Sur un système de deux équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients réels.

Par

Masuo HUKUHARA.

1. Introduction. Considérons l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{dx}{P(x, y)}=\frac{dy}{Q(x, y)},$$

où

$$(2)\qquad P(x, y)=ax+by+\ldots\ldots, \quad Q(x, y)=cx+dy+\ldots\ldots$$

sont des fonctions régulières pour $x=0$, $y=0$ et dont les développements en séries entières ont des coefficients réels. On sait que l'origine est un nœud si les deux racines de l'équation en ρ:

$$(3)\qquad (a-\rho)(d-\rho)-bc=0$$

sont réelles et de mêmes signes, un col si les deux racines sont réelles et de signes contraires et un foyer si les deux racines sont des nombres complexes conjugués mais non purement imaginaires.

Notre présent mémoire concerne le cas où les deux racines sont purement imaginaires. L'origine est alors un foyer ou un centre. Dans le cas d'un centre, toute solution suffisamment petite du système

$$(4)\qquad \frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y)$$

admet une période ω, qui peut varier avec la solution. Dans le cas d'un foyer, toute solution suffisamment petite de ce système tend vers $(0, 0)$ pour $t\to-\infty$ ou pour $t\to+\infty$. Ces propriétés qualitatives sont aussi bien connues. Mais on ne sait pas encore, du moins à ma connaissance, l'expression analytique de la solution qui élucide ces propriétés. Nous allons étudier ce problème dans les lignes suivantes.

2. Réduction préliminaires. Nous supposons donc que l'équation (3) admet des racines purement imaginaires. En multipliant, s'il est nécessaire, un même nombre à $P(x, y)$ et à $Q(x, y)$, nous pouvons supposer que les racines sont $\pm i$. Nous pouvons supposer de plus

$$(5)\qquad a=d=0, \quad b=-1, \quad c=1,$$

car, sinon il existe un changement linéaire à coefficients réels qui amène le système

(4) à un tel système.

Posons

$$(6) \qquad z=x+iy, \quad \bar{z}=x-iy.$$

On aura alors

$$(7) \qquad \frac{dz}{dt}=f(z, \bar{z}), \quad \frac{d\bar{z}}{dt}=\bar{f}(\bar{z}, z),$$

où

$$f(z, \bar{z})=P(x, y)+iQ(x, y)=iz+\ldots\ldots,$$
$$\bar{f}(\bar{z}, z)=P(x, y)-iQ(x, y)=-i\bar{z}+\ldots\ldots$$

sont des fonctions régulières de $(z, \bar{z})$. Nous désignerons désormais par $(z, \bar{z})_n$ une série entière de $(z, \bar{z})$ ne contenant que des termes de degrés au moins égaux à n. On aura alors

$$f(z, \bar{z})=iz+(z, \bar{z})_2, \quad \bar{f}(\bar{z}, z)=-i\bar{z}+(\bar{z}, z)_2.$$

Considérons maintenant une équation différentielle

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda\eta+(\xi, \eta)_2}{\mu\xi+(\xi, \eta)_2}.$$

Si l'on pose $\eta=\xi u$, on obtient

$$\xi\frac{du}{d\xi}=-u+\frac{\lambda u+\xi(\xi, u)_0}{\mu+\xi(\xi, u)_0}$$
$$=\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)u+\xi(\xi, u)_0.$$

Si donc $\frac{\lambda}{\mu}-1$ n'est pas un entier positif, l'équation en ξ, η admet une solution régulière $\eta=(\xi)_2$. On peut appliquer ce résultat à l'équation

$$\frac{d\bar{z}}{dz}=\frac{\bar{f}(\bar{z}, z)}{f(z, \bar{z})}.$$

Elle admet une solution régulière $\bar{z}=\varphi(z)$ telle que $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$. Alors $z=\bar{\varphi}(\bar{z})$ est aussi une solution. Faisons le changement de variables

$$w=z-\bar{\varphi}(\bar{z}), \quad \bar{w}=\bar{z}-\varphi(z)$$

et soit

$$\frac{dw}{dt}=f_1(w, \bar{w}), \quad \frac{d\bar{w}}{dt}=\bar{f}_1(\bar{w}, w)$$

le système transformé. On verra sans peine

$$f_1(w, \bar{w})=f(z, \bar{z})-\bar{\varphi}'(\bar{z})\bar{f}(\bar{z}, z)$$

$$=w\{i+(w,\bar{w})_1\},$$
$$f_1(\bar{w},w)=\bar{w}\{-i+(w,\bar{w})_1\}.$$

Donc nous pouvons considérer, sans perdre la généralité, un système

$$(8)\qquad \frac{dz}{dt}=zf(z,\bar{z}),\quad \frac{d\bar{z}}{dt}=\bar{z}\bar{f}(\bar{z},z),$$

où

$$(9)\qquad f(z,\bar{z})=i+(z,\bar{z})_1,$$

et $\bar{f}(z,\bar{z})$ désigne la fonction régulière telle que les coefficients de ses développements sont les nombres conjugués des coefficients correspondants de $f(z,\bar{z})$. Par suite la valeur conjuguée de $f(z,\bar{z})$ est $\bar{f}(\bar{z},z)$.

Soit $z=\varphi(t)$, $\bar{z}=\bar{\varphi}(t)$ une solution du système (8), $\bar{\varphi}(t)$ désignant la valeur conjuguée de $\varphi(t)$ pour la valeur réelle de t. Lorsque la variable réelle t varie, le point $z=\varphi(t)$ décrira dans le plan complexe une courbe C, à laquelle correspond dans le plan (x,y) une caractéristique de l'équation (1) ayant la même forme. Nous pouvons donc dire sans aucune confusion à craindre, que C est une caractéristique de (1).

3. Détermination des formes réduites. Faisons comme d'habitude un changement de variables

$$(10)\qquad z=w\{1+\sum_{j,k}{}_N p_{jk}w^j\bar{w}^k\},\quad \bar{z}=\bar{w}\{1+\sum_{j,k}{}_N \bar{p}_{jk}\bar{w}^j w^k\},$$

$\sum_{j,k}{}_N$ désignant la sommation étendue à tous les arrangements (j,k) tels que $j+k=N$. Si

$$(11)\qquad \frac{dw}{dt}=wg(w,\bar{w}),\quad \frac{d\bar{w}}{dt}=\bar{w}\bar{g}(\bar{w},w)$$

sont les équations transformées, $g(w,\bar{w})$ est aussi régulière pour $w=0$, $\bar{w}=0$. Soient

$$(12)\qquad f(z,\bar{z})=\sum_{j,k}c_{jk}z^j\bar{z}^k,$$

$$(13)\qquad g(w,\bar{w})=\sum_{j,k}c'_{jk}w^j\bar{w}^k$$

les développements en séries entières de $f(z,\bar{z})$ et de $g(w,\bar{w})$. On verra de proche en proche, en négligeant les termes de degrés supérieurs à $N+1$,

$$w=z\{1-\sum_{j,k}{}_N p_{jk}z^j\bar{z}^k+\dots\dots\},$$

$$\frac{dw}{dt}=zf(z,\bar{z})\{1-\sum_{j,k}{}_N p_{jk}z^j\bar{z}^k+\dots\dots\}$$
$$-z\{\sum{}_N[jf(z,\bar{z})+k\bar{f}(\bar{z},z)]p_{jk}z^j\bar{z}^k+\dots\dots\}$$
$$=w\{i-i\sum_{j,k}{}_N(j-k)p_{jk}w^j\bar{w}^k+\sum_{j,k}{}'c_{jk}w^j\bar{w}^k+\dots\dots\},$$

où $\sum'$ désigne la sommation étendue à tous les arrangements (j, k) tels que $j+k>0$.
On obtient donc

$$c'_{jk}=c_{jk} \qquad \text{pour} \quad j+k<N,$$
$$c'_{jk}=c_{jk}-i(j-k)p_{jk} \qquad \text{pour} \quad j+k=N.$$

On en conclut qu'on peut amener formellement le système (8) à un système

$$(14) \qquad \frac{dw}{dt}=w\{i+\sum_j{}' c_j(w\bar{w})^j\}, \qquad \frac{d\bar{w}}{dt}=\bar{w}\{-i+\sum_j{}' c_j(w\bar{w})^j\}$$

par une transformation

$$(15) \qquad z=w\sum p_{jk}w^j\bar{w}^k, \; \bar{z}=\bar{w}\sum \bar{p}_{jk}\bar{w}^j w^k \quad (p_{00}=1).$$

Désignons par a_j et b_j la partie réelle et la partie imaginaire de c_j, de sorte que

$$c_j=a_j+ib_j \qquad (j=1, 2, \ldots\ldots).$$

Si l'on pose

$$w=re^{i\theta}, \quad w=re^{-i\theta},$$

on obtient

$$\frac{dr}{dt}=\sum_{j=1}^{\infty}a_j r^{2j+1}, \quad \frac{d\theta}{dt}=1+\sum_{j=1}^{\infty}b_j r^{2j}.$$

PREMIER CAS: les a_j et les b_j sont tous nuls.

