Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques et contenant un paramètre.

Par Masuo HUKUHARA.

I. Introduction.

1. Dans cet article je veux étudier systématiquement des équations différentielles linéaires

$$(1.1) \qquad \frac{dx_j}{dt}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t,\ \varepsilon)x_k \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n),$$

en me plaçant dans l'hypothèse suivante : *les coefficients $a_{jk}(t,\ \varepsilon)$ sont des fonctions continues pour*

$$(1.2) \qquad -\infty < t < \infty, \quad |\varepsilon| < \rho_0,$$

holomorphes par rapport à ε et admettant une période commune ω par rapport à t.

On peut amener par une transformation linéaire à coefficients périodiques le système différentiel linéaire

$$(1.3) \qquad \frac{dx_j}{dt}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t,\ 0)x_k \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$$

en un système différentiel à coefficients constants. En faisant de plus, s'il est nécessaire, une transformation linéaire à coefficients constants, on peut supposer que la matrice formée des coefficients du système transformé soit d'une forme canonique. *Nous supposons donc, sans perdre la généralité, que les $a_{jk}(t,\ 0)=a_{jk}$ soient constantes et que la matrice A_0 formée des a_{jk} soit d'une forme canonique.* Posons

$$a_{jj}=\tilde{\lambda}_j, \quad a_{j,\ j+1}=\delta_j,$$

δ_j étant égal à 0 ou à 1; dans le cas de $\delta_j=1$, on a $\tilde{\lambda}_j=\tilde{\lambda}_{j+1}$ et les autres éléments de A_0 sont tous nuls.

On peut supposer de plus que $\tilde{\lambda}_j\equiv\tilde{\lambda}_k$ (mod. $2\pi i/\omega$) entraîne $\tilde{\lambda}_j=\tilde{\lambda}_k$. Car sinon, il suffit de remplacer y_k par y_k exp $(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_j)t$; la fonction exp $(\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_j)t$ admettant la période ω, les coefficients restent encore périodiques après cette transformation.

2. Dans la section II, je montrerai comment le système différentiel (1.1) se ramène à celui d'une forme canonique par une transformation formelle périodique dont les coefficients sont des séries formelles ordonnées suivant les puissances de ε. La solution formelle contient plusieurs paramètres qui peuvent prendre des valeurs arbitraires. Il y a donc lieu de se demander dans quelles conditions les séries formelles convergent. Ce problème sera résolu dans la section V. Les sections III et IV sont consacrées respectivement aux études préliminaires de quelques matrices particulières et des transformations formelles par lesquelles un système différentiel d'une forme canonique reste invariable.

II. Position du problème.

3. Désignons par $\vec{x}$ la matrice ayant une seule colonne dont les éléments sont $x_1, \ldots\ldots, x_n$ et par

$$(3.1) \qquad A(t, \varepsilon)=A_0+\varepsilon A_1(t)+\cdots\cdots+\varepsilon^\nu A_\nu(t)+\cdots\cdots$$

la matrice formée des $a_{jk}(t, \varepsilon)$. Le système différentiel linéaire (1.1) peut s'écrire sous la forme

$$(3.2) \qquad \frac{d\vec{x}}{dt}=A(t, \varepsilon)\vec{x}.$$

Considérons d'abord une transformation linéaire[1]

$$(3.3) \qquad \vec{x}=\{I+\varepsilon^N P(t)\}\vec{y},$$

N désignant un entier positif quelconque. Soit

$$(3.4) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt}=B(t, \varepsilon)\vec{y}$$

l'équation transformée. La relation qui lie $A(t, \varepsilon)$ et $B(t, \varepsilon)$ peut s'écrire

$$(3.5) \qquad B(t, \varepsilon)=\{I+\varepsilon^N P(t)\}^{-1}\left\{A(t, \varepsilon)(I+\varepsilon^N P(t))-\varepsilon^N\frac{d}{dt}P(t)\right\}.$$

$B(t, \varepsilon)$ peut donc se développer suivant les puissances entières de ε:

$$(3.6) \qquad B(t, \varepsilon)=B_0+\varepsilon B_1(t)+\cdots\cdots+\varepsilon^\nu B_\nu(t)+\cdots\cdots$$

et l'on voit sans peine

$$(3.7) \qquad B_\nu(t)=A_\nu(t)$$

pour $\nu<N$ et

$$B_N(t)=A_N(t)+A_0P(t)-P(t)A_0-\frac{d}{dt}P(t).$$

1) I est la matrice unité. Dans le cas où il est nécessaire d'indiquer sa dimension n, nous écrivons I_n.

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}P(t)-A_0P(t)+P(t)A_0=A_N(t)-B_N(t). \tag{3.8}$$

Les éléments du premier membre sont

$$p_{jk}'(t)-(\tilde{\lambda}_j-\tilde{\lambda}_k)p_{jk}(t)-\delta_j p_{j+1,\,k}(t)+\delta_{k-1}p_{j,\,k-1}(t). \tag{3.9}$$

Par suite, on peut déterminer la matrice périodique $P(t)$ de manière que l'élément correspondant de $B_N(t)$ soit nul pour $\tilde{\lambda}_j \neq \tilde{\lambda}_k$ et constant pour $\tilde{\lambda}_j=\tilde{\lambda}_k$. On peut en conclure la proposition suivante.

On peut déterminer une matrice formelle périodique

$$P(t,\ \varepsilon)=I+\varepsilon P_1(t)+\cdots\cdots+\varepsilon^\nu P_\nu(t)+\cdots\cdots \tag{3.10}$$

de manière que l'équation (3.2) *devienne par la transformation linéaire formelle*

$$\vec{x}=P(t,\ \varepsilon)\vec{y} \tag{3.11}$$

en une équation

$$\frac{d\vec{y}}{dt}=B(\varepsilon)\vec{y}, \tag{3.12}$$

où $B(\varepsilon)$ *est une matrice indépendante de* t *et dont les éléments s'annulent pour* $\tilde{\lambda}_j \neq \tilde{\lambda}_k$.

