Sur un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients constants ou périodiques, II.

Par Yasutaka SIBUYA.

I. Introduction.

1. Nous étudierons encore

I. dans le premier cas, un système des équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j x_j + \sum{}'' a_{j\mathfrak{p}} x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n)\,,^{1)} \tag{1}$$

les seconds membres étant convergents pour $\|x\| < \delta$ $(\delta > 0)$, en supposant que le système (1) se réduit à un système

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n)\,, \tag{2}$$

par une transformation formelle

$$x_j = y_j + \sum{}'' \gamma_{j\mathfrak{p}} y_1^{p_1} \cdots y_n^{p_n} \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n); \tag{3}$$

II. dans le deuxième cas, un système des équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j x_j + \sum{}'' a_{j\mathfrak{p}}(t) x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} \quad (j = 1, \ldots\ldots, n), \tag{4}$$

les seconds membres étant convergents pour $-\infty < t < +\infty$ et $\|x\| < \delta$ $(\delta > 0)$, et les $a_{j\mathfrak{p}}(t)$ étant continus et admettant la période 2π par rapport à t pour $-\infty < t < +\infty$, en y supposant l'existence d'une transformation formelle

$$x_j = y_j + \sum{}'' \gamma_{j\mathfrak{p}}(t) y_1^{p_1} \cdots y_n^{p_n} \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n)\,, \tag{5}$$

par laquelle le système (4) se réduit formellement à un système (2); les coefficients $\gamma_{j\mathfrak{p}}(t)$ sont des fonctions dérivables et admettant la période 2π.

Dans notre mémoire précédent[2] tous les exposants caractéristiques $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$ sont supposés purement imaginaires; c'est cette hypothèse que nous voulons maintenant supprimer.

2. Nous utiliserons les résultants déjà démontrés (loc. cit.): Dans le cas I,

(i) la transformation (3) se détermine d'une seule manière par les conditions

---

1) Nous emploierons les notations suivantes:
$\mathfrak{p} = (p_1, \ldots\ldots, p_n)$, les p_j étant des entiers non négatifs;

$$\sigma[\mathfrak{p}] = \sum_{k=1}^{n} p_k, \quad \lambda(\mathfrak{p}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k, \quad \lambda(j, \mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{p}) - \lambda_j,$$

$$E(j, \mathfrak{p}) = \exp(2\pi\lambda(j, \mathfrak{p})); \quad \|x\| = \max\{|x_1|, \ldots\ldots, |x_n|\}.$$

2) Y. Sibuya, Sur un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients constants ou périodiques, ce jour.

$$(6) \qquad \gamma_{j\mathfrak{p}} = 0 \qquad (\lambda(j, \mathfrak{p}) = 0,\ \sigma[\mathfrak{p}] \geqq 2);$$

(ii) la solution $\varphi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$ de (1) telle que $x_j(0) = \xi_j$ est développable en séries entières de $(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$

$$(7) \qquad \varphi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) = \xi_j e^{\lambda_j t} + \sum{}'' \varphi_{j\mathfrak{p}}(t) \xi_1^{p_1} \cdots \xi_n^{p_n} \ (j=1, \ldots\ldots, n),$$

et elle se réduit à la solution formelle

$$(8) \qquad x_j = C_j e^{\lambda_j t} + \sum{}'' \gamma_{j\mathfrak{p}} \exp(\lambda(\mathfrak{p})t) C_1^{p_1} \cdots C_n^{p_n} \qquad (j=1, \ldots\ldots, n),$$

par la transformation formelle de constantes arbitraires

$$(9) \qquad \xi_j = C_j + \sum{}'' \gamma_{j\mathfrak{p}} C_1^{p_1} \cdots C_n^{p_n} \qquad (j=1, \ldots\ldots, n).$$

Dans le cas II, (iii) la transformation (5) se détermine d'une seule manière par les conditions

$$(10) \qquad \int_0^{2\pi} \gamma_{j\mathfrak{p}}(t) \exp(\lambda(j, \mathfrak{p})t) dt = 0 \quad (E(j, \mathfrak{p}) = 1,\ \sigma[\mathfrak{p}] \geqq 2);$$

(iv) la solution $\phi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$ de (4) telle que $x_j(0) = \xi_j$ est développable en séries entières de $(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$

$$(11) \qquad \phi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) = \xi_j e^{\lambda_j t} + \sum{}'' \phi_{j\mathfrak{p}}(t) \xi_1^{p_1} \cdots \xi_n^{p_n} \ (j=1, \ldots\ldots, n),$$

et elle se réduit à la solution formelle

$$(12) \qquad x_j = C_j e^{\lambda_j t} + \sum{}'' \gamma_{j\mathfrak{p}}(t) \exp(\lambda(\mathfrak{p})t) C_1^{p_1} \cdots C_n^{p_n} \ (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

par la transformation formelle de constantes arbitraires

$$(13) \qquad \xi_j = C_j + \sum{}'' \gamma_{j\mathfrak{p}}(0) C_1^{p_1} \cdots C_n^{p_n} \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n).$$

Les séries (7) et (11) convergent pour $|t| \leqq K$, $\|\xi\| < \delta$, où $K>0$ peut être arbitraire, mais δ dépend de K.

Nous supposerons dans la suite que les transformations (3) et (5) remplissent respectivement les conditions (6) et (10).

3. Soit

$$(14) \qquad \Re\lambda_j \begin{cases} = & (j = 1, \ldots\ldots, s), \\ > 0 & (j = s+1, \ldots\ldots, \tau), \\ < & (j = \tau+1, \ldots\ldots, n). \end{cases}$$

Alors, les théorèmes que nous allons démontrer s'énoncent comme il suit:

Théorème 1. *Dans le cas I, soient $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r (r \leqq s)$ tous les exposants caractéristiques tels que les $e^{\lambda_j t}$ $(j=1, \ldots\ldots, r)$ admettent une période commune $\omega>0$ par rapport à t. Alors, la solution formelle (8) satisfaisant à (6) converge dans deux cas suivants:*

1°. $\qquad C_{r+1} = \cdots = C_s = C_{s+1} = \cdots = C_\tau = 0;$

2°. $\qquad C_{r+1} = \cdots = C_s = C_{\tau+1} = \cdots = C_n = 0.$

Théorème 2. *Dans le cas II, soient $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r$ $(r \leqq s)$ tous les ex-*

posants caractéristiques tels que e^{it} et les $e^{\lambda_j t}$ $(j=1, \ldots, r)$ admettent une période commune $\omega>0$ par rapport à t. Alors, la solution formelle (12) satisfaisant à (10) converge dans deux cas 1° et 2°.

Si $r=s$, $\tau=n$, on a les deux corollaires suivants:

Corollaire 1. *Dans le cas I, la solution formelle (8) satisfaisant à (6) converge si*

$$\Re\lambda_j \begin{cases} = & & (j=1, \ldots\ldots, r), \\ & 0 & \\ > & & (j=r+1, \ldots\ldots, n), \end{cases}$$

et si les $e^{\lambda_j t}$ $(j=1, \ldots, r)$ admettent une période commune $\omega>0$ par rapport à t.

Corollaire 2. *Dans le cas II, la solution formelle (12) satisfaisant à (10) converge si*

$$\Re\lambda_j \begin{cases} = & & (j=1, \ldots\ldots, r), \\ & 0 & \\ > & & (j=r+1, \ldots\ldots, n), \end{cases}$$

et si e^{it} et les $e^{\lambda_j t}$ $(j=1, \ldots\ldots, r)$ admettent une période commune $\omega>0$ par rapport à t.

En particulier, si $r=n$, on retrouve les résultats établis dans notre mémoire précédent (loc. cit. Théorème 1, 1°; Théorème 2, 3°).