Alors tous les c_j sont nuls. En remplaçant w et $\bar{w}$ par ζ et $\bar{\zeta}$, le système (14) devient

$$(\mathrm{a}) \qquad \frac{d\zeta}{dt}=i\zeta, \quad \frac{d\bar{\zeta}}{dt}=-i\bar{\zeta}.$$

C'est la première forme réduite.

DEUXIÈME CAS: Tous les a_j et $b_1, \ldots\ldots, b_{n-1}$ sont nuls, mais b_n est différent de 0.

Posons

$$\rho=r\left\{1+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{b_j}{b_n}r^{2(j-n)}\right\}^{1/2n}$$
$$=r\sum_{j=0}^{\infty}h_j r^{2j} \qquad (h_0=1).$$

On aura alors

$$\frac{d\rho}{dt}=0, \quad \frac{d\theta}{dt}=1+b\rho^{2n}.$$

Si donc on pose

$$\zeta=\rho e^{i\theta}=w\sum_{j=0}^{\infty}h_j(w\bar{w})^j, \; \zeta=\rho e^{-i\theta}=\bar{w}\sum_{j=0}^{\infty}h_j(w\bar{w})^j,$$

on aura

$$(\mathrm{b}) \qquad \frac{d\zeta}{dt}=i\zeta\{1+b(\zeta\bar{\zeta})^n\}, \quad \frac{d\bar{\zeta}}{dt}=-i\bar{\zeta}\{1+b(\zeta\bar{\zeta})^n\},$$

où b est un nombre réel non nul. C'est la deuxième forme réduite.

TROISIÈME CAS: $a_1=\ldots\ldots=a_{n-1}=0,\ a_n\neq 0.$

On sait que l'on peut déterminer les coefficients de la série

$$r=\rho\sum_{j=0}^{\infty}p_j\rho^{2j} \qquad (p_0=1)$$

de manière que l'on ait

$$\frac{d\rho}{dt}=\rho^{2n+1}(a+a'\rho^{2n}) \qquad (a\neq 0).$$

Posons ensuite

$$\theta=\varphi+i\sum_{j=1}^{\infty}q_j\rho^{2j}.$$

On aura

$$\frac{d\varphi}{dt}=1+\sum_{j=1}^{\infty}b_jr^{2j}-\sum_{j=1}^{\infty}2jq_j\rho^{2(j+n)}(a+a'\rho^{2n}).$$

Puisque $\sum b_jr^{2j}$ peut être développée en série entière de ρ^2, on peut déterminer les coefficients q_j de manière que l'on ait

$$\frac{d\varphi}{dt}=1+\sum_{j=1}^{n}b'_j\rho^{2j}.$$

Posons enfin

$$\zeta=\rho e^{i\varphi},\ \bar{\zeta}=\rho e^{-i\varphi}.$$

On aura

$$\begin{aligned} w&=\zeta\sum_{j=0}^{\infty}p_j(\zeta\bar{\zeta})^j.\ \exp\Big(-i\sum_{j=1}^{\infty}q_j(\zeta\bar{\zeta})^j\Big)\\ &=\zeta\sum_{j=0}^{\infty}p'_j(\zeta\bar{\zeta})^j \qquad (p'_0=1),\\ \bar{w}&=\bar{\zeta}\sum_{j=0}^{\infty}\bar{p}'_j(\zeta\bar{\zeta})^j. \end{aligned}$$

Les équations en ζ et $\bar{\zeta}$ deviennent, en remplaçant b'_j par b_j,

$$(\mathrm{c}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt}&=\zeta\Big\{i+i\sum_{j=1}^{n}b_j(\zeta\bar{\zeta})^j+a(\zeta\bar{\zeta})^n+a'(\zeta\bar{\zeta})^{2n}\Big\},\\ \frac{d\bar{\zeta}}{dt}&=\bar{\zeta}\Big\{-i-i\sum_{j=1}^{n}b_j(\zeta\bar{\zeta})^j+a(\zeta\bar{\zeta})^n+a'(\zeta\bar{\zeta})^{2n}\Big\}, \end{aligned} \right.$$

où a est un nombre réel non nul, mais a' et les b_j peuvent être nuls. C'est la troisième forme réduite.

4. L'unicité des formes réduites. 1° Considérons d'abord les équations (a). Si l'on fait un changement de variables

$$(16)\qquad \begin{cases} \zeta = z\{1+\sum_{j,k}{}_N p_{jk} z^j \bar{z}^k + (z,\bar{z})_{N+1}\}, \\ \bar{\zeta} = \bar{z}\{1+\sum_{j,k}{}_N \bar{p}_{jk} \bar{z}^j z^k + (z,\bar{z})_{N+1}\}, \end{cases}$$

on aura

$$z = \zeta\{1-\sum_{j,k}{}_N p_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k + (\zeta,\bar{\zeta})_{N+1}\},$$

$$\frac{dz}{dt} = iz - i\zeta\{\sum_{j,k}{}_N (j-k)p_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k + (\zeta,\bar{\zeta})_{N+1}\}$$

$$= iz\{1-\sum_{j,k}{}_N (j-k)p_{jk}z^j\bar{z}^k + (z,\bar{z})_{N+1}\}.$$

Il s'ensuit que si les équations en z et $\bar{z}$ ont une des formes réduites, les p_{jk} sont nuls pour $j+k=N$, $j\neq k$.

Faisons maintenant le changement de variables

$$(17)\qquad z=\zeta\sum_{j=0}^{\infty}p_j(\zeta\bar{\zeta})^j,\quad \bar{z}=\bar{\zeta}\sum_{j=0}^{\infty}\bar{p}_j(\zeta\bar{\zeta})^j \qquad (p_0=1).$$

Puisque

$$\frac{d(\zeta\bar{\zeta})}{dt}=0,$$

les équations en z et $\bar{z}$ ont la même forme que (a):

$$\frac{dz}{dt}=iz,\quad \frac{d\bar{z}}{dt}=-i\bar{z}.$$

Considérons enfin le changement de variables de la forme générale:

$$\zeta=z\sum_{j,k}p_{jk}z^j\bar{z}^k,\ \bar{\zeta}=\bar{z}\sum_{j,k}\bar{p}_{jk}\bar{z}^j z^k \qquad (p_{00}=1).$$

Si tous les p_{jk} sont nuls pour $j\neq k$, on se retrouve dans le cas précédent. Si non, on peut écrire

$$(18)\qquad \begin{cases} \zeta=z\{1+\sum_{j=1}^{N-1}p_j(z\bar{z})^j+\sum_{j,k}{}_N p_{jk}z^j\bar{z}^k+(z,\bar{z})_{N+1}\}, \\ \bar{\zeta}=\bar{z}\{1+\sum_{j=1}^{N-1}\bar{p}_j(z\bar{z})^j+\sum_{j,k}{}_N \bar{p}_{jk}\bar{z}^j z^k+(z,\bar{z})_{N+1}\}, \end{cases}$$

où un au moins de $p_{jk}(j+k=N,\ j\neq k)$ n'est pas nul. Si l'on pose

$$(19)\qquad \zeta=\zeta'\{1+\sum_{j=1}^{N-1}p_j(\zeta'\bar{\zeta}')^j\},\ \bar{\zeta}=\bar{\zeta}'\{1+\sum_{j=1}^{N-1}\bar{p}_j(\zeta'\bar{\zeta}')^j\},$$

les équations en ζ', $\bar\zeta'$ ont la forme réduite:

$$\frac{d\zeta'}{dt}=i\zeta',\quad \frac{d\bar\zeta'}{dt}=-i\bar\zeta'.$$

Les relations

$$\zeta'\{1+\sum_{j=1}^{N-1}p_j(\zeta'\bar\zeta')^j\}=z\{1+\sum_{j=1}^{N-1}p_j(z\bar z)^j+\sum_{j,k}{}_{N}p_{jk}z^j\bar z^k+(z,\bar z)_{N+1}\},$$
$$\bar\zeta'\{1+\sum_{j=1}^{N-1}p_j(\zeta'\bar\zeta')^j\}=\bar z\{1+\sum_{j=1}^{N-1}p_j(z\bar z)^j+\sum_{j,k}{}_{N}\bar p_{jk}\bar z^j z^k+(z,\bar z)_{N+1}\}$$

peuvent se résoudre par rapport à ζ' et $\bar\zeta'$, et l'on obtient

$$(20)\qquad \begin{cases} \zeta'=z\{1+\sum_{j,k}{}_{N}p_{jk}z^j\bar z^k+(z,\bar z)_{N+1}\}, \\ \bar\zeta'=\bar z\{1+\sum_{j,k}{}_{N}\bar p_{jk}\bar z^j z^k+(z,\bar z)_{N+1}\}. \end{cases}$$

Par conséquent, les équations en z et $\bar z$ ne peuvent avoir aucune des formes réduites.