La relation entre $A(t,\ \varepsilon)$ et $B(\varepsilon)$ étant

$$B(\varepsilon)=P(t,\ \varepsilon)^{-1}\left\{A(t,\ \varepsilon)P(t,\ \varepsilon)-\frac{d}{dt}P(t,\ \varepsilon)\right\}, \tag{3.13}$$

$B(\varepsilon)$ est développable formellement en une série de puissances entières de ε:

$$B(\varepsilon)=B_0+\varepsilon B_1+\cdots\cdots+\varepsilon^\nu B_\nu+\cdots\cdots \tag{3.14}$$

et l'on a en particulier $B_0=A_0$.

4. Faisons ensuite une transformation linéaire indépendante de t:

$$\vec{y}=Q(\varepsilon)\vec{\xi}. \tag{4.1}$$

Si

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt}=\tilde{A}(\varepsilon)\vec{\xi} \tag{4.2}$$

est l'équation transformée, on a

$$\tilde{A}(\varepsilon)=Q(\varepsilon)^{-1}B(\varepsilon)Q(\varepsilon). \tag{4.3}$$

On peut donc donner à $\tilde{A}(\varepsilon)$ une forme canonique. Désignons par $\tilde{a}_{jk}(\varepsilon)$ les éléments de $\tilde{A}(\varepsilon)$. On a alors

$$\tilde{a}_{jj}(\varepsilon)=\tilde{\lambda}_j(\varepsilon),\quad \tilde{a}_{j,\,j+1}(\varepsilon)=\tilde{\delta}_j, \tag{4.4}$$

les autres éléments étant nuls; $\tilde{\delta}_j$ est égal à 0 ou à 1 et si $\tilde{\delta}_j=1$ on a

$$\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)=\tilde{\lambda}_{j+1}(\varepsilon). \tag{4.5}$$

Les $\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)$ sont les n racines de l'équation en λ:

$$|B(\varepsilon)-\lambda I|=0. \tag{4.6}$$

Puisque $B(0)=A_0$, les $\tilde{\lambda}_j(0)=\tilde{\lambda}_j$ sont les éléments diagonaux de la matrice A_0. Par suite, la relation

$$\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)\equiv\tilde{\lambda}_k(\varepsilon) \qquad (\text{mod. } 2\pi i/\omega) \tag{4.7}$$

entraîne

$$\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)=\tilde{\lambda}_k(\varepsilon). \tag{4.8}$$

Les nombres $\tilde{\delta}_j$ ne coïncident pas nécessairement avec les nombres correspondants δ_j de A_0.

On sait que les éléments de $Q(\varepsilon)$ peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide des éléments de $B(\varepsilon)$ et des $\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)$. On a donc un développement formel

$$Q(\varepsilon)=\varepsilon'^{-l}\{Q_0+\varepsilon' Q_1+\cdots\cdots+\varepsilon'^{\nu}Q_\nu+\cdots\cdots\},$$

où $\varepsilon'=\varepsilon^{1/q}$, q étant un certain entier positif. Le nombre entier l peut être supposé nul, car on a la même équation (4.2) par la transformation

$$\vec{y}=\varepsilon'^{\,l}Q(\varepsilon)\vec{\xi}.$$

Supposons donc

$$Q(\varepsilon)=Q_0+\varepsilon' Q_1+\cdots\cdots+\varepsilon'^{\nu}Q_\nu+\cdots\cdots \qquad (Q_0\neq O). \tag{4.9}$$

Le déterminant $|Q(\varepsilon)|$ peut aussi se développer formellement en une série de puissances entières de ε'. Le premier terme $|Q_0|$ peut devenir nul, mais un au moins des coefficients est différent de 0.

Si l'on pose

$$\tilde{P}(t,\ \varepsilon)=P(t,\ \varepsilon)Q(\varepsilon), \tag{4.10}$$

l'équation (3.2) se change en (4.2) par la transformation

$$\vec{x}=\tilde{P}(t,\ \varepsilon)\vec{\xi}, \tag{4.11}$$

et on a le développement formel

$$\tilde{P}(t,\ \varepsilon)=\tilde{P}_0+\varepsilon'\tilde{P}_1+\cdots\cdots+\varepsilon'^{\nu}\tilde{P}_\nu+\cdots\cdots \qquad (\tilde{P}_0\neq O).$$

Il peut arriver que le déterminant $|\tilde{P}_0|$ s'annule, mais le développement formel du déterminant $|\tilde{P}(t,\ \varepsilon)|$ contient au moins un terme non nul.

5. Soit d'autre part $\Phi(t,\ \varepsilon)$ la matrice formée des n solutions indépendantes de (1.1). Nous pouvons supposer que $\Phi(0,\ \varepsilon)$ soit indépendante de ε. $\Phi(t,\ \varepsilon)$ est alors continue pour (1.2) et holomorphe par rapport à ε.

On sait que l'on a

$$\Phi(t+\omega,\ \varepsilon)=\Phi(t,\ \varepsilon)\Gamma(\varepsilon), \tag{5.1}$$

où $\Gamma(\varepsilon)$ est une matrice indépendante de t. On a donc

$$\Gamma(\varepsilon)=\Phi(0,\ \varepsilon)^{-1}\Phi(\omega,\ \varepsilon) \tag{5.2}$$

et $\Gamma(\varepsilon)$ est holomorphe pour $|\varepsilon|<\rho_0$. Prenons une matrice $P(\varepsilon)$ telle que

$$\tilde{\Gamma}(\varepsilon)=P(\varepsilon)^{-1}\Gamma(\varepsilon)P(\varepsilon)$$

soit d'une forme canonique. On peut supposer, comme au n° précédent, que l'on ait

$$P(\varepsilon)=P_0+\varepsilon''P_1+\cdots\cdots+\varepsilon''^{\nu}P_{\nu}+\cdots\cdots \qquad (P_0\neq O),$$

où $\varepsilon''=\varepsilon^{1/q'}$, q' étant un certain entier positif. Alors la matrice

$$\Psi(t,\ \varepsilon)=\Phi(t,\ \varepsilon)P(\varepsilon)$$

est aussi formée des n solutions indépendantes de (1.1) et satisfait à la relation

$$\Psi(t+\omega,\ \varepsilon)=\Psi(t,\ \varepsilon)\tilde{\Gamma}(\varepsilon).$$

La matrice

$$\Psi(0,\ \varepsilon)=\Phi(0,\ \varepsilon)P(\varepsilon),$$

considérée comme fonction de ε'', étant holomorphe pour $\varepsilon''=0$, la matrice $\Psi(t,\ \varepsilon)$ est continue pour

$$-\infty<t<\infty,\quad |\varepsilon''|<\rho_1 \tag{5.3}$$

et holomorphe par rapport à ε''.

