq k\leq 1,$$

voneinander verschieden sind, so gelten in $\mathfrak{H}$ (vgl. B)):

$$\Xi'(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j=\Xi'_{m-1,0}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j$$
$$=(\chi'(\sigma)+\chi'_{n-m-1,0}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^j$$
$$+\sum_{l'=0}^{n-m-2}(\sum_{h'}\chi'_{l',h'}(\sigma)+\sum_{h'}\chi'_{l',\bar{h}'}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^j, \quad 0\leq j\leq g-1;$$

$$\Xi'_{l,h}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j=\Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)\hat{\Xi}(\sigma)^j$$
$$=\sum_{\nu=0}^{t-1}(\chi'(\sigma)+\chi'_{n-m-1,0}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}$$
$$+\sum_{\substack{l'\\(l'<l)}}t'\sum_{\nu=0}^{t^*-1}(\sum_{h'}\chi'_{l',h'}(\sigma)+\sum_{\bar{h}'}\chi'_{l',\bar{h}'}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^{j+\nu s}$$
$$+t\sum_{\substack{l'\\(l'\geq l)}}(\sum_{h'}(\chi'_{l',h'}(\sigma)+\sum_{\bar{h}'}\chi'_{l',\bar{h}'}(\sigma))\hat{\chi}(\sigma)^j, \quad 0\leq j\leq s-1.$$

Es sei noch bemerkt, dass $\Xi'(\sigma)\sim\Xi'_{m-1,0}(\sigma)$ und $\Xi'_{l,h}(\sigma)\sim\Xi'_{l,\bar{h}}(\sigma)$ in $\mathfrak{G}$ gelten.

Mathematisches Institut, Universität zu Tokyo.