Sous ces hypothèses, on ne rencontre que des équations différentielles périodiques et des fonctions périodiques. Mais, dans notre mémoire précédent on a rencontré des équations différentielles (linéaires) presque-périodiques et des fonctions presque-périodiques (loc. cit. Théorème 1, 2°; Théorème 2, 4°). L'extension des résultats de ces cas est plus difficile. Dans ces cas, nous pouvons seulement énoncer les théorèmes suivants.

Théorème 3. *Dans le cas I, s'il exste des relations analytiques entre les valeurs initiales $(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$*

$$\xi_j=\xi_j(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau)=(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau)_2 \quad (j=\tau+1, \ldots\ldots, n),$$

telles que

$$|\xi(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau, \xi_{\tau+1}(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau), \ldots\ldots, \xi_n(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau))| \leqq M$$

pour $-\infty<t\leqq 0$, $\|\xi\|<\delta$, où M ne dépend pas de $(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau)$, la solution formelle (8) satisfaisant à (6) converge pour

$$C_{s+1}=\cdots=C_n=0\,.$$

Théorème 4. *Dans le cas II, s'il existe des relations analytiques entre les valeurs initiales $(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$*

$$\xi_j=\xi_j(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau)=(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau)_2 \quad (j=\tau+1, \ldots\ldots, n),$$

telles que

$$|\phi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau, \xi_{\tau+1}(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau), \ldots\ldots, \xi_n(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau))| \leqq M$$

pour $-\infty < t \leqq 0$, $\|\xi\| < \delta$, *où* M *ne dépend pas de* $(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau)$, *la solution formelle* (12) *satisfaisant à* (10) *converge pour*

$$C_{s+1} = \cdots\cdot = C_n = 0\,.$$

Corollaire 3. *Dans le cas I, si*

$$\Re\lambda_j \begin{cases} = & 0 \quad (j = 1, \ldots\ldots, s)\,, \\ > & 0 \quad (j = s+1, \ldots\ldots, n)\,, \end{cases}$$

et si

$$|\varphi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)| \leqq M \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

pour $-\infty < t \leqq 0$, $\|\xi\| < \delta$, *où* M *ne dépend pas de* $(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, *la solution formelle* (8) *satisfaisant à* (6) *converge pour*

$$C_{s+1} = \cdots\cdot = C_n = 0\,.$$

Corollaire 4. *Dans le cas II, si*

$$\Re\lambda_j \begin{cases} = & 0 \quad (j = 1, \ldots\ldots, s)\,, \\ > & 0 \quad (j = s+1, \ldots\ldots, n)\,, \end{cases}$$

et si

$$|\phi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)| \leqq M \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n)\,,$$

pour $-\infty < t \leqq 0$, $\|\xi\| < \delta$, *où* M *ne dépend pas de* $(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$, *la solution formelle* (12) *satisfaisant à* (10) *converge pour*

$$C_{s+1} = \cdots\cdot = C_n = 0\,.$$

Nous remarquons que les théorèmes 3, 4, et les corollaires 3, 4 énoncent l'existence des solutions presque-périodiques.

II. Lemmes. Dans cette section, nous démontrerons quelques lemmes sur un système des équations différentielles linéaires contenant des paramètres.

4. Soit une matrice carrée (à n lignes et à n colonnes),

$$(15) \qquad A(z_1, \ldots\ldots, z_r) \equiv A(z)\,,$$

analytique par rapport aux variables complexes $(z_1, \ldots\ldots, z_r)$ pour $\|z\| < \delta$ $(\delta > 0)$,

$$A_0 = A(0, \ldots\ldots, 0)$$

étant de la forme diagonale.

Nous considérons une matrice carrée formelle

$$(16) \qquad P(z_1, \ldots\ldots, z_r) = P_0 + \sum' P_{\mathfrak{p}} z_1^{p_1} \cdots\cdot z_r^{p_r} \equiv P(z)\,,$$

où P_0 et les $P_{\mathfrak{p}}$ sont des matrices constantes, le premier étant non singulier.

Nous démontrerons d'abord le

Lemme 1. *Si une matrice formelle* (16) *satisfait à l'égalité formelle*

$$(17) \qquad A(z)P(z) = P(z)A_0\,,$$

on peut trouver une matrice (16) *satisfaisant à* (17) *et développable en une série convergente.*

Ecrivons A_0 comme il suit:

$$A_0=\begin{pmatrix} \mu_1 E & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_s E \end{pmatrix},$$

où E est la matrice-unité et

(18) $$\mu_j \neq \mu_k \qquad (j \neq k).$$

Correspondant à la forme de A_0, on peut écrire

$$A(z)=\begin{pmatrix} A_{11}(z), & \cdots\cdots, & A_{1s}(z) \\ A_{21}(z), & \cdots\cdots, & A_{2s}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1}(z), & \cdots\cdots, & A_{ss}(z) \end{pmatrix},$$

$$P(z)=\begin{pmatrix} P_{11}(z), & \cdots\cdots, & P_{1s}(z) \\ P_{21}(z), & \cdots\cdots, & P_{2s}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{s1}(z), & \cdots\cdots, & P_{ss}(z) \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose

$$Q=\begin{pmatrix} P_{11}^{-1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & P_{ss}^{-1} \end{pmatrix},$$

on a évidemment

$$A(z)P(z)Q(z)=P(z)Q(z)A_0,$$

et

$$P(z)Q(z)=\begin{pmatrix} E, & P_{12}P_{22}^{-1}, & \cdots\cdots, & P_{1s}P_{ss}^{-1} \\ P_{21}P_{11}^{-1}, & E, & \cdots\cdots, & P_{2s}P_{ss}^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{s1}P_{11}^{-1}, & P_{s2}P_{22}^{-1}, & \cdots\cdots, & E \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons donc supposer dans la suite

$$P_{jj}=E \qquad (j=1, \cdots\cdots, s).$$

Ceci posé, montrons que chaque P_{jk} est une série convergente.

On voit facilement

$$A_{j1}+\sum_{h=2}^{s} A_{jh}P_{h1}-\mu_1 P_{j1}=O \qquad (j=1, \cdots\cdots, s),$$

d'où

$$-A_{j1}=(A_{jj}-\mu_1 E)P_{j1}+\sum_{\substack{h=2\\ h\neq j}}^{s} A_{jh}P_{h1},$$

c'est-à-dire

$$-\begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \\ \cdots \\ A_{s1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22}-\mu_1 E, & A_{23}, \ \ldots\ldots, & A_{2s} \\ A_{32}, & A_{33}-\mu_1 E, \ \ldots\ldots, & A_{3s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{s2}, & A_{s3}, \ \ldots\ldots, & A_{ss}-\mu_1 E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{21} \\ P_{31} \\ \cdots \\ P_{s1} \end{pmatrix} \equiv \tilde{A}(z)\tilde{P}(z).$$

En vertu de (18),

$$A_{jj}(0)-\mu_1 E = (\mu_j-\mu_1)E \neq O \qquad (j = 2, \ldots\ldots, s),$$

et

$$A_{jk}(0) = O \qquad (j \neq k).$$

Par conséquent, la matrice $\tilde{A}(z)$ admet la matrice inverse pour les valeurs assez petites de $(z_1, \ldots\ldots, z_r)$. Par suite, les P_{j1} $(j = 2, \ldots\ldots, s)$ sont développables en séries convergentes. Il en est de même de chaque $P_{jk}(z)$ $(j \neq k)$.

5. Désignons par $\vec{x}$ un vecteur

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Nous considérons une équation différentielle linéaire contenant des paramètres $(z_1, \ldots\ldots, z_r)$,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t, z_1, \ldots\ldots, z_r)\vec{x} \equiv A(t, z)\vec{x}, \tag{19}$$

où $A(t, z)$ est une matrice continue pour $-\infty < t < +\infty$, $\|z\| < \delta$ $(\delta > 0)$ et analytique par rapport à $(z_1, \ldots\ldots, z_r)$.