Nous supposons donc que $\Phi(t,\ \varepsilon)$ soit continue pour (5.3) et holomorphe par rapport à ε'' et que la matrice $\Gamma(\varepsilon)$ définie par (5.2) ait une forme canonique. Cette fois, $\Phi(0,\ \varepsilon)$ dépend en général de ε. Soient $\gamma_{jk}(\varepsilon)$ $(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$ les éléments de $\Gamma(\varepsilon)$ et $\vec{\varphi}_j(t,\ \varepsilon)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$ les n solutions dont se compose $\Phi(t,\ \varepsilon)$.

6. Supposons, par exemple,

$$\begin{aligned} &\gamma_{jj}(\varepsilon)=\gamma(\varepsilon) && (j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m),\\ &\gamma_{j+1,\ j}(\varepsilon)=1 && (j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m-1) \end{aligned} \tag{6.1}$$

et $\gamma_{m+1,\ m}(\varepsilon)=0$.

Posons

$$\vec{\chi}_j(t,\ \varepsilon)=e^{-\lambda(\varepsilon)t}\vec{\varphi}_j(t,\ \varepsilon) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m), \tag{6.2}$$

où

$$\lambda(\varepsilon)=\frac{1}{\omega}\log\gamma(\varepsilon). \tag{6.3}$$

Nous supposons ρ_1 assez petit de sorte que $\lambda(\varepsilon)$ est holomorphe pour $|\varepsilon''|<\rho_1$. $\vec{\chi}_j(t,\ \varepsilon)$ est alors continue pour (5.3) et holomorphe par rapport à ε''. Posons ensuite

$$(6.4) \qquad \vec{\chi}_k(t,\ \varepsilon)=\vec{\theta}_k(t,\ \varepsilon)+\frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\frac{t}{\omega}\frac{\vec{\theta}_{k-1}(t,\ \varepsilon)}{1\,!}+\cdots$$
$$+\frac{1}{\gamma(\varepsilon)^{k-1}}\frac{t}{\omega}\left(\frac{t}{\omega}-1\right)\cdots\left(\frac{t}{\omega}-k+2\right)\frac{\vec{\theta}_1(t,\ \varepsilon)}{(k-1)!}$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m).$$

On voit sans peine que les $\vec{\theta}_j(t,\ \varepsilon)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m)$ sont continues pour (5.3), holomorphes par rapport à ε'' et périodiques par rapport à t.

Définissons de même les fonctions $\vec{\theta}_j(t,\ \varepsilon)$ $(j=m+1,\ \ldots\ldots,\ n)$ et désignons par $\Theta(t,\ \varepsilon)$ la matrice formée des $\vec{\theta}_j(t,\ \varepsilon)$. La transformation linéaire à coefficients périodiques

$$(6.5) \qquad \vec{x}=\Theta(t,\ \varepsilon)\vec{y}$$

amène l'équation (3.2) en une équation à coefficient constant (3.12). On peut amener celui-ci, par une transformation de la forme (4.1), en une équation différentielle

$$(6.6) \qquad \frac{d\vec{\xi'}}{dt}=\hat{A}(\varepsilon)\vec{\xi'},$$

où $\hat{A}(\varepsilon)$ est une matrice de forme canonique.

On arrive donc à la conclusion suivante.

On peut trouver une matrice périodique $\hat{P}(t,\ \varepsilon)$ développable en une série

$$(6.7) \qquad P(t,\ \varepsilon)=\hat{P}_0(t)+\varepsilon''\hat{P}_1(t)+\cdots+\varepsilon''^{\nu}\hat{P}_\nu(t)+\cdots \qquad (\hat{P}_0\neq 0)$$

convergente pour (5.3) *de manière que la transformation linéaire*

$$(6.8) \qquad \vec{x}=\hat{P}(t,\ \varepsilon)\vec{\xi'}$$

amène l'équation différentielle (3.2) *en une équation différentielle* (6.6), *où* $A(\varepsilon)$ *est une matrice de forme canonique.*

Désignons les éléments diagonaux de $\hat{A}(\varepsilon)$ par $\hat{\lambda}_j(\varepsilon)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$. Nous pouvons supposer encore que la relation

$$(6.9) \qquad \hat{\lambda}_j(\varepsilon)=\hat{\lambda}_k(\varepsilon) \qquad (\mathrm{mod.}\ 2\pi i/\omega)$$

entraîne

$$(6.10) \qquad \hat{\lambda}_j(\varepsilon)=\hat{\lambda}_k(\varepsilon).$$

Car, dans le cas où l'on a

$$\hat{\lambda}_j(\varepsilon)=\hat{\lambda}_k(\varepsilon)+2\nu\pi i/\omega,$$

il suffit de remplacer $y_k\exp(2\nu\pi it/\omega)$ par y_k.

7. On peut calculer aisément $B(\varepsilon)$.

En effet, les m premières équations du système différentiel (3.12) admettent m solutions

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{e^{\lambda(\varepsilon)t}}{\gamma(\varepsilon)^{k-1}}\dbinom{u}{k-1}, \quad y_2=\dfrac{e^{\lambda(\varepsilon)t}}{\gamma(\varepsilon)^{k-2}}\dbinom{u}{k-2}, \ \ldots\ldots, \\ y_k=e^{\lambda(\varepsilon)t}, \quad y_{k+1}=\cdots\cdots=y_m=0, \end{cases}$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m),$$

où $u=t/\omega$ et

$$\binom{u}{k}=\frac{u(u-1)\cdots\cdot(u-k+1)}{k!}.$$

Or, on vérifie sans peine

$$\frac{d}{du}\binom{u}{k}=\binom{u}{k-1}-\frac{1}{2}\binom{u}{k-2}+\frac{1}{3}\binom{u}{k-3}-\cdots\cdot+\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Par suite

$$(7.1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=\lambda(\varepsilon)y_1+\dfrac{1}{\omega}\left\{\dfrac{y_2}{\gamma(\varepsilon)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{y_3}{\gamma(\varepsilon)^2}+\cdots\cdot+\dfrac{(-1)^m}{m-1}\dfrac{y_m}{\gamma(\varepsilon)^{m-1}}\right\}, \\ \dfrac{dy_2}{dt}=\lambda(\varepsilon)y_2+\dfrac{1}{\omega}\left\{\dfrac{y_3}{\gamma(\varepsilon)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{y_4}{\gamma(\varepsilon)^2}+\cdots\cdot+\dfrac{(-1)^{m-1}}{m-2}\dfrac{y_m}{\gamma(\varepsilon)^{m-2}}\right\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_m}{dt}=\lambda(\varepsilon)y_m. \end{cases}$$

Il en est de même des autres équations du système (3.12).