REMARQUE 1. Les équations (a) restent invariables par le changement de variables

$$\zeta=\zeta'\sum_{j=0}^{\infty}p_j(\zeta\bar\zeta)^j,\ \bar\zeta=\bar\zeta'\sum_{j=0}^{\infty}p_j(\zeta\bar\zeta)^j\qquad(p_0=1),$$

et réciproquement. On en conclut que le changement de variables

$$(21)\qquad z=\zeta\sum_{j,k}\gamma_{jk}\zeta^j\bar\zeta^k,\ \bar z=\bar\zeta\sum_{j,k}\bar\gamma_{jk}\bar\zeta^j\zeta^k,$$

qui amène les équations (8) en les équations (a), se détermine d'une seule manière par les conditions

$$(22)\qquad \gamma_{00}=1,\ \gamma_{11}=\ldots\ldots=\gamma_{mm}=\ldots\ldots=0.$$

2° Considérons les équations suivantes un peu plus générales que (b):

$$(23)\qquad \frac{d\zeta}{dt}=i\zeta\{1+\sum_{j=n}^{\infty}b_j(\zeta\bar\zeta)^j\},\quad \frac{d\bar\zeta}{dt}=-i\bar\zeta\{1+\sum_{j=n}^{\infty}b_j(\zeta\bar\zeta)^j\},$$

où les b_j sont des constantes réelles. Si l'on fait un changement de variables (17), on obtient

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d\zeta}{dt}\sum_{j=0}^{\infty}p_j(\zeta\bar\zeta)^j=iz\{1+\sum_{j=n}^{\infty}b'_j(z\bar z)^j\}.$$

Les équations en z et $\bar z$ deviennent

$$\frac{dz}{dt}=iz\{1+\sum_{j=n}^{\infty}b'_j(z\bar z)^j\},\quad \frac{d\bar z}{dt}=-i\bar z\{1+\sum_{j=n}^{\infty}b'_j(z\bar z)^j\},$$

où les b'_j sont des constantes réelles et $b'_n=b_n$. Par suite, si le changement de variables amène les équations (b) en des équations d'une des formes réduites, celles-ci ont la même forme que (b) et la valeur du coefficient b reste la même.

Appliquons maintenant le changement de variables (16) aux équations (23). On obtient

$$\frac{dz}{dt}=iz\{1+\sum_{j=n}^{\infty}b_j(z\bar{z})^j-\sum_{j,k}N(j-k)p_{jk}z^j\bar{z}^k+(z,\bar{z})_{N+1}\}.$$

Par suite, s'il existe un coefficient p_{jk} tel que $p_{jk}\neq 0$, $j\neq k$, $j+k=N$, les équations en z et $\bar{z}$ ne peuvent avoir aucune des formes réduites.

Considérons enfin le changement de variables (18), où un au moins des coefficients $p_{jk}(j+k=N,\ j\neq k)$ n'est pas nul. Si les équations en ζ et $\bar{\zeta}$ sont (b), les variables ζ', $\bar{\zeta}'$ définies par (19) satisfont aux équations de la forme (23), où l'on remplace ζ et $\bar{\zeta}$ par ζ' et $\bar{\zeta}'$, le coefficient b_n étant égal à b. Les relations entre $(\zeta',\bar{\zeta}')$ et $(z,\bar{z})$ étant (20), les équations en z et $\bar{z}$ ne peuvent avoir aucune des formes réduites. L'unicité de la forme réduite (b) est donc assurée.

REMARQUE 2. La condition que les équations (b) restent invariables par le changement de variables

$$\zeta'=\zeta\sum_{j=0}^{\infty}p_j(\zeta\bar{\zeta})^j,\quad \bar{\zeta}'=\bar{\zeta}\sum_{j=0}^{\infty}\bar{p}_j(\zeta\bar{\zeta})^j\qquad(p_0=1)$$

s'écrit

$$1=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(\zeta\bar{\zeta})^j\sum_{j=0}^{\infty}\bar{p}_j(\zeta\bar{\zeta})^j.$$

Si l'on pose

$$p_j=p_j'+ip_j'',\ u=\sum_{j=1}^{\infty}p_j'(\zeta\bar{\zeta})^j,\ v=\sum_{j=1}^{\infty}p_j''(\zeta\bar{\zeta})^j,$$

la relation ci-dessus devient

$$1=(1+u)^2+v^2,$$

d'où il résulte

$$u=\sqrt{1-v^2}-1$$

On peut donc donner aux coefficients $p_j''(j=1,2,\ldots\ldots)$ des valeurs quelconques, puis déterminer les coefficients p_j' $(j=1,2,\ldots\ldots)$ de manière que cette relation soit satisfaite.

On en conclut que le changement de variables (21), qui amène (8) en (b), se détermine d'une seule manière par les conditions

(24) $$\gamma_{00}=1,\ \Im\gamma_{11}=\ldots\ldots=\Im\gamma_{mm}=\ldots\ldots=0.$$

3° Considérons les équations suivantes un peu plus générales que (c):

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\zeta}{dt}=\zeta\{i+i\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\zeta\bar\zeta)^j+\sum_{j=n}^{\infty}a_j(\zeta\bar\zeta)^j\}, \\[2ex] \dfrac{d\bar\zeta}{dt}=\bar\zeta\{-i-i\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\zeta\bar\zeta)^j+\sum_{j=n}^{\infty}a_j(\zeta\bar\zeta)^j\}, \end{cases}$$

où les a_j et les b_j sont des constantes réelles. Si l'on pose

$$(26)\qquad \zeta=\rho e^{i\varphi},\ \bar\zeta=\rho e^{-i\varphi},$$

ces équations se changent en

$$\frac{d\rho}{dt}=\rho\sum_{j=n}^{\infty}a_j\rho^{2j},\quad \frac{d\varphi}{dt}=1+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\rho^{2j}.$$

Faisons le changement de variables (17) et posons

$$z=re^{i\theta},\ \bar z=re^{-i\theta}.$$

Les relations entre (ρ,φ) et (r,θ) peuvent s'écrire

$$r=\rho\sum_{j=0}^{\infty}p'_j\rho^{2j},\ \theta=\varphi+\sum_{j=0}^{\infty}p''_j\rho^{2j}\qquad (p'_0=1,\ p''_0=0).$$

Supposons que $p'_1=\ldots\ldots=p'_{N-1}=0$. On aura, après un calcul facile,

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt}&=\rho\sum_{j=n}^{\infty}a_j\rho^{2j}+\rho\sum_{j=n}^{\infty}a_j\rho^{2j}\sum_{k=N}^{\infty}(2k+1)p'_k\rho^{2k}\\ &=r\{\sum_{j=n}^{N+n}a_jr^{2j}+2(N-n)a_np'_Nr^{2(N+n)}+(r^2)_{N+n+1}\},\\[1ex] \frac{d\theta}{dt}&=1+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\rho^{2j}+\sum_{k=1}^{\infty}2kp''_k\rho^{2k}\sum_{j=n}^{\infty}a_j\rho^{2j}\\ &=1+\sum_{j=1}^{\infty}b_jr^{2j}+(r^2)_{n+1}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{dr}{dt}=r\sum_{j=n}^{\infty}a'_jr^{2j},\quad \frac{d\theta}{dt}=1+\sum_{j=1}^{\infty}b'_jr^{2j},$$

$$a'_n=a_n,\ldots\ldots,\ a'_{n+N-1}=a_{n+N-1},\ a'_{n+N}=a_{n+N}+2(N-n)a_np'_N,$$
$$b'_1=b_1,\ldots\ldots,\ b'_n=b_n.$$

Les équations en z et $\bar z$ deviennent

$$\frac{dz}{dt}=z\{i+i\sum_{j=1}^{\infty}b'_j(z\bar z)^j+\sum_{j=n}^{\infty}a'_j(z\bar z)^j\},$$

$$\frac{d\bar z}{dt}=\bar z\{-i-i\sum_{j=1}^{\infty}b'_j(z\bar z)^j+\sum_{j=n}^{\infty}a'_j(z\bar z)^j\}.$$

Par conséquent, dans le cas des équations (c), pour que ces équations prennent une des formes réduites, elles ne peuvent être que de la même forme avec les mêmes coefficients que (c).