On sait qu'il existe une matrice et une seule

$$\Phi(t, z_1, \ldots\ldots, z_r) \equiv \Phi(t, z),$$

satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{\partial \Phi(t, z)}{\partial t} = A(t, z)\Phi(t, z), \tag{20}$$

et à la condition

$$\Phi(0, z) = E.$$

$\Phi(t, z)$ est analytique par rapport à $(z_1, \ldots\ldots, z_r)$ pour les valeurs assez petites de z, et chaque matrice $\Psi(t, z)$ satisfaisant à (20) peut s'écrire

$$\Psi(t, z) = \Phi(t, z)\Psi(0, z).$$

Soit

$$U(t, z) = U_0(t) + \sum{}' U_{\mathfrak{p}}(t) z_1^{p_1} \cdots z_r^{p_r}, \tag{21}$$

une solution formelle de (20); les coefficients U_0, $U_{\mathfrak{p}}$ sont dérivables par rapport à t et $U_0(t)$ est non singulier.

Alors on peut démontrer le

Lemme 2. *La solution formelle* (21) *de* (20) *satisfait à l'égalité formelle*

$$U(t, z) = \Phi(t, z)U(0, z). \tag{22}$$

Pour le démontrer, il suffit de montrer que

$$U_N(t, z) = \Phi(t, z)U_N(0, z) + (z;\ t)_{N+1},$$

où

$$U_N(t, z) = U_0(t) + \sum_1^N U_p(t) z_1^{p_1} \cdots z_r^{p_r}.$$

Faisons le changement de variables

$$\vec{x} = U_N(t, z)\vec{y},$$

et soit

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = B(t, z)\vec{y} \tag{23}$$

l'équation en $\vec{y}$. On a facilement

$$A(t, z)U_N(t, z) = \frac{\partial U_N(t, z)}{\partial t} + U_N(t, z)B(t, z).$$

Puisque

$$A(t, z)U(t, z) = \frac{\partial U(t, z)}{\partial t},$$

on a

$$B(t, z) = U_N^{-1}(t, z)\left(A(t, z)U_N(t, z) - \frac{\partial U_N(t, z)}{\partial t}\right) = (z;\ t)_{N+1}. \tag{24}$$

Posons, ensuite,

$$\vec{u} = \vec{y} - \vec{y}_0.$$

L'équation en $\vec{u}$ prend la forme

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = B(t, z)(\vec{u} + \vec{y}_0). \tag{25}$$

En vertu de (24), si $\|z\| < \delta$, $\|\vec{u}\| \leqq \sigma \|\vec{y}_0\|$, $|t| \leqq K$, où δ est un nombre positif assez petit et σ, K des nombres positifs quelconques, on a l'inégalité

$$\|B(t, z)(\vec{u} + \vec{y}_0)\| \leqq G_N \|z\|^{N+1} \|\vec{y}_0\|,$$

G_N étant un nombre positif assez grand et indépendant de (t, z).

Soit $\vec{u}(t)$ une solution de (25) telle que $\vec{u}(0) = 0$. Alors, $\vec{u}(t)$ satisfait à l'inégalité

$$\|\vec{u}(t)\| \leqq G_N \|z\|^{N+1} \|\vec{y}_0\| \, |t| \tag{26}$$

pour $|t| \leqq K$, $\|z\| < \delta$, pourvu que l'on ait

$$G_N \|z\|^{N+1} |t| < G_N \delta^{N+1} K \leqq \sigma.$$

Par conséquent, la solution $\vec{y}(t, \vec{y}_0, z)$ de (23) telle que $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ satisfait à l'inégalité

$$\| \vec{y}(t, \vec{y}_0, z) - \vec{y}_0 \| \leqq G_N \| z \|^{N+1} \| \vec{y}_0 \| \, |t|$$

pour $\|z\| < \delta$, $|t| < K$, si δ est assez petit.

On a donc

$$\vec{y}(t, \vec{y}_0, z) = (E + (z;\ t)_{N+1})\vec{y}_0 .$$

Puisque

$$\begin{aligned} U_N(t, z)\vec{y}(t, \vec{y}_0, z) &= \Phi(t, z) U_N(0, z)\vec{y}_0 \\ &= U_N(t, z)(E + (z;\ t)_{N+1})\vec{y}_0 , \end{aligned}$$

on a

$$U_N(t, z) = \Phi(t, z) U_N(0, z) + (z;\ t)_{N+1} , \qquad \text{c. q. f. d.}$$

6. Dans ce numéro, nous supposerons que $A(t, z)$ de (19) admet une période $\omega > 0$ par rapport à t et que $A_0 = A(t, 0)$ est de la forme diagonale, ses éléments étant indépendants de t.

Sous cette hypothèse, on voit sans peine,

$$\Phi(t + \omega, z) = \Phi(t, z)\Phi(\omega, z) .$$

Soit

$$e^{A_0\omega} = \begin{pmatrix} \mu_1 E & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_s E \end{pmatrix}, \tag{27}$$

où $\mu_j \neq \mu_k$ $(j \neq k)$.

Correspondant à la forme de (27), on peut écrire la solution formelle (21) de (20)

$$U(t, z) = \begin{pmatrix} U_{11}(t, z), \ldots\ldots, U_{1s}(t, z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{s1}(t, z), \ldots\ldots, U_{ss}(t, z) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, soit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega} \int_0^\omega e^{-A_0 t} U(t, z) dt \\ &\quad = \frac{1}{\omega} \Big[\int_0^\omega e^{-A_0 t} U_0(t) dt + \sum\nolimits^{\mathfrak{p}} z_1^{p_1} \cdots z_r^{p_r} \int_0^\omega e^{-A_0 t} U_{\mathfrak{p}}(t) dt \Big] \\ &\quad = \begin{pmatrix} U_{11}(z), \ldots\ldots, U_{1s}(z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{s1}(z), \ldots\ldots, U_{ss}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors, on peut démontrer le

Lemme 3. *Si la solution formelle* (21) *de* (20) *satisfait aux conditions*

$$U(t + \omega, z) = U(t, z) e^{A_0\omega} , \tag{28}$$

et

$$(29) \qquad U_{jj}(z) = E \qquad (j = 1, \ldots\ldots, s),$$

cette solution formelle est convergente pour les valeurs assez petites de z.

Démontrons d'abord l'unicité d'une solution formelle (21) satisfaisant à (28) et (29).

Supposons à ce but que $U(t, z)$ et $V(t, z)$ sont de telles solutions formelles de (20). En vertu du lemme 2, on peut écrire formellement

$$U(t, z) = \Phi(t, z)U(0, z),$$
$$V(t, z) = \Phi(t, z)V(0, z),$$

d'où l'on déduit

$$V(t, z) = U(t, z)Q(z),$$

où

$$Q(z) = U^{-1}(0, z)V(0, z) = \begin{pmatrix} Q_{11}, & \ldots\ldots, & Q_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{s1}, & \ldots\ldots, & Q_{ss} \end{pmatrix}.$$