D'autre part, considérons le système des équations

$$(7.2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\eta_1}{dt}=\eta_2-\dfrac{1}{2}\eta_3+\dfrac{1}{3}\eta_4-\cdots\cdot+\dfrac{(-1)^m}{m-1}\eta_m, \\ \dfrac{d\eta_2}{dt}=\eta_3-\dfrac{1}{2}\eta_4+\cdots\cdot+\dfrac{(-1)^{m-1}}{m-2}\eta_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\eta_m}{dt}=0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\zeta_1=\eta_1, \quad \zeta_2=\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3+\frac{1}{3}\eta_4-\cdots\cdot+\frac{(-1)^m}{m}\eta_m,$$

on a $\dfrac{d\zeta_1}{dt}=\zeta_2$ et $\dfrac{d\zeta_2}{dt}$ devient une combinaison linéaire de $\eta_3,\ \eta_4,\ \ldots\ldots,\ \eta_m$, le coefficient de η_3 étant égal à 1. Nous posons $\dfrac{d\zeta_2}{dt}=\zeta_3$. $\dfrac{d\zeta_3}{dt}$ devient alors une combinaison linéaire de $\eta_4, \ldots\ldots, \eta_m$, le coefficient de η_4 étant égal à 1. Nous posons $\dfrac{d\zeta_3}{dt}=\zeta_4$ et ainsi de suite.

Nous pouvons ainsi définir une transformation

$$\zeta_j=\eta_j+\sum_{k=j+1}^{m} a_{jk}\eta_k \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m), \tag{7.3}$$

par laquelle le système (7.2) se change en

$$\frac{d\zeta_1}{dt}=\zeta_2,\ \ldots\ldots,\ \frac{d\zeta_{m-1}}{dt}=\zeta_m,\ \frac{d\zeta_m}{dt}=0. \tag{7.4}$$

Si l'on pose

$$\xi_j=\frac{1}{\omega^j}\left\{\frac{y_j}{\gamma(\varepsilon)^j}+\sum_{k=j+1}^{m} a_{jk}\frac{y_k}{\gamma(\varepsilon)^k}\right\} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m), \tag{7.5}$$

le système (7.1) se change en

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi_1}{dt}=\lambda(\varepsilon)\xi_1+\xi_2,\quad \frac{d\xi_2}{dt}=\lambda(\varepsilon)\xi_2+\xi_3,\ \ldots\ldots,\\ &\frac{d\xi_{m-1}}{dt}=\lambda(\varepsilon)\xi_{m-1}+\xi_m,\quad \frac{d\xi_m}{dt}=\lambda(\varepsilon)\xi_m. \end{aligned}\right. \tag{7.6}$$

On obtient ainsi une transformation qui amène l'équation (3.12) à l'équation de forme canonique.

Une transformation formelle (4.11), qui amène l'équation différentielle (3.2) en une équation différentielle (4.2) de forme canonique, n'est pas unique. Elle peut dépendre de plusieurs paramètres prenant des valeurs arbitraires. Il y a donc lieu de se demander dans quelles conditions elle converge pour les valeurs assez petites de ε et si l'équation différentielle (4.2) de forme canonique se détermine d'une seule manière. C'est ce que nous allons résoudre dans la suite. La transformation (6.8) obtenue au n° 6 peut être considérée comme cas particulier de la transformation formelle (4.11).

III. Etude préliminaire de matrices particulières.

8. Avant de nous occuper de notre problème proposé à la fin de la section précédente, il est commode de faire une étude de quelques matrices d'une forme particulière.

Nous appellerons matrice triangulaire obliquement constante une matrice A satisfaisant à la condition suivante:

Si a_{jk} ($j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m$; $k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$) sont les éléments de A, on a $a_{jk}=0$ pour

$$j-k>min\{0,\ m-n\}$$

et $a_{jk}=a_{j'k'}$ pour $j-k=j'-k'$.

Considérons d'abord le cas de $m=n$. Désignons par[1] E la matrice dont les éléments e_{jk} sont nuls sauf $e_{j,\,j+1}=1$. On peut alors écrire

$$A=a_0I+a_1E+a_2E^2+\cdots\cdots+a_{m-1}E^{m-1}.$$

Inversement, un polynome de E est une matrice triangulaire obliquement constante. Par suite le produit de deux tels matrices et l'inverse d'une telle matrice sont aussi des matrices triangulaires obliquement constantes.

Plus généralement, on a sans peine la proposition suivante sans supposer les matrices carrées.

Le produit de deux matrices triangulaires obliquement constantes l'est aussi.

9. Considérons maintenant deux matrices

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots\cdots & A_{1m} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ A_{m1} & \cdots\cdots & A_{mm}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots\cdots & B_{1m} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ B_{m1} & \cdots\cdots & B_{mm}\end{pmatrix}.$$

où A_{jk} et B_{jk} sont des matrices triangulaires obliquement constantes avec m_j lignes et m_k colonnes. On voit immédiatement que le produit $C=AB$ peut s'écrire

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots\cdots & C_{1m} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ C_{m1} & \cdots\cdots & C_{mm}\end{pmatrix},$$

où

$$C_{jk}=A_{j1}B_{1k}+A_{j2}B_{2k}+\cdots\cdots+A_{jm}B_{mk}$$

sont des matrices triangulaires obliquement constantes.

Nous allons montrer que l'inverse de A est aussi de la même forme, en supposant, bien entendu, que le déterminant ne soit pas nul.

On sait déjà que cette proposition est vraie pour $m=1$. Nous la supposons donc vraie pour $m<n$.