Appliquons le changement de variables (16) aux équations (25). On obtient

$$\frac{dz}{dt}=\zeta\{i+i\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\zeta\bar\zeta)^j+\sum_{j=n}^{\infty}a_j(\zeta\bar\zeta)^j\}\{1-\sum_N p_{jk}\zeta^j\bar\zeta^k\}$$

$$-i\zeta\{\sum_{j,k}{}_N(j-k)p_{jk}\zeta^j\bar\zeta^k+(\zeta,\bar\zeta)_{N+1}\}$$

$$=z\{i+i\sum_{j=1}^{\infty}b_j(z\bar z)^j+\sum_{j=n}^{\infty}a_j(z\bar z)^j-i\sum_{j,k}{}_N(j-k)p_{jk}z^j\bar z^k+(z,\bar z)_{N+1}\}.$$

Par suite, s'il existe au moins un coefficient p_{jk} tel que $p_{jk}\neq 0,\ j\neq k,\ j+k=N$, les équations en z et $\bar z$ ne peuvent avoir aucune des formes réduites.

On peut alors raisonner comme dans le cas 2°.

En somme, *si les équations en* ζ *et* $\bar\zeta$ *sont d'une des formes réduites* (a), (b), (c) *et si les équations en*

$$z=\zeta\sum_{j,k}p_{jk}\zeta^j\bar\zeta^k,\ \bar z=\bar\zeta\sum_{j,k}\bar p_{jk}\bar\zeta^j\zeta^k \qquad (p_{00}=1)$$

sont aussi d'une des formes réduites, celles-ci ont la même forme avec des mêmes coefficients que les équations en ζ *et* $\bar\zeta$.

5. Intégration des équations des formes réduites.

1° L'intégrale générale des équations (a) est évidemment

$$(\text{a}')\qquad \zeta=Ce^{it},\ \bar\zeta=\bar Ce^{-it},$$

C et $\bar C$ désignant des constantes arbitraires.

2° Dans le cas des équations (b), $\zeta\bar\zeta=\Gamma$ est une constante. On a donc

$$\zeta=C\exp\{i(1+b\Gamma^n)t\},\ \bar\zeta=\bar C\exp\{-i(1+b\Gamma^n)t\},$$

d'où $\Gamma=C\bar C$. Par suite, l'intégrale générale peut s'écrire

$$(\text{b}')\quad \zeta=C\exp\{i(1+b(C\bar C)^n)t\},\ \bar\zeta=\bar C\exp\{-i(1+b(C\bar C)^n)t\}.$$

3° Dans le cas des équations (c), ρ et φ définies par (26) satisfont aux équations

$$\frac{d\rho}{dt}=\rho(a\rho^{2n}+a'\rho^{4n}),\quad \frac{d\varphi}{dt}=1+\sum_{j=1}^{n}b_j\rho^{2j}.$$

L'intégrale générale de ces équations peut s'écrire

$$(\text{c}')\qquad \begin{cases}\rho=\begin{cases}\left\{\dfrac{a'}{a}\mathfrak{a}\left(-\dfrac{2na}{a'}t+C\right)\right\}^{-1/2n} & (a'\neq 0),\\ (C-2nat)^{-1/2n} & (a'=0),\end{cases}\\ \varphi=t+C'+\displaystyle\int\sum_{j=1}^{n}b_j\rho^{2j}dt,\end{cases}$$

C et C' désignant des constantes arbitraires.

6. Etude analytique de la solutoin formelle.

PREMIER CAS: il existe un seul système des séries formelles (21) tel que l'on a (22) et que les équations en ζ et $\bar{\zeta}$ sont (a).

Soit

$$z=\varphi(t,\ z_0,\ \bar{z}_0),\quad \bar{z}=\bar{\varphi}(t,\ \bar{z}_0,\ z_0) \tag{27}$$

la solution telle que $z(0)=z_0$, $\bar{z}(0)=\bar{z}_0$. Les fonctions φ et $\bar{\varphi}$ sont régulières par rapport à $(t,\ z_0,\ \bar{z}_0)$ pour $0\leqq t\leqq 2\pi$, $z_0=0$, $\bar{z}_0=0$. Elles sont donc développables en séries

$$\begin{cases} \varphi(t,\ z_0,\ \bar{z}_0)=\sum\limits_{j,k}\varphi_{jk}(t)z_0^{j+1}\bar{z}_0^k, \\ \bar{\varphi}(t,\ \bar{z}_0,\ z_0)=\sum\limits_{j,k}\bar{\varphi}_{jk}(t)\bar{z}_0^{j+1}z_0^k, \end{cases} \tag{28}$$

convergentes pour $0\leqq t\leqq 2\pi$, $|z_0|<\delta$, $|\bar{z}_0|<\delta$, δ désignant un nombre positif assez petit. On a

$$\varphi_{00}(0)=\bar{\varphi}_{00}(0)=1,\ \varphi_{jk}(0)=\bar{\varphi}_{jk}(0)=0 \qquad (j+k>0), \tag{29}$$

puisque φ et $\bar{\varphi}$ prennent respectivement les valeurs z_0 et $\bar{z}_0$ pour $t=0$. Nous voulons montrer que les fonctions φ et $\bar{\varphi}$ admettent la période 2π par rapport à t. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\varphi_{00}(2\pi)=\bar{\varphi}_{00}(2\pi)=1,\ \varphi_{jk}(2\pi)=\bar{\varphi}_{jk}(2\pi)=0 \qquad (j+k>0). \tag{30}$$

Faisons le changement de variables

$$z=w\sum_{j,k}{}_{(N)}\gamma_{jk}w^j\bar{w}^k,\quad \bar{z}=\bar{w}\sum_{j,k}{}_{(N)}\gamma_{jk}\bar{w}^jw^k, \tag{31}$$

où $\sum_{(N)}$ désigne la sommation étendue à tous les arrangements $(j,\ k)$ tels que $j+k\leqq N$, et soient

$$\frac{dw}{dt}=wg(w,\ \bar{w}),\quad \frac{d\bar{w}}{dt}=\bar{w}g(\bar{w},\ w) \tag{32}$$

les équations en w et $\bar{w}$. En résolvant par rapport à $(w,\ \bar{w})$ les relations formelles

$$w\sum_{j,k}{}_{(N)}\gamma_{jk}w^j\bar{w}^k=\zeta\sum_{j,k}\gamma_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k,\quad \bar{w}\sum_{j,k}{}_{(N)}\gamma_{jk}\bar{w}^jw^k=\bar{\zeta}\sum_{j,k}\gamma_{jk}\bar{\zeta}^j\zeta^k,$$

on obtient

$$w=\zeta\sum_{j,k}q_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k,\quad \bar{w}=\bar{\zeta}\sum_{j,k}q_{jk}\bar{\zeta}^j\zeta^k,$$

où

$$q_{00}=1,\ q_{jk}=0 \qquad (0<j+k\leqq N).$$

En y portant la solution des équations (a), on aura la solution formelle des équations (32). Par suite

$$\bar{g}(w, \bar{w}) = i + (w, \bar{w})_{N+1}.$$

Si l'on pose

$$w = e^{it}(W + w_0), \quad \bar{w} = e^{-it}(\bar{W} + \bar{w}_0),$$

les équations (32) se changent en

$$\frac{dW}{dt} = (W + w_0)\{g(e^{it}(W + w_0),\ e^{-it}(\bar{W} + \bar{w}_0)) - i\},$$

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = (\bar{W} + \bar{w}_0)[\bar{g}(e^{-it}(\bar{W} + \bar{w}_0),\ e^{it}(W + w_0)) + i].$$

Si l'on suppose, en désignant par δ' un nombre positif assez petit,

$$\max\{|W|, |\bar{W}|\} \leqq \sigma|w_0| = \sigma|\bar{w}_0| < \delta',$$

les seconds membres de ces équations ne surpassent pas en module

$$(33) \qquad G|w_0|^{N+1}\{\max\{|W|, |\bar{W}|\} + |w_0|\},$$

G désignant une constante indépendante de w_0 et de $\bar{w}_0$. La solution telle que $W(0) = 0$, $\bar{W}(0) = 0$, satisfait donc à l'inégalité

$$(34) \qquad \max\{|W|, |\bar{W}|\} \leqq |w_0|\{\exp(G|w_0|^{N+1}t) - 1\}$$

pour $0 \leqq t \leqq 2\pi$, pourvu que l'on ait

$$\exp(2\pi G|w_0|^{N+1}) - 1 \leqq \sigma.$$

Cette inégalité est remplie si w_0 est assez petit. Si donc w_0 est assez petit, on obtient pour $t = 2\pi$

$$(35) \qquad |w - w_0| = |W| \leqq K|w_0|^{N+2}, \quad |\bar{w} - \bar{w}_0| = |\bar{W}| \leqq K|\bar{w}_0|^{N+2},$$