D'après la condition (28), on a

$$V(t+\omega, z) = V(t, z)e^{A_0\omega} = U(t, z)Q(z)e^{A_0\omega},$$
$$V(t+\omega, z) = U(t, z)e^{A_0\omega}Q(z),$$

d'où

$$e^{A_0\omega}Q(z) = Q(z)e^{A_0\omega}.$$

Par suite,

$$Q_{jk} = O \qquad (j \neq k).$$

En outre, d'après la condition (29), on a

$$Q_{jj} = E \qquad (j = 1, \cdots\cdot, s),$$

ce qui montre

$$V(t, z) \equiv U(t, z).$$

Ensuite, la relation formelle

$$U(t, z) = \Phi(t, z)U(0, z)$$

entraîne

$$U(t, z)e^{A_0\omega} = \Phi(t+\omega, z)U(0, z),$$

d'où

$$U(0, z)e^{A_0\omega} = \Phi(\omega, z)U(0, z).$$

Cependant, on voit facilement

$$\Phi(\omega, 0) = e^{A_0\omega},$$

car

$$\frac{d\Phi(t, 0)}{dt} = A_0\Phi(t, 0).$$

Par suite, en vertu du lemme 1, il existe une matrice

$$V(z_1, \ldots\ldots, z_r) \equiv V(z),$$

analytique par rapport à $(z_1, \ldots\ldots, z_r)$ et satisfaisant à l'égalité

$$\Phi(\omega, z)V(z) = V(z)e^{A_0\omega}.$$

Posons

$$V(t, z) = \Phi(t, z)V(z).$$

Il est évident que $V(t, z)$ est une solution de (20) et satisfait à l'égalité (28), car

$$\begin{aligned} V(t+\omega, z) &= \Phi(t+\omega, z)V(z) \\ &= \Phi(t, z)\Phi(\omega, z)V(z) \\ &= \Phi(t, z)V(z)e^{A_0\omega} \\ &= V(t, z)e^{A_0\omega}. \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} e^{-A_0 t}V(t, z)dt = \begin{pmatrix} Q_{11}, & \ldots\ldots, & Q_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{s1}, & \ldots\ldots, & Q_{ss} \end{pmatrix},$$

et posons

$$\tilde{U}(t, z) = V(t, z)\begin{pmatrix} Q_{11}^{-1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & Q_{ss}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Alors, on voit facilement que $\tilde{U}(t, z)$ est une solution de (20) satisfaisant à (28) et (29). Par suite, d'après l'unicité, il faut que

$$\tilde{U}(t, z) \equiv U(t, z),$$

ce qui entraîne la covergence de $U(t, z)$ satisfaisant à (28) et (29).

III. La démonstration des Théorèmes 1 et 2. Dans cette section nous donnerons seulement la démonstration de la première partie (1°) du théorème 1. La deuxième partie du théorème 1 et le théorème 2 seront démontrés de la même manière.

7. L'existence de la solution périodique. Dans ce numéro nous démontrerons la proposition suivante:

Sous les hypothèses du théorème 1, il existe une solution de (1) *qui admet la période* $\omega > 0$ *et contient* r *constantes arbitraires.*

Nous remarquons d'abord

(30) $$e^{\lambda_j(t+\omega)} \neq e^{\lambda_j t} \qquad (j = r+1, \ldots\ldots, n).$$

En vertu de (7) et (30), les équations en $(\xi_{r+1}, \ldots\ldots, \xi_n)$

(31) $$\varphi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) = \varphi_j(t+\omega, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) \quad (j = r+1, \ldots\ldots, n),$$

admettent une solution

(32) $\xi_j=\xi_j(t,\xi_1,\ldots\ldots,\xi_r)=(\xi_1,\ldots\ldots,\xi_r;\ t)_2\quad(j=r+1,\ldots\ldots,n)$,

analytique par rapport à $(\xi_1,\ldots\ldots,\xi_r)$ et continue par rapport à t.

Nous démontrerons que les séries (32) ne dépendent pas de t.

Puisque (7) se réduit formellement à (8) par (9), la substitution

$$\xi_j=\zeta_j+\sum_2^N\gamma_{j\mathfrak{p}}\zeta_1^{p_1}\cdots\cdot\zeta_n^{p_n}\qquad(j=1,\ldots\ldots,n),\tag{33}$$

entraîne

$$\begin{aligned}\varphi_j(t,\xi_1,\ldots\ldots,\xi_n)&=\psi_j(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_n)\\&=\zeta_je^{\lambda_jt}+\sum_2^N\gamma_{j\mathfrak{p}}\exp(\lambda(\mathfrak{p})t)\zeta_1^{p_1}\cdots\cdot\zeta_n^{p_n}+(\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_n;\ t)_{N+1}\\&\qquad(j=1,\ldots\ldots,n).\end{aligned}\tag{34}$$

Au lieu de (31), nous considérons les équations en $(\zeta_{r+1},\ldots\ldots,\zeta_n)$

$$\psi_j(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_n)=\psi_j(t+\omega,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_n)\quad(j=r+1,\ldots\ldots,n).\tag{35}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned}\beta_j(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_n)&=\zeta_je^{\lambda_jt}(1-e^{\lambda_j\omega})\\&\quad+\sum_2^N\gamma_{j\mathfrak{p}}\exp(\lambda(\mathfrak{p})t)(1-\exp(\lambda(\mathfrak{p})\omega))\zeta_1^{p_1}\cdots\cdot\zeta_n^{p_n},\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}&\psi_j(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_n)-\psi_j(t+\omega,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_n)\\&=\beta_j(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_n)+(\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_n;\ t)_{N+1}\qquad(j=r+1,\ldots\ldots,n).\end{aligned}$$

Les relations

$$\exp(\lambda(\mathfrak{p})\omega)=1\qquad(p_{r+1}=\cdots\cdot=p_n=0),$$

entraînent

$$\beta_j(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r,0,\ldots\ldots,0)=0\qquad(j=r+1,\ldots\ldots,n).$$

Alors, si une solution de (35) est de la forme

$$\zeta_j=\zeta_j(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r)=\textstyle\sum_k\zeta_{j\mathfrak{p}}(t)\zeta_1^{p_1}\cdots\cdot\zeta_r^{p_r}+(\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r;\ t)_{k+1}\qquad(j=r+1,\ldots\ldots,n),$$

où $2\leqq k\leqq N$, puisque

$$\begin{aligned}0&=\beta_j(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r,\zeta_{r+1}(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r),\ldots\ldots,\zeta_n(t,\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r))\\&\qquad+(\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r;\ t)_{N+1}\\&=e^{\lambda_jt}(1-e^{\lambda_j\omega})\textstyle\sum_k\zeta_{j\mathfrak{p}}(t)\zeta_1^{p_1}\cdots\cdot\zeta_r^{p_r}+(\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r;\ t)_{k+1},\end{aligned}$$

on a, en vertu de (30),

$$\textstyle\sum_k\zeta_{j\mathfrak{p}}(t)\zeta_1^{p_1}\cdots\cdot\zeta_r^{p_r}=0\qquad(j=r+1,\ldots\ldots,n).$$

Par suite, il faut que la solution de (35) soit de la forme

$$\zeta_j=(\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r;\ t)_{N+1}\qquad(j=r+1,\ldots\ldots,n).\tag{36}$$

En portant (36) dans (33), on a

$$\xi_j=\begin{cases}\zeta_j+\sum_2^N\gamma_{j\mathfrak{p}}\zeta_1^{p_1}\cdots\cdot\zeta_r^{p_r}+(\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r;\ t)_{N+1}\ (j=1,\ldots\ldots,r),\\\sum_2^N\gamma_{j\mathfrak{p}}\zeta_1^{p_1}\cdots\cdot\zeta_r^{p_r}+(\zeta_1,\ldots\ldots,\zeta_r;\ t)_{N+1}\quad(j=r+1,\ldots\ldots,n).\end{cases}\tag{37}$$

En résolvant les r premières relations de (37) par rapport à $(\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r)$, on obtient les séries

$$(38) \quad \zeta_j = \xi_j + \sum_2^N \beta_{j\mathfrak{p}} \xi_1^{p_1} \cdots \xi_r^{p_r} + (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r;\ t)_{N+1} \quad (j = 1, \ldots\ldots, r),$$

où les $\beta_{j\mathfrak{p}}$ ne dépendent pas de t, car les $\gamma_{j\mathfrak{p}}$ sont indépendants de t. En portant (38) dans les deuxièmes relations de (37), on retrouve les séries (32), qui sont de la forme

$$\xi_j = \sum_2^N \xi_{j\mathfrak{p}} \xi_1^{p_1} \cdots \xi_r^{p_r} + (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r;\ t)_{N+1} \qquad (j = r+1, \ldots\ldots, n),$$

où les $\xi_{j\mathfrak{p}}$ ne dépendent pas de t. Par suite, N étant arbitraire, (32) ne dépend pas de t.