Soit $m=n$. Si $|A_{11}|\neq 0$, nous posons

$$B_1=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O & \cdots\cdots & O \\ O & I & \cdots\cdots & O \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ O & O & \cdots\cdots & I\end{pmatrix},\quad AB_1=\begin{pmatrix} I & A_{12} & \cdots\cdots & A_{1n} \\ B_{21} & A_{22} & \cdots\cdots & A_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ B_{n1} & A_{n2} & \cdots\cdots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

B_{21}, ……, B_{n1} sont triangulaires et obliquement constantes. Posons

---

1) S'il est nécessaire d'indiquer la dimension n, nous la désignerons par E_n.

$$B_2=\begin{pmatrix} I & -A_{12} & \cdots & -A_{1n} \\ O & I & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & I \end{pmatrix}, \quad AB_1B_2=\begin{pmatrix} I & O & \cdots & O \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

Les matrices B_{jk} $(j, k=2, 3, \ldots\ldots, n)$ sont aussi triangulaires et obliquement constantes. Posons ensuite

$$B_3=\begin{pmatrix} I & O & \cdots & O \\ -B_{21} & I & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -B_{n1} & O & \cdots & I \end{pmatrix}, \quad B_3AB_1B_2=\begin{pmatrix} I & O & \cdots & O \\ O & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Les matrices C_{jk} $(j, k=2, 3, \ldots\ldots, n)$ sont triangulaires et obliquement constantes.

Le problème est ainsi réduit au cas de $m=n-1$.

Considérons maintenant le cas où l'on a $|A_{11}|=0$ mais $|A_{12}|\neq 0$. Nous posons alors

$$B_1=\begin{pmatrix} O & I & O & \cdots & O \\ A_{12}^{-1} & O & O & \cdots & O \\ O & O & I & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & I \end{pmatrix}.$$

On a

$$AB_1=\begin{pmatrix} I & A_{11} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ * & A_{21} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & A_{n1} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

On est ainsi conduit au cas précédent.

Supposons, par exemple, $m_1=\cdots=m_r>m_{r+1}\geqq\cdots\geqq m_n$. S'il existe, parmi les matrices $A_{11}, \ldots\ldots, A_{1r}$, une dont le déterminant n'est pas nul, le raisonnement ci-dessus s'applique. Si tous les des matrices $A_{11}, \ldots\ldots, A_{1r}$ sont nuls, les éléments de la $m_1$ièmes ligne sont tous nuls. Le déterminant $|A|$ est donc nul contrairement à l'hypothèse.

10. Quant à la matrice A, nous supposons les mêmes hypothèses qu'au n° précédent. Dans le cas de $m_j=m_k$, nous désignons par a_{jk} les éléments diagonaux de A_{jk}. Posons

$$B_{jk}=a_{jk}I \quad \text{ou} \quad O$$

suivant que l'on a $m_j=m_k$ ou non. Si B est la matrice formée des B_{jk}, on a

$$(10.1) \qquad |A|=|B|,$$

c'est ce que nous allons maintenant démontrer.

La proposition étant évidente pour $\sum m_j=1$, nous la supposons vraie pour $\sum m_j<n$.

Supposons, par exemple, $m_1 = \cdots\cdots = m_m = n_1$.

Nous transportons les $(m_1 + \cdots\cdots + m_j + 1)$ièmes lignes et les $(m_1 + \cdots\cdots + m_k + 1)$ièmes colonnes de A respectivement dans les $(j+1)$ièmes lignes et dans les $(k+1)$ièmes colonnes. Nous obtenons ainsi une matrice

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots\cdots & * \\ O & A_{11}' & \cdots\cdots & A_{1m}' \\ & \cdots & \cdots & \\ O & A_{m1}' & \cdots\cdots & A_{mm}' \end{pmatrix}$$

où $A_1 = (a_{jk})$ et A_{jk}' est une matrice triangulaire obliquement constante dont les éléments diagonaux sont ceux de A_{jk}. Faisons le même changement pour B; soit

$$B' = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots\cdots & * \\ O & B_{11}' & \cdots\cdots & B_{1m}' \\ & \cdots & \cdots & \\ O & B_{m1}' & \cdots\cdots & B_{mm}' \end{pmatrix}$$

la matrice transformée de B. D'après la supposition on a

$$\begin{vmatrix} A_{11}' & \cdots\cdots & A_{1m}' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1}' & \cdots\cdots & A_{mm}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11}' & \cdots\cdots & B_{1m}' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1}' & \cdots\cdots & B_{mm}' \end{vmatrix}$$

On a donc (10.1).

Remarquons, en passant, que notre démonstration entraîne immédiatement

$$(10.2) \qquad |A| = |A_1|^{n_1}.$$

Pour obtenir (10.1) dans le cas général, on peut faire une discussion analogue.

11. La matrice B prend la forme suivante

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O & \cdots\cdots & O \\ O & B_2 & \cdots\cdots & O \\ & \cdots & \cdots & \\ O & O & \cdots\cdots & B_r \end{pmatrix}$$

où

$$B_j = \begin{pmatrix} B_{hh} & B_{h,\,h+1} & \cdots\cdots & B_{hh'} \\ & \cdots & \cdots & \\ B_{h'h} & B_{h',\,h+1} & \cdots\cdots & B_{h'h'} \end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots \geqq m_{h-1} > m_h = \cdots\cdots = m_{h'} > m_{h'+1} \geqq \cdots\cdots$$

Si nous désignons par A_j la matrice

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{hh} & a_{h,\,h+1} & \cdots\cdots & a_{hh'} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{h'h} & a_{h',\,h+1} & \cdots\cdots & a_{h'h'} \end{pmatrix},$$

on a d'après (10.2)

$$|B_j| = |A_j|^{n_j},$$

où $n_j = m_h$. On a donc finalement

$$|A| = |A_1|^{n_1}|A_2|^{n_2}\cdots|A_r|^{n_r}.$$

IV. La forme générale d'une transformation par laquelle la forme canonique reste invariable.

12. Supposons que l'équation différentielle (4.2) d'une forme canonique se change formellement en une équation différentielle (6.6) d'une forme canonique par une transformation formelle

$$\overrightarrow{\xi} = R(t, \varepsilon)\overrightarrow{\xi'}, \tag{12.1}$$

où $R(t, \varepsilon)$ est une série entière formelle de $\varepsilon^{1/q}$, les coefficients $R_\nu(t)$ admettant la période ω.