K désignant une constante indépendante de w_0 et de $\bar{w}_0$. Les relations (31) montrent ensuite que l'on a

$$(36) \qquad |\varphi(t, z_0, \bar{z}_0) - z_0| \leqq H|z_0|^{N+2}, \quad |\bar{\varphi}(t, z_0, \bar{z}_0) - \bar{z}_0| \leqq H|\bar{z}_0|^{N+2}$$

pour $t = 2\pi$, H désignant aussi une constante indépendante de z_0. On en conclut que $\varphi_{jk}(2\pi) = 0$, $\bar{\varphi}_{jk}(2\pi) = 0$ pour $0 < j + k \leqq N$. N pouvant être pris aussi grand que l'on veut, notre assertion est donc démontrée. Puisque l'on voit immédiatement

$$\varphi_{00}(t) = e^{it}, \quad \bar{\varphi}_{00}(t) = e^{-it},$$

les variables

$$(37) \qquad \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t, z_0, \bar{z}_0) e^{-it} dt = z_0\{1 + (z_0, \bar{z}_0)_1\}, \\ \bar{C} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{\varphi}(t, z_0, \bar{z}_0) e^{it} dt = \bar{z}_0\{1 + (z_0, \bar{z}_0)_1\} \end{aligned} \right.$$

sont des fonctions régulières de $(z_0, \bar{z}_0)$ pour $(0, 0)$. Par suite z_0 et $\bar{z}_0$ sont des fonctions régulières de $(C, \bar{C})$ pour $(0, 0)$ et l'on a les développements

$$\varphi(t, z_0, \bar{z}_0) = Ce^{it}\sum_{j,k}\psi_{jk}(t)C^j\bar{C}^k,\ \bar{\varphi}(t, z_0, z_0) = \bar{C}e^{-it}\sum_{j,k}\bar{\psi}_{jk}(t)C^j\bar{C}^k$$

valables pour $0 \leqq t \leqq 2\pi$, $|C| < \delta''$, $|\bar{C}| < \delta''$, δ'' désignant un nombre assez petit. On voit immédiatement $\psi_{00}(t) = \bar{\psi}_{00}(t) = 1$. Supposons donc que l'on a

$$\psi_{jk}(t) = \gamma_{jk}e^{(j-k)it} \tag{38}$$

pour $j+k < N$. L'équation qui détermine $\psi_{jk}(t)(j+k=N)$ est de la forme

$$\psi'_{jk}(t) = C_{jk}e^{(j-k)it},$$

où C_{jk} est un polynome de $\gamma_{\mu\nu}(\mu+\nu < N)$. Puisque le système des séries (21) étant la solution formelle, on a nécessairement

$$C_{jk} = i(j-k)\gamma_{jk}.$$

Par suite, on a

$$\psi_{jk}(t) = \gamma_{jk}e^{(j-k)it} + \gamma'_{jk}.$$

Puis les relations (37) entraînent

$$\sum_{j,k}{}^{(N)}\gamma'_{jk}C^j\bar{C}^k + (C, \bar{C})_{N+1} = 0.$$

Il en résulte que $\gamma'_{jk} = 0$, et l'on a (38) pour $j+k=N$. On a donc les développements

$$\varphi(t, z_0, \bar{z}_0) = \zeta\sum_{j,k}\gamma_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k,\ \bar{\varphi}(t, \bar{z}_0, z_0) = \bar{\zeta}\sum_{j,k}\bar{\gamma}_{jk}\bar{\zeta}^j\zeta^k\ \ (\zeta = Ce^{it},\ \bar{\zeta} = \bar{C}e^{-it})$$

valables pour $|\zeta| < \delta''$, $|\bar{\zeta}| < \delta''$.

Par conséquent, on arrive à la conclusion suivante.

Les séries (21) *satisfaisant formellement aux équations* (8) *se déterminent d'une seule manière par les conditions* (22). *Elles sont alors convergentes pour les valeurs suffisamment petites de ζ, $\bar{\zeta}$ et représentent la solution des équations* (8) *si l'on y remplace ζ et $\bar{\zeta}$ par la solution de* (a). *Les caractéristiques sont toutes fermées dans le voisinage de* (0, 0).

DEUXIÈME CAS: il existe des séries formelles (21) telles que les équations en ζ et $\bar{\zeta}$ sont (b).

Soit (27) la solution telle que $z(0) = z_0$, $\bar{z}(0) = \bar{z}_0$. Les fonctions φ et $\bar{\varphi}$ sont régulières par rapport à $(t, z_0, \bar{z}_0)$ pour $t \in \Delta$, $z_0 = 0$, $\bar{z}_0 = 0$, où Δ est un domaine borné quelconque dans le plan des t. Nous supposons donc que Δ contient le segment joignant les points 0 et 2π, et que les développements sont valables pour $t \in \Delta$, $|z_0| < \delta_0$, $|\bar{z}_0| < \delta_0$. Nous allons montrer que si z_0 et $\bar{z}_0$ sont des valeurs conjuguées, les fonctions φ et $\bar{\varphi}$ admettent une période réelle ω tendant vers 2π pour $z_0 \to 0$.

On a

$$\varphi(2\pi, z_0, \bar{z}_0) = z_0(1 + (z_0, \bar{z}_0)_1),$$
$$\bar{\varphi}(2\pi, \bar{z}_0, z_0) = \bar{z}_0(1 + (z_0, \bar{z}_0)_1),$$

puisque $\varphi_{00}(t)=e^{it}$. Il en résulte que l'équation en t

$$z_0=\varphi(t,\ z_0,\ \bar{z}_0) \tag{39}$$

admet une racine

$$\omega=\omega(z_0,\ \bar{z}_0)=2\pi+(z_0,\ \bar{z}_0)_1,$$

qui est une fonction régulière de $(z_0,\ \bar{z}_0)$ pour $(0,0)$. Si ω est réelle pour les valeurs conjuguées de z_0 et de $\bar{z}_0$, l'égalité

$$z_0=\varphi(\omega,\ z_0,\ \bar{z}_0)$$

entraîne

$$\bar{z}_0=\varphi(\omega,\ \bar{z}_0,\ z_0)$$

et ω est la période de la solution considérée. Il suffit donc de démontrer que, en supposant ω non réelle, on aboutit à une contradiction.

Soit

$$\omega=2\pi+\sum_{j,k}{}'\omega_{jk}z_0^j\bar{z}_0^k$$

le développement de ω en série de puissances entières de z_0 et de $\bar{z}_0$. D'après notre supposition, il existerait au moins une paire de coefficients ω_{jk} et ω_{kj} tels que $\bar{\omega}_{jk}\neq\omega_{kj}$ ou un coefficient non réel ω_{jj}. Soit m la plus petite des sommes $j+k$ telles que $\bar{\omega}_{jk}\neq\omega_{kj}$. Si l'on pose

$$z_0=r_0e^{i\alpha},\ \bar{z}_0=r_0e^{-i\alpha},\ \omega_{jk}=\omega'_{jk}+i\omega''_{jk},$$

on a

$$\begin{aligned}\Im\omega=r_0^m\{\omega''_m&+\sum_{(j,k)}{}_m(\omega'_{jk}-\omega'_{kj})\sin(j-k)\alpha\\&+\sum_{(j,k)}{}_m(\omega''_{jk}+\omega''_{kj})\cos(j-k)\alpha+O(r_0)\},\end{aligned}$$

où $\sum_m$ désigne la sommation étendue à toutes les combinaisons $(j,\ k)$ telles que $j+k=m$ et ω''_m est égal à $\omega_{m'm'}$ $(m'=m/2)$ ou à 0 suivant que m est pair ou impair. Donnons à α une valeur determinée telle que la valeur

$$\begin{aligned}B=\omega''_m&+\sum_{(j,k)}{}_m(\omega'_{jk}-\omega'_{kj})\sin(j-k)\alpha\\&+\sum_{(j,k)}{}_m(\omega''_{jk}+\omega''_{kj})\cos(j-k)\alpha\end{aligned}$$

n'est pas nulle. En donnant toujours à z_0 et à $\bar{z}_0$ des valeurs conjuguées suffisamment petites, nous pouvons supposer que $|\omega-2\pi|<\delta$, 2δ désignant un nombre positif assez petit moindre que la distance de 2π à la frontière de $\varDelta$. Soit ε un nombre positif quelconque donné à l'avance. Si δ' est un nombre assez petit, on aura

$$|\bar{z}'_0-\bar{z}_0|<(e^{4\pi}-1)|z_0|,\ |f(z,\bar{z})-i|<\varepsilon,\ |f(\bar{z},z)+i|<\varepsilon$$

pour $|z-z_0|<\delta'$, $|\bar{z}-\bar{z}'_0|<\delta'$, $\bar{z}'_0$ désignant la valeur $\varphi(\omega,\ \bar{z}_0,\ z_0)$.