Alors, (32) s'écrit

$$(32') \quad \xi_j = \xi_j(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r) = \sum\nolimits'' \xi_{j\mathfrak{p}} \xi_1^{p_1} \cdots \xi_r^{p_r} \qquad (j = r+1, \ldots\ldots, n).$$

En même temps, (36) et (38) s'écrivent respectivement

$$(36') \quad \zeta_j = \zeta_j(\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r) = (\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r)_{N+1} \qquad (j = r+1, \ldots\ldots, n),$$

et

$$(38') \quad \zeta_j = \zeta_j(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r) = \xi_j + (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r)_2 \qquad (j = 1, \ldots\ldots, r).$$

Si l'on pose

$$(39) \quad \varphi_j^*(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r)$$
$$= \varphi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r, \xi_{r+1}(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r), \ldots\ldots, \xi_n(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r))$$
$$= \begin{cases} \xi_j e^{\lambda_j t} + (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r;\ t)_2 & (j = 1, \ldots\ldots, r), \\ (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r;\ t)_2 & (j = r+1, \ldots\ldots, n), \end{cases}$$

et

$$\psi_j^*(t, \zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r)$$
$$= \psi_j(t, \zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r, \zeta_{r+1}(\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r), \ldots\ldots, \zeta_n(\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r))$$
$$= \zeta_j e^{\lambda_j t} + \sum_2^N \gamma_{j\mathfrak{p}} \exp(\lambda(\mathfrak{p})t) \zeta_1^{p_1} \cdots \zeta_r^{p_r} + (\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r;\ t)_{N+1}$$
$$(j = 1, \ldots\ldots, r),$$

on a nécessairement

$$\varphi_j^*(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r) = \psi_j^*(t, \zeta_1(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r), \ldots\ldots, \zeta_r(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r))$$
$$(j = 1, \ldots\ldots, r).$$

Or, on a

$$\varphi_j^*(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r) - \varphi_j^*(t+\omega, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r)$$
$$= \psi_j^*(t, \zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r) - \psi_j^*(t+\omega, \zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r)$$
$$= (\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_r;\ t)_{N+1} = (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r;\ t)_{N+1} \qquad (j = 1, \ldots\ldots, r).$$

N étant arbitraire, on a

$$(40) \quad \varphi_j^*(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r) = \varphi_j^*(t+\omega, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r) \qquad (j = 1, \ldots\ldots, r).$$

On voit de plus

$$(41)\quad \varphi_j^*(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r) = \varphi_j^*(t+\omega, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r) \quad (j = r+1, \ldots\ldots, n),$$

car (32′) est la solution de (31). Donc la solution (39) de (1) admet la période $\omega > 0$, c. q. f. d.

Enfin nous remarquons que, en faisant le changement de constantes arbitraires

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \varphi_j^*(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_r)e^{-\lambda_j t}dt \\ &= \xi_j + (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_r)_2 \qquad (j = 1, \ldots\ldots, r), \end{aligned}$$

(39) se réduit aux séries

$$(42)\quad \Phi_j^*(t, C_1, \ldots\ldots, C_r) = \begin{cases} C_j e^{\lambda_j t} + \sum'' \gamma_{j\mathfrak{p}} \exp(\lambda(\mathfrak{p})t) C_1^{p_1}\cdots\cdots C_r^{p_r} \\ \qquad\qquad (j = 1, \ldots\ldots, r), \\ \sum'' \gamma_{j\mathfrak{p}} \exp(\lambda(\mathfrak{p})t) C_1^{p_1}\cdots\cdots C_r^{p_r} \\ \qquad\qquad (j = r+1, \ldots\ldots, n). \end{cases}$$

(42) s'obtiendra formellement de la solution formelle (8) satisfaisant à (6) en posant $C_{r+1} = \cdots\cdots = C_n = 0$.

8. La première réduction. Dans la suite, dans une expression

$$\sum a_{\mathfrak{p}}(\xi_{j_1}, \ldots\ldots, \xi_{j_r})\xi_{i_1}^{p_{i_1}}\cdots\cdots\xi_{i_s}^{p_{i_s}},$$

où $a_{\mathfrak{p}}(\xi_{j_1}, \ldots\ldots, \xi_{j_r})$ sont des fonctions de $(\xi_{j_1}, \ldots\ldots, \xi_{j_r})$, $\mathfrak{p}$ désigne une permutation d'entiers non négatifs $(p_{i_1}, \ldots\ldots, p_{i_s})$. Par conséquent, $\lambda(\mathfrak{p})$, $\sigma[\mathfrak{p}]$ etc., désignent respectivement $\sum_{k=1}^{s}\lambda_{i_k}p_{i_k}$, $\sum_{k=1}^{s}p_{i_k}$ etc..

Posons $y_j = C_j e^{\lambda_j t}$ $(j = 1, \ldots\ldots, r)$ dans les séries (42). On a les séries

$$(43)\quad P_j(y_1, \ldots\ldots, y_r) = \begin{cases} y_j + \sum'' \gamma_{j\mathfrak{p}} y_1^{p_1}\cdots\cdots y_r^{p_r} & (j = 1, \ldots\ldots, r), \\ \sum'' \gamma_{j\mathfrak{p}} y_1^{p_1}\cdots\cdots y_r^{p_r} & (j = r+1, \ldots\ldots, n), \end{cases}$$

qui sont analytiques par rapport à $(y_1, \ldots\ldots, y_r)$. (43) s'obtiendra de la transformation formelle (3) en posant $y_{r+1} = \cdots\cdots = y_n = 0$.

Faisons le changement de variables

$$(44)\qquad x_j = \begin{cases} P_j(z_1, \ldots\ldots, z_r) & (j = 1, \ldots\ldots, r), \\ z_j + P_j(z_1, \ldots\ldots, z_r) & (j = r+1, \ldots\ldots, n). \end{cases}$$

Les équations en $\vec{z}$ admettent une solution particulière

$$\begin{cases} z_j = C_j e^{\lambda_j t} & (j = 1, \ldots\ldots, r), \\ z_j = 0 & (j = r+1, \ldots\ldots, n). \end{cases}$$

Par conséquent, il faut que, si $z_j = 0$ $(j = r+1, \ldots\ldots, n)$, les équations en $\vec{z}$ se réduisent au système

$$\frac{dz_j}{dt} = \begin{cases} \lambda_j z_j & (j = 1, \ldots\ldots, r), \\ 0 & (j = r+1. \ldots\ldots, n). \end{cases}$$

Donc, si l'on pose

$$\frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j + g_j(z_1, \ldots\ldots, z_n) \quad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

les $g_j(z_1, \ldots\ldots, z_n)$ ne contiennent que des termes de degrés au moins égaux à 1 par rapport à $(z_{r+1}, \ldots\ldots, z_n)$. Par suite, on peut écrire

$$(45) \quad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j + \sum_{k=r+1}^{n} a_{jk}(z_1, \ldots\ldots, z_r) z_k + \sum'' a_{j\mathfrak{p}}(z_1, \ldots\ldots, z_r) z_{r+1}^{p_{r+1}} \cdots z_n^{p_n}$$
$$(j = 1, \ldots\ldots, n),$$

où les $a_{jk}(z_1, \ldots\ldots, z_r)$ et les $a_{j\mathfrak{p}}(z_1, \ldots\ldots, z_r)$ sont des séries entières de $(z_1, \ldots\ldots, z_r)$ et $a_{jk}(0, \ldots\ldots, 0) = 0$.