Soit $X(t, \varepsilon)$ la matrice formée des n solutions indépendantes de (4.2). Puisque (4.2) n'a qu'un sens formel, $X(t, \varepsilon)$ est une série formelle et nous ne considérons pas sa convergence. Mais on a, comme dans le cas ordinaire,

$$X(t+\omega, \varepsilon) = X(t, \varepsilon)\Gamma(\varepsilon),$$

et on peut supposer que

$$\Gamma(\varepsilon) = \exp(\omega\tilde{A}(\varepsilon)). \tag{12.2}$$

Si $X'(t, \varepsilon)$ est la matrice

$$X'(t, \varepsilon) = R(t, \varepsilon)^{-1}X(t, \varepsilon),$$

on a

$$X'(t+\omega, \varepsilon) = X'(t, \varepsilon)\Gamma(\varepsilon).$$

On peut donc supposer que

$$\Gamma(\varepsilon) = \exp(\omega\hat{A}(\varepsilon)). \tag{12.3}$$

Les deux relations (12.2) et (12.3) entraînent

$$\tilde{A}(\varepsilon) = \hat{A}(\varepsilon) \qquad (\text{mod. } 2\pi i/\omega). \tag{12.4}$$

Il est donc loisible de supposer

$$\tilde{A}(\varepsilon) = \hat{A}(\varepsilon), \tag{12.5}$$

c'est ce que nous ferons désormais. Par suite on a

$$\frac{d}{dt}R(t, \varepsilon) = \tilde{A}(\varepsilon)R(t, \varepsilon) - R(t, \varepsilon)\hat{A}(\varepsilon). \tag{12.6}$$

13. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\tilde{\lambda}_1(\varepsilon) = \cdots\cdots = \tilde{\lambda}_m(\varepsilon) \neq \tilde{\lambda}_{m+1}(\varepsilon) = \cdots\cdots = \tilde{\lambda}_{m'}(\varepsilon),$$

et

$$\tilde{\delta}_1 = \cdots\cdots = \tilde{\delta}_{m-1} = \tilde{\delta}_{m+1} = \cdots\cdots = \tilde{\delta}_{m'-1} = 1, \ \tilde{\delta}_m = \tilde{\delta}_{m'} = 0. \tag{13.1}$$

Si l'on désigne par $r_{jk}(t, \varepsilon)$ les éléments de $R(t, \varepsilon)$, on a, d'après (12.6),

$$(13.2)\qquad \frac{d}{dt} r_{jk}(t,\ \varepsilon)=(\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)-\tilde{\lambda}_k(\varepsilon))r_{jk}(t,\ \varepsilon)$$
$$+\tilde{\delta}_j r_{j+1,\,k}(t,\ \varepsilon)-\tilde{\delta}_{k-1} r_{j,\,k-1}(t,\ \varepsilon)$$

pour $j,\ k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m'$. Par suite

$$(13.3)\qquad \frac{d}{dt} r_{jk}(t,\ \varepsilon)=(\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)-\tilde{\lambda}_k(\varepsilon))r_{jk}(t,\ \varepsilon)$$

pour $j=m,\ k=m+1$ et $j=m',\ k=1$.

Puisqu'on suppose que (4.7) entraîne (4.8), on n'a pas (4.7) pour $j=m$, $k=m+1$ et $j=m'$, $k=1$. Une fonction $r_{jk}(t,\ \varepsilon)$ satisfaisant à (13.3) et admettant la période ω est identiquement nulle.

Alors les deux derniers termes du second membre de (13.2) s'annulent pour

$$j=m,\ k=m+2;\quad j=m-1,\ k=m+1;$$
$$j=m',\ k=2;\qquad j=m'-1,\ k=1.$$

On obtient donc (13.3), et les fonctions $r_{jk}(t,\ \varepsilon)$ sont identiquement nulles.

On verra de même que les fonctions $r_{jk}(t,\ \varepsilon)$ sont identiquement nulles pour

$$j=m,\ k=m+3;\quad j=m-1,\ k=m+2;\quad j=m-2,\ k=m+1;$$
$$j=m',\ k=3;\qquad j=m'-1,\ k=2;\qquad j=m'-2,\ k=1,$$

et ainsi de suite.

Par conséquent, les fonctions $r_{jk}(t,\ \varepsilon)$ sont identiquement nulles pour

$$\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)\neq\tilde{\lambda}_k(\varepsilon).$$

14. Considérons maintenant le cas de

$$i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

Nous supposons, par exemple, que l'on ait (13.1). On aura alors

$$(14.1)\qquad \frac{d}{dt} r_{jk}(t,\ \varepsilon)=\tilde{\delta}_j r_{j+1,\,k}(t,\ \varepsilon)-\tilde{\delta}_{k-1} r_{j,\,k-1}(t,\ \varepsilon).$$

Pour $j=m$, $k=1$, le second membre de cette relation est identiquement nul. Par suite

$$(14.2)\qquad r_{jk}(t,\ \varepsilon)=r_{jk}(\varepsilon)$$

est indépendante de t.

Pour $j=m$, $k=2$, la relation (14.1) devient

$$(14.3)\qquad \frac{d}{dt} r_{jk}(t,\ \varepsilon)=-r_{j,\,k-1}(\varepsilon)$$

et la périodicité de $r_{jk}(t,\ \varepsilon)$ entraîne la nullité du second membre. Par suite

$$(14.4)\qquad r_{jk}(t,\ \varepsilon)=0$$

pour $j=m$, $k=1$, et la fonction $r_{jk}(t,\ \varepsilon)$ est indépendante de t pour $j=m$, $k=2$.

Pour $j=m$, $k=3$, la relation (14.1) devient alors (14.3) et la périodicité de $r_{jk}(t, \varepsilon)$ entraîne la nullité du second membre. Par suite, on a (14.4) pour $j=m$, $k=2$ et la fonction $r_{jk}(t, \varepsilon)$ est indépendante de t pour $j=m$, $k=3$.

Nous pouvons ainsi démontrer de proche en proche que l'on a (14.4) pour $j=m$, $k=1, 2, \ldots\ldots, m-1$ et que la fonction $r_{mm}(t, \varepsilon)$ est indépendante de t.