Cela posé, faisons le changement de variables

$$z=e^{i(t-\omega)}(u+z_0),\quad \bar z=e^{-i(t-\omega)}(\bar u+\bar z_0).$$

Les équations se changent en

$$\frac{du}{dt}=(u+z_0)\{f(z,\bar z)-i\},\quad \frac{d\bar u}{dt}=(\bar u+\bar z_0)\{\bar f(\bar z, z)+i\},$$

dont les seconds membres ne surpassent pas en module l'expression

$$\varepsilon(|u|+e^{4\pi}|z_0|)$$

pourvu que

$$2e^{4\pi}(e^{2\delta}+1)|z_0|<\delta',\quad |t-2\pi|<\delta,$$

$$|u|\leqq\frac{\delta'}{2}e^{-2\delta},\quad |\bar u|\leqq\frac{\delta'}{2}e^{-2\delta}.$$

L'équation

$$\frac{dU}{ds}=\varepsilon(U+e^{4\pi}|z_0|)$$

admet la solution

$$U=e^{4\pi}|z_0|(e^{\varepsilon s}-1).$$

On aura donc

$$\max\{|u|,|\bar u|\}\leqq e^{4\pi}|z_0|(e^{\varepsilon|t-\omega|}-1)$$

pour $|t-2\pi|\leqq\delta$. Par suite, on a l'inégalité

$$|\varphi(t,z_0,\bar z_0)-z_0|>(1-2\varepsilon e^{2\delta+4\pi})|z_0||t-\omega|,$$

en supposant δ assez petit. En remarquant que

$$\mathfrak{J}\omega=r_0^m\{\beta+O(r_0)\},\ \beta\neq0,$$

on verrait

$$|\varphi(t,z_0,\bar z_0)-z_0|>\beta(1-3\varepsilon e^{2\delta+4\pi})r_0^{m+1} \tag{40}$$

pour les valeurs suffisamment petites $z_0=r_0e^{i\alpha}$, $\bar z_0=r_0e^{-i\alpha}$ et pour la valeur réelle t telle que $|t-2\pi|\leqq\delta$.

Faisons maintenant le changement de variables (31) et soient (32) les équations en w et $\bar w$. On varra, comme au cas précédent, que l'on a

$$g(w,\bar w)=i+ib(w\bar w)^n+(w,\bar w)_{N+1}.$$

Posons

$$w=e^{i\lambda t}(W+w_0),\ \bar w=e^{-i\lambda t}(\bar W+\bar w_0),\ \lambda=1+b(w_0\bar w_0)^n.$$

Les équations en W et $\bar W$ deviennent

$$\frac{dW}{dt}=(W+w_0)\{g(e^{i\lambda t}(W+w_0),\ e^{-i\lambda t}(\bar W+\bar w_0))-i\lambda\},$$

$$\frac{d\bar W}{dt}=(\bar W+\bar w_0)\{\bar g(e^{-i\lambda t}(\bar W+\bar w_0),\ e^{i\lambda t}(W+w_0))+i\lambda\}.$$

Supposons que

$$\max \{ |W|, |\overline{W}| \} \leqq |w_0|^{N+1} = |\overline{w}_0|^{N+1} < \delta_1,$$

δ_1 désignant un nombre positif assez petit. On peut alors trouver une constante G de manière que les seconds membres de ces équations ne surpassent pas en module l'expression (33). La solution, telle que $W(0)=\overline{W}(0)=0$, satisfait donc à l'inégalité (34) pour $0 \leqq t \leqq 2\pi+\delta$ pourvu que l'on ait

$$\exp(G|w_0|^{N+1}t)-1 \leqq |w_0|^{N}.$$

Si w_0 est assez petit, cette inégalité est évidemment remplie et l'on a de plus $2\pi/\lambda \leqq 2\pi+\delta$. On obtient donc (35) pour $t=2\pi/\lambda$. Les relations (31) montrent ensuite que l'on a (36) pour $t=2\pi/\lambda$. λ tendant vers 1 pour $z_0 \to 0$, $t=2\pi/\lambda$ est une valeur telle que $|t-2\pi| \leqq \delta$. Alors l'inégalité (36) est en contradiction avec l'inégalité (40), car N peut être supposé plus grand que m. L'existence de la période réelle ω est donc établie.

Remarquons en passant que l'on a

$$\omega = 2\pi\{1-b(z_0\overline{z}_0)^n(1+(z_0, \overline{z}_0)_1)\}. \tag{41}$$

En effet, les équations en

$$u = w - w_0 \exp\{i(1+b(w_0\overline{w}_0)^n)t\},$$
$$\overline{u} = \overline{w} - \overline{w}_0 \exp\{-i(1+b(w_0\overline{w}_0)^n)t\}$$

s'écrivent

$$\frac{du}{dt} = (u, \overline{u};\ t, w_0, \overline{w}_0)_1 + (w_0, \overline{w}_0; t)_{N+2},$$

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = (u, \overline{u};\ t, w_0, \overline{w}_0)_1 + (w_0, \overline{w}_0;\ t)_{N+2},$$

où $(u, \overline{u};\ t, w_0, \overline{w}_0)$, par exemple, signifie une fonction régulière de $(u, \overline{u})$ dans le voisinage de $(0, 0)$ et telle que son développement en série de puissances entières de $(u, \overline{u})$ ne contient que des termes de degrés au moins égaux à 1, les coefficients étant des fonctions de $(t, w_0, \overline{w}_0)$ régulières dans un certain domaine considéré. On en conclut

$$u = (w_0, \overline{w}_0;\ t)_{N+2}.$$

Par suite,

$$w = w_0\{\exp(i(1+b(w_0\overline{w}_0)^n)t) + (w_0, \overline{w}_0;\ t)_{N+1}\}.$$

$t=\omega$ est la racine de l'équation en t:

$$1 = \exp\{i(1+b(w_0\overline{w}_0)^n)t\} + (w_0, \overline{w}_0;\ t)_{N+1},$$

que l'on peut écrire

$$1-e^{i\tau}=(w_0,\bar{w}_0;\ \tau)_{N+1},$$

en posant

$$\tau=t(1+b(w_0\bar{w}_0)^n).$$

τ tendant vers 2π pour $w_0\to 0$, $\bar{w}_0\to 0$, on a

$$\tau=2\pi+(w_0,\bar{w}_0)_{N+1}.$$

Cette relation est équivalente à

$$(42)\qquad \omega=2\pi/(1+b(w_0\bar{w}_0)^n)+(w_0,\bar{w})_{N+1}.$$

On en déduit

$$\omega=2\pi\{1-b(z_0\bar{z}_0)^n(1+(z_0,\bar{z}_0)_1)\}+(z_0,\bar{z}_0)_{N+1}.$$

N pouvant être supposé aussi grand que l'on veut, on a la relation (41).

La relation

$$(43)\qquad \omega=2\pi/(1+b(C\bar{C})^n)$$

détermine donc $C\bar{C}$ comme une fonction de $(z_0,\bar{z}_0)$ régulière pour $(0,0)$:

$$(44)\qquad C\bar{C}=z_0\bar{z}_0\{1+(z_0,\bar{z}_0)_1\}.$$

Les relations

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} &C\chi(C,\bar{C})=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\varphi(t,z_0,\bar{z}_0)e^{-2\pi it/\omega}dt=z_0\{1+(z_0,\bar{z}_0)_1\},\\ &\bar{C}\chi(C,\bar{C})=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\bar{\varphi}(t,\bar{z}_0,z_0)e^{2\pi it/\omega}dt=\bar{z}_0\{1+(z_0,\bar{z}_0)_1\}\end{aligned}\right.$$

déterminent avec (44) C et $\bar{C}$ comme des fonctions régulières de $(z_0,\bar{z}_0)$ pour $(0,0)$:

$$C=z_0\{1+(z_0,\bar{z}_0)_1\},\quad \bar{C}=\bar{z}_0\{1+(z_0,\bar{z}_0)_1\},$$

et inversement z_0 et $\bar{z}_0$ comme des fonctions régulières de $(C,\bar{C})$ pour $(0,0)$:

$$z_0=C\{1+(C,\bar{C})_1\},\quad \bar{z}_0=\bar{C}\{1+(C,\bar{C})_1\}.$$

Les fonctions φ et $\bar{\varphi}$ sont développables en séries convergentes

$$\varphi(t,z_0,\bar{z}_0)=C\sum_{j,k}\varphi_{jk}(t)C^j\bar{C}^k,\quad \bar{\varphi}(t,\bar{z}_0\ z_0)=\bar{C}\sum_{j,k}\bar{\varphi}_{jk}(t)\bar{C}^jC^k$$

pour $t\in\varDelta$, $|C|<\delta_2$, $|\bar{C}|<\delta_2$.

Les relations (b') montrent ensuite que C et $\bar{C}$ sont des fonctions régulières de $(t,\zeta,\bar{\zeta})$ pour $t\in\varDelta$, $|\zeta|<\delta_3$, $|\bar{\zeta}|<\delta_3$. Par suite, on a les développements

$$(46)\qquad \varphi(t,z_0,\bar{z}_0)=\zeta\sum_{j,k}\psi_{jk}(t)\zeta^j\bar{\zeta}^k,\quad \bar{\varphi}(t,\bar{z}_0,z_0)=\bar{\zeta}\sum_{j,k}\bar{\psi}_{jk}(t)\bar{\zeta}^j\zeta^k$$

valables pour $t\in\varDelta$, $|\zeta|<\delta_4$, $|\bar{\zeta}|<\delta_4$. Il est à montrer que $\psi_{jk}(t)=\gamma_{jk}$.