En résolvant les relations formelles

$$y_j + \sum'' \gamma_{j\mathfrak{p}} y_1^{p_1} \cdots y_n^{p_n} = \begin{cases} P_j(z_1, \ldots\ldots, z_r) & (j = 1, \ldots\ldots, r), \\ z_j + P_j(z_1, \ldots\ldots, z_r) & (j = r+1, \ldots\ldots, n), \end{cases}$$

par rapport à $(z_1, \ldots\ldots, z_n)$, on a les séries formelles

$$z_j = y_j + h_j(y_1, \ldots\ldots, y_n) \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n).$$

On verra de la même manière que nous avons obtenu (36), que les $h_j(y_1, \ldots\ldots, y_n)$ ne contiennent que des termes de degrés au moins égaux à 1 par rapport à $(y_{r+1}, \ldots\ldots, y_n)$. Donc on a une transformation formelle de la forme

$$(46) \quad z_j = y_j + \sum_{k=r+1}^{n} P_{jk}(y_1, \ldots\ldots, y_r) y_k + \sum'' P_{j\mathfrak{p}}(y_1, \ldots\ldots, y_r) y_{r+1}^{p_{r+1}} \cdots y_n^{p_n}$$
$$(j = 1, \ldots\ldots, n),$$

qui amène (45) à un système (2) et satisfait à (6), où les $P_{jk}(y_1, \ldots\ldots, y_r)$ et les $P_{j\mathfrak{p}}(y_1, \ldots\ldots, y_r)$ sont des séries entières formelles de $(y_1, \ldots\ldots, y_r)$ et $P_{jk}(y_1, \ldots\ldots, y_r) = (y_1, \ldots\ldots, y_r)_1$.

Enfin, nous démontrerons la convergence des séries $P_{jk}(y_1, \ldots\ldots, y_r)$.

Soient

$$\tilde{a}_{jk}(z_1, \ldots\ldots, z_r) = \begin{cases} 0 & (k = 1, \ldots\ldots, r), \\ a_{jk}(z_1, \ldots\ldots, z_r) & (k = r+1, \ldots\ldots, n), \end{cases}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ensuite, posons

$$A(z_1, \ldots\ldots, z_r) = A_0 + \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}, & \ldots\ldots, & \tilde{a}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{a}_{n1}, & \ldots\ldots, & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

et puis

$$\tilde{P}_{jk}(z_1, \ldots\ldots, z_r) = \begin{cases} 0 & (k = 1, \ldots\ldots, r), \\ P_{jk}(z_1, \ldots\ldots, z_r) & (k = r+1, \ldots\ldots, n), \end{cases}$$

$$P(z_1, \ldots\ldots, z_r) = E + \begin{pmatrix} \tilde{P}_{11}, \ldots\ldots, \tilde{P}_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{P}_{n1}, \ldots\ldots, \tilde{P}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Puisque, si $y_j = C_j e^{\lambda_j t}$, (46) donne une solution formelle de (45), on peut démontrer après un calcul élémentaire que le système des équations différentielles contenant des paramètres $(C_1, \ldots\ldots, C_r)$

$$(47) \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = A(C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots\ldots, C_r e^{\lambda_r t})\vec{x},$$

admet la solution formelle

$$(48) \qquad P(C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots\ldots, C_r e^{\lambda_r t}) e^{A_0 t}.$$

Le second membre de (47) admet la période $\omega > 0$ par rapport à t et (48) satisfait à (28). En outre, les conditions (6) entraînent (29). Par suite, d'après le lemme 3, les développements de $P_{jk}(z_1, \ldots\ldots, z_r)$ sont convergents,

c. q. f. d.

9. La deuxième réduction. Appliquons le changement de variables

$$z_j = v_j + \sum_{k=r+1}^{n} P_{jk}(v_1, \ldots\ldots, v_r) v_k \quad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

à (45) et (46).

Les séries (46) se changent en

$$(49) \qquad u_j = y_j + \sum\nolimits'' \tilde{P}_{j\mathfrak{p}}(y_1, \ldots\ldots, y_r) y_{r+1}^{p_{r+1}} \cdots y_n^{p_n} \quad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

où les $\tilde{P}_{j\mathfrak{p}}(y_1, \ldots\ldots, y_r)$ sont des séries entières de $(y_1, \ldots\ldots, y_r)$. (49) s'obtiendra de la même manière que nous avons obtenu (46), et en outre (49) satisfait à (6).

(49) et (2) entraînent que le système des équations en $\vec{u}$ est de la forme

$$(50) \qquad \frac{du_j}{dt} = \lambda_j u_j + \sum\nolimits'' \tilde{a}_{j\mathfrak{p}}(u_1, \ldots\ldots, u_r) u_{r+1}^{p_{r+1}} \cdots u_n^{p_n} \ (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

où les $\tilde{a}_{j\mathfrak{p}}(u_1, \ldots\ldots, u_r)$ sont des séries entières de $(u_1, \ldots\ldots, u_r)$.

Supposons que chaque $\tilde{P}_{j\mathfrak{q}}(y_1, \cdots, y_r)$ $(\sigma[\mathfrak{q}] < \sigma[\mathfrak{p}] = N)$ converge. En remplaçant dans (49) y_j par $C_j e^{\lambda_j t}$, on a une solution formelle du système (50). Par conséquent, $\tilde{P}_{j\mathfrak{p}}(C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots\ldots, C_r e^{\lambda_r t})$ $(j = 1, \ldots\ldots, n)$ satisfont formellement à un système des équations différentielle linéaires

$$(51) \qquad \frac{dv_j}{dt} = \lambda(j, \mathfrak{p}) v_j + b_{j\mathfrak{p}}(C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots\ldots, C_r e^{\lambda_r t}),$$

où les $b_{j\mathfrak{p}}(y_1, \ldots\ldots, y_r)$ sont des séries entières de $(y_1, \ldots\ldots, y_r)$ et

$$\lambda(j, \mathfrak{p}) = \lambda_j - \sum_{k=r+1}^{n} \lambda_k p_k.$$

On voit facilement qu'une solution formelle de (51)

$$Q_j(t, C_1, \ldots\ldots, C_r) = \sum q_{j\mathfrak{q}}(t) C_1^{q_1} \cdots C_r^{q_r} \quad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

qui admet la période $\omega > 0$, se détermine d'une seule manière par les conditions

$$(52) \qquad \int_0^\omega q_{j\mathfrak{q}}(t) \exp(-\lambda(j, \mathfrak{p})t) dt = 0 .$$

Cependant, en vertu de (6), la solution formelle $\tilde{P}_{j\mathfrak{p}}(C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots\ldots, C_r e^{\lambda_r t})$ de (51) satisfait à (52). Par conséquent, les $b_{j\mathfrak{p}}(C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots\ldots, C_r e^{\lambda_r t})$ satisfont à (52). Donc, il existe une solution (définie analytiquement) $Q_j(t, C_1, \ldots\ldots, C_r)$ satisfaisant à (52). Cette solution $Q_j(t, C_1, \ldots\ldots, C_r)$ coïncide nécessairement avec les $\tilde{P}_{j\mathfrak{p}}(C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, C_r e^{\lambda_r t})$. Nous avons donc démontré la convergence des $\tilde{P}_{j\mathfrak{p}}(y_1, \ldots, y_r)$.

10. Dans ce numéro, nous démontrerons la convergence des séries formelles (49) pour $y_{r+1} = \cdots = y_s = y_{s+1} = \cdots = y_\tau = 0$, ce qui établit le théorème 1 dans le cas 1°.

$$(53) \qquad \begin{matrix} P_{jN}(y_1, \ldots\ldots, y_r, \\ y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n) \end{matrix} = \begin{cases} y_j + \sum_2^{N-1} \tilde{P}_{j\mathfrak{p}}(y_1, \ldots\ldots, y_r) y_{\tau+1}^{p_{\tau+1}} \cdots y_n^{p_n} \\ \qquad\qquad (j = 1, \ldots\ldots, r, \tau+1, \ldots\ldots, n), \\ \sum_2^{N-1} \tilde{P}_{j\mathfrak{p}}(y_1, \cdots, y_r) y_{\tau+1}^{p_{\tau+1}} \cdots y_n^{p_n} \\ \qquad\qquad (j = r+1, \ldots\ldots, \tau). \end{cases}$$

Faisons le changement de variables

$$(54) \qquad v_j = u_j - P_{jN}(C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots\ldots, C_r e^{\lambda_r t}, C_{\tau+1} e^{\lambda_{\tau+1} t}, \ldots\ldots, C_n e^{\lambda_n t}) \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n).$$

Les équations (50) se changent en

$$(55) \qquad \frac{dv_j}{dt} = g_j(v_1, \ldots\ldots, v_n;\ y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n) \quad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

où $y_j = C_j e^{\lambda_j t}$.