Si l'on pose $j=m-1$, $k=1$ dans (14.1) le second membre de (14.1) s'annule. La fonction $r_{jk}(t, \varepsilon)$ est donc indépendante de t pour $j=m-1$, $k=1$. Si l'on pose $j=m-1$, $k=2$ dans (14.1), on aura (14.3) et la périodicité de $r_{jk}(t, \varepsilon)$ entraîne la nullité du second membre. On a donc (14.4) pour $j=m-1$, $k=1$ et la fonction $r_{m-1, 2}(t, \varepsilon)$ est indépendante de t.

On peut donc démontrer comme tout à l'heure que l'on a (14.4) pour $j=m-1$, $k=1, 2, \ldots\ldots, m-2$ et que $r_{jk}(t, \varepsilon)$ est indépendante de t pour $j=k=m-1$. Alors la relation (14.1) devient

$$\frac{d}{dt} r_{jk}(t, \varepsilon)=r_{j+1, k}(\varepsilon)-r_{j, k-1}(\varepsilon) \tag{14.5}$$

pour $j=m-1$, $k=m$. La périodicité de $r_{jk}(t, \varepsilon)$ entraîne la nullité du second membre. Par suite on a

$$r_{j+1, k}(\varepsilon)-r_{j, k-1}(\varepsilon)=0 \tag{14.6}$$

et la fonction $r_{m-1, m}(t, \varepsilon)$ est indépendante de t.

En continuant de la sorte, nous arrivons à la conclusion suivante.

Les fonctions $r_{jk}(t, \varepsilon)$ (j, $k=1, 2, \ldots\ldots, m$) sont indépendante de t. On a en particulier (14.4) pour $j>k$ et (14.6) pour $j<k$.

Il est clair qu'il en est de même des fonctions $r_{jk}(t, \varepsilon)$ (j, $k=m+1, \ldots\ldots, m'$).

Pour $j=m'$, $k=1$, le second membre de (14.1) s'annule aussi. Par suite $r_{jk}(t, \varepsilon)$ est indépendante de t pour $j=m'$, $k=1$. On a alors (14.3) pour $j=m'$, $k=2$ et la périodicité de $r_{m'2}(t, \varepsilon)$ entraîne la nullité de $r_{m'1}(\varepsilon)$ et ainsi de suite. Par conséquent, nous pouvons en conclure que les séries formelles $r_{jk}(t, \varepsilon)$ sont indépendantes de t pour $j=m+1, \ldots\ldots, m'$; $k=1, 2, \ldots\ldots, m$ et que leur matrice est triangulaire et obliquement constante.

Il en est de même des séries formelles $r_{jk}(t, \varepsilon)$ ($j=1, 2, \ldots\ldots, m$; $k=m+1, \ldots\ldots, m'$).

15. Résumons les résultats obtenus dans cette section.

Nous pouvons écrire la matrice $\tilde{A}(\varepsilon)$ comme il suit:

$$(15.1)\qquad \check{A}(\varepsilon)=\begin{pmatrix} \rho_1(\varepsilon)I_{n_1}+E_{n_1} & O & \cdots & O \\ O & \rho_2(\varepsilon)I_{n_2}+E_{n_2} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & \rho_r(\varepsilon)I_{n_r}+E_{n_r} \end{pmatrix}.$$

Ecrivons de même la matrice $R(t, \varepsilon)$ sous la forme

$$(15.2)\qquad R(t, \varepsilon)=\begin{pmatrix} R_{11}(t, \varepsilon) & R_{12}(t, \varepsilon) & \cdots & R_{1r}(t, \varepsilon) \\ R_{21}(t, \varepsilon) & R_{22}(t, \varepsilon) & \cdots & R_{2r}(t, \varepsilon) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{r1}(t, \varepsilon) & R_{r2}(t, \varepsilon) & \cdots & R_{rr}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

les nombres des lignes et des colonnes de $R_{jk}(t, \varepsilon)$ étant égaux à n_j et n_k.

Si l'équation (4.2) *reste invariable par la transformation* (12.1) *dont le coefficient admet une période* ω, *la matrice* $R(t, \varepsilon)=R(\varepsilon)$ *est nécessairement indépendante de* t *et les* $R_{jk}(t, \varepsilon)=R_{jk}(\varepsilon)$ *sont des matrices triangulaires obliquement constantes qui deviennent* O *pour* $\rho_j(\varepsilon)\neq\rho_k(\varepsilon)$.

La réciproque est aussi vraie.

V. Convergence de la solution formelle.

16. Soit (4.11) une transformation formelle par laquelle (3.2) se change en (4.2). Considérons d'autre part une transformation formelle quelconque

$$(16.1)\qquad \vec{x}=P(t, \varepsilon)\vec{\xi}$$

qui amène (3.2) en (4.2).

Si l'on pose

$$(16.2)\qquad \tilde{P}(t, \varepsilon)^{-1}P(t, \varepsilon)=R(t, \varepsilon),$$

l'équation (4.2) reste invariable par la transformation (12.1). Par suite on a la proposition suivante.

Pour que la transformation formelle (16.1) *amène* (3.2) *en* (4.2), *il faut et il suffit que la matrice* $R(t, \varepsilon)$ *définie par* (16.2) *satisfasse aux conditions de la proposition du* n° 15.

$R(t,\varepsilon)$ étant indépendante de t, nous la désignerons par $R(\varepsilon)$. On aura alors

$$(16.3)\qquad P(t, \varepsilon)=\tilde{P}(t, \varepsilon)R(\varepsilon).$$

17. Ecrivons

$$(17.1)\qquad \tilde{P}(t, \varepsilon)=(\tilde{P}_{jk}(t, \varepsilon)),\ P(t, \varepsilon)=(P_{jk}(t, \varepsilon)),\ R(\varepsilon)=(R_{jk}(\varepsilon)),$$