Pour cela, montrons d'abord que l'on a

$$(47)\qquad \chi(C,\bar{C})=\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_{jj}(C\bar{C})^j.$$

Soit

$$w=\Phi(t, w_0, \bar{w}_0),\quad \bar{w}=\bar{\Phi}(t, \bar{w}_0, w_0)$$

la solution des équations (32), w_0, $\bar{w}_0$ désignant les valeurs initiales de w et de $\bar{w}$ pour $t=0$. Les relations entre $(z, \bar{z})$ et $(w, \bar{w})$ étant (31), la relation (44) entraîne

$$C\bar{C}=w_0\bar{w}_0\{1+(w_0, \bar{w}_0)_1\},$$

et puis les relations (42) et (43) entraînent

$$C\bar{C}=w_0\bar{w}_0\{1+(w_0, \bar{w}_0)_{N-n+1}\}. \tag{48}$$

En remarquant l'inégalité (34), on a

$$\begin{aligned}&|\Phi(t, w_0, \bar{w}_0)-w_0e^{2\pi it/\omega}|\\ &\leqq|\Phi(t, w_0, \bar{w}_0)-w_0e^{i\lambda t}|+|w_0||e^{i\lambda t}-e^{2\pi it/\omega}|\\ &\leqq K|w_0|^{N+2}\end{aligned}$$

pour $0\leqq t\leqq 2\pi+\delta$ et les valeurs conjuguées assez petites de w_0 et de $\bar{w}_0$, K désignant une certaine constante indépendante de w_0. On en déduit

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\Phi(t, w_0, \bar{w}_0)^{j+1}\bar{\Phi}(t, \bar{w}_0, w_0)^k e^{-2\pi it/\omega}dt\right|\leqq K_1|w_0|^{N+j+k+2}$$

pour $j\neq k$, $j+k\leqq N$ et

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\Phi(t, w_0, \bar{w}_0)^{j+1}\bar{\Phi}(t, \bar{w}_0, w_0)^j e^{-2\pi it/\omega}dt-w_0(w_0\bar{w}_0)^j\right|\leqq K_1|w_0|^{N+2j+2}$$

pour $2j\leqq N$, K_1 désignant aussi une constante indépendante de w_0. Puisque

$$\varphi(t, z_0, \bar{z}_0)=\Phi(t, w_0, \bar{w}_0)\sum_{j,k}{}_{(N)}\gamma_{jk}\Phi(t, w_0, \bar{w}_0)^j\bar{\Phi}(t, \bar{w}_0, w_0)^k,$$

on a

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\varphi(t, z_0, \bar{z}_0)e^{-2\pi it/\omega}dt-w_0\sum_{2j\leqq N}\gamma_{jj}(w_0\bar{w}_0)^j\right|\leqq K_2|w_0|^{N+2},$$

K_2 désignant aussi une constante indépendante de w_0. Cette inégalité entraîne

$$C\chi(C, \bar{C})=w_0\{\sum_{2j\leqq N}\gamma_{jj}(w_0\bar{w}_0)^j+(w_0, \bar{w}_0)_{N+1}\} \tag{49}$$

et

$$\bar{C}\chi(C, \bar{C})=\bar{w}_0\{\sum_{2j\leqq N}\gamma_{jj}(w_0\bar{w}_0)^j+(w_0, \bar{w}_0)_{N+1}\}.$$

Ces relations et (48) entraînent

$$C=w_0\{1+(w_0, \bar{w}_0)_{N-n+1}\},\quad \bar{C}=\bar{w}_0\{1+(w_0, \bar{w}_0)_{N-n+1}\}.$$

Par suite,

$$w_0=C\{1+(C, \bar{C})_{N-n+1}\},\quad \bar{w}_0=\bar{C}\{1+(C, \bar{C})_{N-n+1}\}.$$

En portant ces expressions dans (49) nous trouvons

$$\chi(C, \bar{C})=\sum_{2j\leqq N}\gamma_{jj}(C\bar{C})^j+(C, \bar{C})_{N-n+1},$$

N pouvant être supposé aussi grand que l'on veut, on a le développement (47).

Cela posé, supposons que l'on a $\psi_{jk}(t)=\gamma_{jk}$ pour $j+k<N$. En remplaçant dans les équations (8) les variables z et $\bar{z}$ par les seconds membres de (46), nous trouvons pour déterminer les coefficients $\psi_{jk}(t)(j+k=N)$ les équations de la forme

$$\psi'_{jk}(t)+(j-k)i\psi_{jk}(t)=i\lambda_{jk},$$

λ_{jk} désignant des constantes. En intégrant ces équations, on obtient, dans le cas de $N=2m$ pair, par exemple,

$$\psi_{jk}(t)=\begin{cases} \gamma'_{jk}e^{(k-j)it}+\dfrac{\lambda_{jk}}{j-k} & (j\neq k), \\ i\lambda_{mm}t+\gamma'_{mm} & (j=k=m), \end{cases}$$

où γ'_{jk} sont des constantes. Le système des séries (21) étant la solution formelle, les équations différentielles en $\psi_{jk}(t)$ doivent être satisfaites en posant $\psi_{jk}(t)=\gamma_{jk}$. On a donc nécessairement

$$\gamma'_{jk}=0,\ \lambda_{jk}=(j-k)\gamma_{jk} \qquad (j\neq k)$$

et $\lambda_{mm}=0$. Il nous reste à montrer $\gamma'_{mm}=\gamma_{mm}$. Or on a

$$C\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_{jj}(C\bar{C})^j=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\varphi(t, z_0, \bar{z}_0)e^{-2\pi it/\omega}dt$$

$$=\frac{C}{\omega}\int_0^{\omega}\{\sum_{j,k}{}_{(N)}\gamma_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k+(\gamma'_{mm}-\gamma_{mm})(\zeta\bar{\zeta})^m+(\zeta,\bar{\zeta})_{N+1}\}\,dt$$

$$=C\{\sum_{j<m}\gamma_{jj}(C\bar{C})^j+\gamma'_{mm}(C\bar{C})^m+(C,\bar{C})_{N+1}\},$$

d'où il résulte $\gamma'_{mm}=\gamma_{mm}$.

$\psi_{00}(t)$ étant évidemment égale à 1 $(=\gamma_{00})$, on a les développements

$$\varphi_{00}(t, z_0, \bar{z}_0)=\zeta\sum_{j,k}\gamma_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k,\ \bar{\varphi}(t, z_0, \bar{z}_0)=\bar{\zeta}\sum\bar{\gamma}_{jk}\bar{\zeta}^j\zeta^k.$$

valables pour $t\in\Delta$, $|\zeta|<\delta_4$, $|\bar{\zeta}|<\delta_4$.

On arrive donc à la conclusion suivante:

Les séries (21) *satisfaisant formellement aux équations* (8) *se déterminent d'une seule manière par les conditions* (24). *Elles sont alors convergentes pour les valeurs suffisamment petites de* ζ, $\bar{\zeta}$ *et représentent la solution des équations* (8) *si l'on y remplace* ζ *et* $\bar{\zeta}$ *par la solution de* (b). *Les caractéristiques sont toutes fermées dans le voisinage de* (0, 0).

TROISIÈME CAS: il existe des séries formelles (21) telles que les équations en ζ et $\bar{\zeta}$ sont (c).

Faisons le changement de variables (31) et soient (32) les équations en w et $\bar{w}$.

Ces équations admettent une solution formelle

$$w=\zeta\{1+\sum_{j,k}^{(N+1)}\gamma'_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k\},\ \bar{w}=\bar{\zeta}\{1+\sum_{j,k}^{(N+1)}\gamma'_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k\},$$

où $\sum^{(N+1)}$ désigne la sommation étendue à tous les arrangements $(j,\,k)$ dont la somme est au moins égale à $N+1$. On en conclut

$$g(w,\,\bar{w})=w\{i+i\sum_{j=1}^{n}b_j(w\bar{w})^j+a(w\bar{w})^n+a'(w\bar{w})^{2n}+(w,\,\bar{w})_{N+1}\}.$$

En posant

$$(50)\qquad w=ue^{iv},\ \ \bar{w}=ue^{-iv},$$

on obtient

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=u\{au^{2n}+a'u^{4n}+(ue^{iv},\,ue^{-iv})_{N+1}\},\\ \frac{dv}{dt}&=1+\sum_{j=1}^{n}b_ju^{2j}+(ue^{iv},\,ue^{-iv})_{N+1}.\end{aligned}\right.$$

Désignons par $u=\chi(t)$ une solution de l'équation

$$(52)\qquad \frac{du}{dt}=u^{2n+1}(a+a'u^{2n}),$$

et faisons le changement de variables

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned}u&=\chi(t+u'),\\ v&=t+\int_0^t\sum_{j=1}^{n}b_j\chi(s+u')^{2j}ds+v'.\end{aligned}\right.$$

Les équations en u' et v' s'écrivent

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{du'}{dt}&=\chi(t+u')^{-2n}(ue^{iv},\,ue^{-iv})_{N+1},\\ \frac{dv'}{dt}&=(ue^{iv},\,ue^{-iv})_{N+1}+\chi(t+u')^{-2n}(ue^{iv},\,ue^{-iv})_{N+1}\\ &\quad\times\int_0^t\sum_{j=1}^{n}2jb_j\chi(s+u')^{2(j+n)}(a+a'\chi(s+u')^{2n})ds,\end{aligned}\right.$$

où l'on doit remplacer u et v par les seconds membres de (53).