(55) admet une solution formelle

$$\sum^{(N)} \tilde{P}_{j\mathfrak{p}}(y_1, \ldots\ldots, y_r) y_{\tau+1}^{p_{\tau+1}} \cdots y_n^{p_n} \quad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

où $y_j = C_j e^{\lambda_j t}$. Par conséquent, les $g_j(0, \ldots\ldots, 0;\ y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)$ ne contiennent que des termes de degrés au moins égaux à N par rapport à $(y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)$. On a donc les inégalités

$$(56) \qquad |g_j(v_1, \ldots\ldots, v_n;\ y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)| \leqq A\|v\| + B_N \|y\|_0^N \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n),$$

pour

$$\|v\| < \delta, \qquad \|y\| < \delta';$$

δ et δ' sont des nombres positifs assez petits, A un nombre positif tel que $A > \|\lambda\|$, B_N un nombre positif assez grand et

$$\|y\|_0 = \max\{|y_{\tau+1}|, \ldots\ldots, |y_n|\}.$$

Soit $\mathfrak{f}$ la famille des fonctions $\phi(y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. ϕ est une fonction analytique de $(y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)$ pour $\|y\| < \delta'$;

2°. ϕ satisfait à l'inégalité

(57) $$|\phi(y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)| \leqq K\|y\|_0^N ,$$

pour $\|y\| < \delta'$, K étant indépendant de ϕ.

La famille $\mathfrak{f}$, munie de la topologie de convergence uniforme, est convexe, fermée et compacte. Par conséquent, le produit de $\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{F} = \{(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n); \quad \phi_j \in \mathfrak{f}\}$$

est aussi convexe, fermé et compact.

Si $(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n) \in \mathfrak{F}$ et $K\delta'^N < \delta$, on a, en vertu de (56) et (57), les inégalités

$$|g_j(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n;\ y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)|$$
$$\leqq A \max\{|\phi_1|, \ldots\ldots, |\phi_n|\} + B_N\|y\|_0^N \leqq (AK+B_N)\|y\|_0^N$$
$$(j = 1, \ldots\ldots, n),$$

pour $\|y\| < \delta'$. Par conséquent, si l'on pose

$$y_j = C_j e^{\lambda_j t},$$

et

$$\lambda = \max\{\Re\lambda_{\tau+1}, \ldots\ldots, \Re\lambda_n\} < 0,$$

on a

$$|g_j(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n;\ y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)|$$
$$\leqq (AK+B_N)\|C\|_0^N \exp(\lambda N t),$$

où

$$\|C\|_0 = \max\{|C_{\tau+1}|, \ldots\ldots, |C_n|\}.$$

A l'aide de cette inégalité, on peut définir

(58) $$\Phi_j(y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)$$
$$= -\int_t^{+\infty} g_j(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n;\ y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)dt$$
$$(y_j = C_j e^{\lambda_j t}).$$

Il est évident que

$$|\Phi_j(y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)| \leqq \frac{AK + B_N}{|\lambda| N}\|y\|_0^N$$

pour $\|y\| < \delta'$.

Alors, si l'on choisit N et K assez grands de sorte que

$$A < |\lambda| N \quad \text{et} \quad AK + B_N < |\lambda| NK,$$

chaque Φ_j appartient à $\mathfrak{f}$. Soit T la transformation qui fait correspondre

$(\Phi_1, \ldots\ldots, \Phi_n)$ à $(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n)$. Il est évident que T est une transformation continue de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$. Par suite, à l'aide du théorème d'existence des points invariants, on peut trouver un élément $(\varphi_{1N}, \ldots\ldots, \varphi_{nN})$ de $\mathfrak{F}$ tel que

$$T\varphi_{jN} = \varphi_{jN} \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n).$$

Les séries

$$v_j(t) = \varphi_{jN}(y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n) \quad (j = 1, \ldots\ldots, n;\ y_j = C_j e^{\lambda_j t}),$$

satisfont à (55) et si N est assez grand, $v_j(t) = o(\exp(-At))$ pour $t \to +\infty$. Cette solution de (55) se détermine d'une seule manière, car on a les inégalités

$$|g_j(v;\ y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)$$
$$-g_j(v';\ y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)| \leqq A\|v-v'\|$$

pour les valeurs assez petites de $(y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n)$, et l'équation différentielle

$$\frac{dY}{dt} = -AY$$

admet la solution générale

$$Y = C\exp(-At).$$

Par conséquent, la solution de (50)

$$P_j(y_1, \ldots\ldots, y_r, y_{\tau+1}, \ldots\ldots, y_n) = P_{jN} + \varphi_{jN}$$
$$(j = 1, \ldots\ldots, n;\ y_j = C_j e^{\lambda_j t}),$$

ne dépend pas de N, ce qui entraîne la convergence de (49) pour

$$y_{r+1} = \cdots\cdots = y_s = y_{s+1} = \cdots\cdots = y_\tau = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. Quant au théorème d'existence des points invariants et à l'unicité de $v_j(t)$ et P_j, voir M. Hukuhara, Zyôbibun-hôteisiki (La théorie des équations différentielles ordinaires, en japonais, Tokyo, 1950).

IV. La démonstration des Théorèmes 3 et 4. Dans cette section nous donnerons la démonstration du théorème 3. Le théorème 4 sera démontré de la même manière.

11. La démonstration du corollaire 3. Nous démontrerons d'abord le corollaire 3.

Sous les hypothèses, d'après l'inégalité de Cauchy, les coefficients de (7) $\varphi_{j\mathfrak{p}}(t)$ satisfont aux inégalités.

$$(59) \qquad |\varphi_{j\mathfrak{p}}(t)| \leqq M\delta^{-\sigma[\mathfrak{p}]},$$

pour $-\infty < t \leqq 0$.

Puisque (7) se réduit formellement à (8) par (9), par hypothèses, les $\varphi_{j\mathfrak{p}}(t)$ s'écrivent

$$(60) \qquad \varphi_{j\mathfrak{p}}(t) = p_{j\mathfrak{p}}(t) + q_{j\mathfrak{p}}(t),$$

où les $p_{j\mathfrak{p}}(t)$ sont presque-périodiques et

$$\lim_{t\to-\infty} q_{j\mathfrak{p}}(t) = 0 .$$

Si l'on pose

$$(61)\quad P_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) = \begin{cases} \xi_j e^{\lambda_j t} + \sum'' p_{j\mathfrak{p}}(t)\xi_1^{p_1}\cdots\xi_n^{p_n} & (j=1, \ldots\ldots, s),\\ \sum'' p_{j\mathfrak{p}}(t)\xi_1^{p_1}\cdots\xi_n^{p_n} & (j=s+1, \ldots\ldots, n),\end{cases}$$

$$(62)\quad Q_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) = \begin{cases} \sum'' q_{j\mathfrak{p}}(t)\xi_1^{p_1}\cdots\xi_n^{p_n} & (j=1, \ldots\ldots, s),\\ \xi_j e^{\lambda_j t} + \sum'' q_{j\mathfrak{p}}(t)\xi_1^{p_1}\cdots\xi_n^{p_n} & \\ & (j=s+1, \ldots\ldots, n),\end{cases}$$

on a

$$\varphi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) = P_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) + Q_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) .$$

Ceci posé, montrons que $P_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$ $(j=1, \ldots\ldots, n)$ est une solution de (1), qui est presque-périodique par rapport à t et contient s constantes arbitraires.