$\tilde{P}_{jk}(t, \varepsilon)$, $P_{jk}(t, \varepsilon)$ et $R_{jk}(\varepsilon)$ étant des matrices avec n_j lignes et n_k colonnes. Soient $\tilde{p}_{jkuv}(t, \varepsilon)$, $p_{jkuv}(t, \varepsilon)$, $r_{jkuv}(\varepsilon)$ leurs éléments. On aura sans peine

$$(17.2)\qquad p_{jkuv}(t, \varepsilon)=\sum_{\rho_l(\varepsilon)=\rho_k(\varepsilon)}\sum_{s=1}^{n(l,k)+v}\tilde{p}_{jlus}(t, \varepsilon)\,r_{lksv}(\varepsilon),$$

où

$$(17.3)\qquad n(j,\ k)=min\{n_j,\ n_k\}-n_k.$$

En y posant $t=0$, nous obtenons

$$(17.4)\qquad p_{jk1v}(0,\ \varepsilon)=\sum_{\rho_l(\varepsilon)=\rho_k(\varepsilon)}\sum_{s=1}^{n(l,\ k)+v}\tilde{p}_{jl1s}(0,\ \varepsilon)r_{lksv}(\varepsilon).$$

Posons maintenant

$$\tilde{q}_{jk1v}(\varepsilon)=\tilde{q}_{jk2,\ v+1}(\varepsilon)=\cdots\cdots=\tilde{q}_{jk\ n_k-v+1,\ n_k}(\varepsilon)=\tilde{p}_{jk1v}(0,\ \varepsilon),$$
$$q_{jk1v}(\varepsilon)=q_{jk2,\ v+1}(\varepsilon)=\cdots\cdots=q_{jk,\ n_k-v+1,\ n_k}(\varepsilon)=p_{jk1v}(0,\ \varepsilon).$$

Si l'on remplace v par $v-u+1$ dans (17.4), on obtient immédiatement

$$q_{jkuv}(\varepsilon)=\sum_{\rho_l(\varepsilon)=\rho_k(\varepsilon)}\sum_{s=1}^{n(l,\ k)+v}\tilde{q}_{jlus}(\varepsilon)r_{lksv}(\varepsilon).$$

Par suite, si l'on désigne par $\tilde{Q}_{jk}(\varepsilon)$ et $Q_{jk}(\varepsilon)$ les matrices triangulaires obliquement constantes dont les éléments non nuls sont respectivement $\tilde{q}_{jkuv}(\varepsilon)$ et $q_{jkuv}(\varepsilon)$ définies plus haut, et si l'on pose

$$\tilde{Q}(\varepsilon)=(\tilde{Q}_{jk}(\varepsilon)),\quad Q(\varepsilon)=(Q_{jk}(\varepsilon)),$$

on a

$$(17.5)\qquad Q(\varepsilon)=\tilde{Q}(\varepsilon)R(\varepsilon).$$

Nous supposons que le déterminant $|\tilde{Q}(\varepsilon)|$ ne soit pas nul.

Les déterminants $|\tilde{P}(t,\ \varepsilon)|$ et $|P(t,\ \varepsilon)|$ étant supposés différents de 0, le déterminant $|R(\varepsilon)|$ l'est aussi. La relation (17.5) montre que le déterminant $|Q(\varepsilon)|$ est aussi différent de 0. Par conséquent on arrive à la conclusion suivante.

S'il existe une transformation formelle amenant (3.2) *en* (4.2) *et telle que le déterminant* $|Q(\varepsilon)|$ *défini plus haut ne soit pas nul, toute autre transformation formelle amenant* (3.2) *en* (4.2) *jouit de la même propriété.*

Quand deux transformations formelles (4.11) *et* (16.1) *sont données, la relation* (17.5) *détermine* $R(\varepsilon)$.

18. Il est maintenant facile de montrer que la transformation formelle (16.1) se détermine d'une seule manière si l'on donne les séries formelles $p_{jk1v}(0,\ \varepsilon)$ pour

$$(18.1)\qquad \rho_j(\varepsilon)=\rho_k(\varepsilon),\ n_k-min\{n_j,\ n_k\}<v\leqq n_k.$$

Car la relation (17.5) détermine $R(\varepsilon)$ et puis la relation (16.3) détermine $P(t,\ \varepsilon)$.

Les séries formelles $p_{jk1v}(0,\ \varepsilon)$ sont arbitraires pour (18.1) pourvu que le déterminant $|Q(\varepsilon)|$ ne soit pas nul, car, en résolvant (17.5) par rapport à $R(\varepsilon)$, nous obtenons une matrice triangulaire obliquement constante.

Supposons que le développement de $P(t, \varepsilon)$ converge pour ε assez petit. Alors le développement de $Q(\varepsilon)$ converge aussi pour ε assez petit.

Si le développement de $Q(\varepsilon)$ est convergent pour ε assez petit, celui de $R(\varepsilon)$ l'est aussi d'après (17.5). La relation (16.3) montre ensuite que celui de $P(t, \varepsilon)$ converge pour ε assez petit.

Réciproquement, si le développement de $P(t, \varepsilon)$ est convergent pour ε assez petit, celui de $Q(\varepsilon)$ l'est aussi. Nous obtenons donc la proposition suivante.

Supposons que la transformation formelle (16.1) *amène* (3.2) *en* (4.2). *Pour que le développement de* $P(t, \varepsilon)$ *soit convergent pour* ε *assez petit, il faut et il suffit que le développement de la matrice* $Q(\varepsilon)$ *définie au* n° 17 *soit convergent pour* ε *assez petit et que le déterminant* $|Q(\varepsilon)|$ *ne soit pas nul.*

19. Nous avons supposé que, parmi les transformations formelles (4.11) amenant (3.2) en (4.2), il existe une telle que le déterminant $|Q(\varepsilon)|$ ne soit pas nul. Dans le cas où cette condition n'est pas remplie, nous désignons par $P_N(t, \varepsilon)$ la somme des N premier termes dans le développement de $\tilde{P}(t, \varepsilon)$. Par la transformation

$$\vec{x}=P_N(t, \varepsilon)\vec{y},$$

l'équation différentielle (3.2) se change en l'équation différentielle (3.4) qui se ramène en (4.2) par la transformation

$$\vec{y}=P_N(t, \varepsilon)^{-1}\tilde{P}(t, \varepsilon)\vec{\xi}.$$

Or, le développement de la matrice

$$P_N(t, \varepsilon)^{-1}\tilde{P}(t, \varepsilon)$$

commence par le terme I pourvu que N soit suffisamment grand. On peut donc appliquer la proposition du n° 18 à l'équation transformée (3.4).