Considérons, par exemple, le cas de $a>0$. Un nombre positif quelconque ε étant donné, on peut déterminer un nombre τ de manière que l'équation (52) admette une solution telle que l'on a

$$a+a'u^{2n}>0$$

et

$$(55)\qquad (\tau-t)^{-(1+\varepsilon)/2n}\leqq u\leqq(\tau-t)^{-(1-\varepsilon)/2n}$$

pour $-\infty < t \leqq 0$. Nous supposons donc que $u=\chi(t)$ satisfait à ces inégalités, ε étant un nombre positif moindre que $1/(n+1)$. Si $t<0$, $u'<0$, les seconds membres de (54) ne surpassent pas en module l'expression

$$(56) \qquad A(\tau-t-u')^{-\alpha},$$

où A est une certaine constante et

$$(57) \qquad \alpha=(N+1-2n)\frac{1-\varepsilon}{2n}.$$

Pour qu'il existe une solution telle que l'on a

$$(58) \qquad \left.\begin{array}{l} |u'-u_0'| \\ |v'-v_0'| \end{array}\right\} \leqq A(\tau-t-u_0')^{-\alpha+1}$$

pour $-\infty < t \leqq 0$, il suffit que l'on ait

$$\alpha-1 \geqq \{1-A(\tau-u_0')^{-\alpha}\}^{-\alpha},$$

ce qui est évidemment remplie si la valeur négative u_0' est suffisamment grande.

Or les dérivées partielles des seconds membres de (54) considérés comme des fonctions de u' et de v' ne surpassent pas en module une expression de la même forme que (56). Par suite, il n'existe qu'une solution telle que u' et v' tendent respectivement des valeurs données u_0' et v_0' pour $t \to -\infty$.

Cela posé, soit $\zeta_0=u_0e^{iv_0}$ une valeur complexe de module assez petit. Il existe une seule valeur u_0' telle que $\chi(u_0')=u_0$ et $u_0' \to -\infty$ pour $u_0 \to +0$. Posons $v_0'=v_0$ et désignons par $u'(t, u_0', v_0')$, $v'(t, u_0', v_0')$ la solution de (54) satisfaisant aux inégalités (58) et par $u(t, u_0, v_0)$, $v(t, u_0, v_0)$ la solution correspondante de (51) et par $w(t, \zeta_0, \bar{\zeta}_0)$, $\bar{w}(t, \bar{\zeta}_0, \zeta_0)$ la solution correspondante de (32).

D'autre part, posons

$$\xi(t, u_0')=\chi(t+u_0'),$$

$$\eta(t, u_0', v_0')=t+\int_0^t\sum_{j=1}^{n} b_j\chi(s+u_0')^{2j}ds+v_0',$$

$$\zeta(t, \zeta_0, \bar{\zeta}_0)=\xi e^{i\eta}, \quad \bar{\zeta}(t, \bar{\zeta}_0, \zeta_0)=\xi e^{-i\eta}.$$

$u-\xi$ et $v-\eta$ satisfont aux inégalités

$$\left.\begin{array}{l} |u(t, u_0, v_0)-\xi(t, u_0')| \\ |v(t, u_0, v_0)-\eta(t, u_0', v_0')| \end{array}\right\} \leqq B_1(\tau-t-u_0')^{-\alpha+1}.$$

On en déduit une inégalité de la forme

$$|w(t, \zeta_0, \bar{\zeta}_0)-\zeta(t, \zeta_0, \bar{\zeta}_0)| \leqq B_2|\tau-t-u_0'|^{-\alpha+1}$$

et les relations (31) entre $(z, \bar{z})$ et $(w, \bar{w})$ entraînent des inégalités de la forme

$$(59)\qquad \left.\begin{array}{l} |z(t,\zeta_0,\bar\zeta_0)-\zeta\sum_{j,k}{}_{(N)}\gamma_{jk}\zeta^j\bar\zeta^k| \\ |\bar z(t,\bar\zeta_0,\zeta_0)-\bar\zeta\sum_{j,k}{}_{(N)}\bar\gamma_{jk}\bar\zeta^j\zeta^k| \end{array}\right\}\leqq B|\tau-t-u_0'|^{-\alpha+1}$$

pour $-\infty<t\leqq 0$.

Inversement, ces inégalités entraînent

$$w-\zeta=O(|t|^{-\alpha+1})$$

et l'on verra sans peine $u'\to u_0'$, $v'\to v_0'$ pour $t\to-\infty$, N désignant un entier positif quelconque. u_0' et v_0' se déterminent indépendamment de N. On peut en conclure que la solution ainsi définie $z(t,\zeta_0,\bar\zeta_0)$, $\bar z(t,\bar\zeta_0,\zeta_0)$ est indépendante de N. En posant $t=0$ dans (59), on a

$$(60)\qquad \left.\begin{array}{l} |z(0,\zeta_0,\bar\zeta_0)-\zeta_0\sum_{j,k}{}_{(N)}\gamma_{jk}\zeta_0^j\bar\zeta_0^k| \\ |\bar z(0,\bar\zeta_0,\zeta_0)-\bar\zeta_0\sum_{j,k}{}_{(N)}\bar\gamma_{jk}\bar\zeta_0^j\zeta_0^k| \end{array}\right\}\leqq B|\tau-u_0'|^{-\alpha+1}.$$

Or la solution reste invariante par la transformation qui remplace t, u_0', v_0' par $t-t_0$, $u_0'+t_0$ et

$$t_0+\int_0^{t_0}\sum_{j=1}^{n}b_j\chi(s+u_0')^{2j}ds+v_0'.$$

Par cette transformation ζ_0 se change en

$$\chi(t_0+u_0')\exp i\{t_0+\int_0^{t_0}\sum_{j=1}^{n}b_j\chi(s+u_0')^{2j}ds+v_0'\},$$

qui est la valeur de ζ pour $t=t_0$. On a donc

$$z(t,\zeta_0,\bar\zeta_0)=z(t-t_0,\zeta(t_0,\zeta_0,\bar\zeta_0),\bar\zeta(t_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)),$$

$$\bar z(t,\bar\zeta_0,\zeta_0)=\bar z(t-t_0,\bar\zeta(t_0,\bar\zeta_0,\zeta_0),\zeta(t_0,\zeta_0,\bar\zeta_0)).$$

En y posant $t=t_0$, on obtient

$$z(t,\zeta_0,\bar\zeta_0)=z(0,\zeta(t,\zeta_0,\bar\zeta_0),\bar\zeta(t,\bar\zeta_0,\zeta_0)),$$

$$\bar z(t,\bar\zeta_0,\zeta_0)=\bar z(0,\bar\zeta(t,\bar\zeta_0,\zeta_0),\zeta(t,\zeta_0,\bar\zeta_0)).$$

D'autre part, le second membre de (60) est inférieure à une expression de la forme $B'|\zeta|^{-2n(\alpha-1)/(1+F)}$. On aboutit donc à la conclusion suivante.

La solution des équations (8) *peut s'écrire*

$$z=\zeta F(\zeta,\bar\zeta),\quad \bar z=\bar\zeta\bar F(\bar\zeta,\zeta),$$

où ζ, $\bar\zeta$ *désignent la solution générale des équations* (c), *et* $F(\zeta,\bar\zeta)$ *et* $\bar F(\bar\zeta,\zeta)$ *satisfont aux inégalités*

$$\left.\begin{array}{l} |F(\zeta,\bar{\zeta})-\sum_{j,k}{}_{(N)}\gamma_{jk}\zeta^j\bar{\zeta}^k| \\ |\bar{F}(\bar{\zeta},\zeta)-\sum_{j,k}{}_{(N)}\bar{\gamma}_{jk}\bar{\zeta}^j\zeta^k| \end{array}\right\} \leqq B_N|\zeta|^{N+1}$$

si ζ et $\bar{\zeta}$ représentent des valeurs conjugées suffisamment petites. L'origine est un foyer des équations correspondantes **(1).**