En vertu de (59) et (60), pour un nombre positif assez petit $\varepsilon > 0$, on peut trouver une valeur de t, soit t_0, telle que

$$|p_{j\mathfrak{p}}(t)| \leqq M\delta^{-\sigma[\mathfrak{p}]} + \varepsilon \qquad \text{pour} \quad t_0 > t .$$

Or, $p_{j\mathfrak{p}}(t)$ étant presque-périodique, on a

$$|p_{j\mathfrak{p}}(t)| \leqq M\delta^{-\sigma[\mathfrak{p}]} + \varepsilon \qquad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty,$$

d'où

$$|p_{j\mathfrak{p}}(t)| \leqq M\delta^{-\sigma[\mathfrak{p}]} \qquad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty .$$

Par suite, (61) converge uniformément par rapport à $(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$ pour $-\infty < t < +\infty$, $\|\xi\| < \delta$, et donc les $P_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$ sont presque-périodiques par rapport à t et il existe une constante M' assez grande telle que

$$|P_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)| \leqq M'$$

pour $-\infty < t < +\infty$, $\|\xi\| < \delta$.

Cette inégalité entraîne

$$|Q_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)| \leqq M + M'$$

pour $-\infty < t \leqq 0$, $\|\xi\| < \delta$. Par conséquent, $Q_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$ converge uniformément par rapport à $(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$ pour $-\infty < t \leqq 0$, $\|\xi\| < \delta$, et puisque

$$\lim_{t\to-\infty} q_{j\mathfrak{p}}(t) = 0 ,$$

on a

$$\lim_{t\to-\infty} Q_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n) = 0 .$$

Ensuite, puisque

$$\frac{dP_j}{dt}+\frac{dQ_j}{dt}=f_j(\varphi_1,\ \ldots\ldots,\ \varphi_n)\,,$$

on peut trouver une constante assez grande M'' telle que

$$\left|\frac{dP_j}{dt}+\frac{dQ_j}{dt}\right|\leq M''\,,$$

pour $-\infty<t\leqq 0$, $\|\xi\|<\delta$. De la même manière que ci-dessus, on en déduit que les dP_j/dt sont presque-périodiques par rapport à t et les $dQ_j/dt\to 0$ pour $t\to-\infty$. Par suite, les dP_j/dt et $f_j(P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n)$ étant presque-périodiques par rapport à t, les relations

$$\frac{dP_j}{dt}+\frac{dQ_j}{dt}=f_j(P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n)+f_j(\varphi_1,\ \ldots\ldots,\ \varphi_n)-f_j(P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n) \qquad (j=1,\ \ldots\ldots,\ n)\,,$$

et

$$\lim_{t\to-\infty}\left(f_j(\varphi_1,\ \ldots\ldots,\ \varphi_n)-f_j(P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n)\right)=0$$

entraînent

$$\frac{dP_j}{dt}=f_j(P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n) \quad (j=1,\ \ldots\ldots,\ n)\,,$$

ce qui montre que $P_j(t,\ \xi_1,\ \ldots\ldots,\ \xi_n)$ est une solution presque-périodique de (1).

Ensuite, si l'on pose

$$P_j(0,\ \xi_1,\ \ldots\ldots,\ \xi_n)=\zeta_j \qquad (j=1,\ \ldots\ldots,\ n)\,,$$

on a

$$\begin{aligned} P_j(t,\ \xi_1,\ \ldots\ldots,\ \xi_n) &= \varphi_j(t,\ \zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_n) \\ &= P_j(t,\ \zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_n)+Q_j(t,\ \zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_n) \\ &\qquad (j=1,\ \ldots\ldots,\ n)\,. \end{aligned}$$

Puisque les $P_j(t,\ \xi_1,\ \ldots\ldots,\ \xi_n)$ et $P_j(t,\ \zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_n)$ sont presque-périodiques par rapport à t et

$$\lim_{t\to-\infty}Q_j(t,\ \zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_n)=0\,,$$

on a

$$P_j(t,\ \xi_1,\ \ldots\ldots,\ \xi_n)=P_j(t,\ \zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_n)\,,$$

et

$$Q_j(t,\ \zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_n)\equiv 0\,.$$

En particulier,

$$Q_j(0,\ \zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_n)=\zeta_j+(\zeta_1,\ \ldots\ldots,\ \zeta_n)_2=0 \qquad (j=s+1,\ \ldots\ldots,\ n)\,. \tag{63}$$

En résolvant (63) par rapport à $(\zeta_{s+1},\ \ldots\ldots,\ \zeta_n)$ on a

$$\zeta_j = \zeta_j(\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_s) = (\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_s)_2 \quad (j = s+1, \ldots\ldots, n),$$

et

$$\varphi_j(t, \zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_s, \zeta_{s+1}(\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_s), \ldots\ldots, \zeta_n(\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_s))$$
$$= P_j(t, \zeta_1 \ldots\ldots, \zeta_n) \qquad (j = 1, \ldots\ldots, n).$$

Dans ces relations, $(\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_s)$ peuvent être arbitraires. Par suite, les $P_j(t, \zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_n)$ contiennent s constantes arbitraires.

Posons

$$P_j^*(t, \zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_s) = P_j(t, \zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_s, \zeta_{s+1}, \ldots\ldots, \zeta_n).$$

En faisant le changement de constantes arbitraires

$$C_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_j^*(t, \zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_s) e^{-\lambda_j t} dt \quad (j = 1, \ldots\ldots, s),$$

on obtient immédiatement le corollaire 3.

12. La démonstration du théorème 3.

Posons

$$\varphi_j(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau, \xi_{\tau+1}(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau), \ldots\ldots, \xi_n(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau))$$
$$= \varphi_j^*(t, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_\tau)$$
$$= \begin{cases} \xi_j e^{\lambda_j t} + \sum'' \overset{*}{\varphi}_{j\mathfrak{p}}(t) \xi_1^{p_1} \cdots \xi_\tau^{p_\tau} & (j = 1, \ldots\ldots, \tau), \\ \sum'' \overset{*}{\varphi}_{j\mathfrak{p}}(t) \xi_1^{p_1} \cdots \xi_\tau^{p_\tau} & (j = \tau+1, \ldots\ldots, n). \end{cases}$$

Alors, on a

$$|\overset{*}{\varphi}_{j\mathfrak{p}}(t)| \leqq M\delta^{-\sigma[\mathfrak{p}]}, \tag{64}$$

pour $-\infty < t \leqq 0$, et de la même manière que nous avons obtenu (60), les $\overset{*}{\varphi}_{j\mathfrak{p}}(t)$ s'écrivent

$$\overset{*}{\varphi}_{j\mathfrak{p}}(t) = p_{j\mathfrak{p}}(t) + q_{j\mathfrak{p}}(t) + r_{j\mathfrak{p}}(t),$$

où les $p_{j\mathfrak{p}}(t)$ sont presque-périodiques et

$$\lim_{t \to -\infty} q_{j\mathfrak{p}}(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} r_{j\mathfrak{p}}(t) = 0,$$

et

$$\text{si } q_{j\mathfrak{p}}(t) \not\equiv 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} |q_{j\mathfrak{p}}(t)| = \infty,$$

et

$$\text{si } r_{j\mathfrak{p}}(t) \not\equiv 0, \qquad \lim_{t \to -\infty} |r_{j\mathfrak{p}}(t)| = \infty.$$

Cependant, en vertu de (64), on a nécessairement

$$r_{j\mathfrak{p}}(t) \equiv 0.$$

Par suite, notre théorème se réduit au même cas précédent (le corollaire 3).

En terminant, j'exprime à M. le Prof. Masuo Hukuhara toute ma reconnaissance pour la conduite sincère.

23 août, 1953.