Sur la généralisation des théorèmes de M. J. Malmquist.

Par

Masuo HUKUHARA

1. Nous considérons l'équation différentielle

$$x^{\alpha}.\, y^{\beta}.\, dy/dx = f(x, y), \tag{1}$$

dont le second membre est une fonction régulière dans le voisinage de (0,0) prenant la valeur non nulle λ pour $x=0$, $y=0$. M. J. Malmquist a supposé que α et β étaient des entiers positifs[1]. Nous voulons montrer que son résultat subsiste encore sans cette restriction. Nous supposerons donc seulement que α et β soient des constantes réelles et que $\alpha \geqq 1$, $\beta > -1$.

Considérons x comme fonction de y. Alors on a

$$\lambda.\, dx/dy = x^{\alpha} y^{\beta}[1+g(x, y)], \tag{2}$$

où $g(x, y)$ est une fonction régulière s'annulant pour $x=y=0$. Soit $x = \psi(y)$ la solution de

$$\lambda.\, dx/dy = x^{\alpha} y^{\beta}, \tag{3}$$

prenant la valeur ξ pour $y=0$. On voit après un calcul facile

$$\psi(y) = \xi[1-(\alpha-1)\mu\xi^{\alpha-1} y^{\beta+1}]^{-1/(\alpha-1)}$$

si $\alpha \neq 1$, et

$$\psi(y) = \xi \exp \mu y^{\beta+1}$$

si $\alpha = 1$, où $\mu = 1/(\beta+1)\lambda$. Soient H et K deux nombres quelconques tels que

$$0 < H < |\mu| < K. \tag{4}$$

Si $\xi^{\alpha-1} y^{\beta+1}$ est suffisamment petit, on aura

$$H|\xi^{\alpha} y^{\beta+1}| \leqq |\psi(y)-\xi| \leqq K|\xi^{\alpha} y^{\beta+1}|. \tag{5}$$

---

(1) J. Malmquist, Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre, Acta Math., **74** (1941), 175-196.

D'autre part, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, on aura

$$(6) \qquad |g(x, y)| < \varepsilon$$

si x et y sont suffisamment petits.

Cela posé, soit

$$(7) \qquad du/dy = h(y, u)$$

l'équation en $u = x - \psi(y)$. On vérifie sans peine

$$(8) \qquad \lambda h(y,u) = y^{\beta}[x^{\alpha} - \psi(y)^{\alpha} + x^{\alpha}\, g(x,y)].$$

Par suite,

$$|\lambda h(y,u)| \leq |y^{\beta}|\, [\alpha(|u| + |\psi(y)|)^{\alpha-1}|u| + \varepsilon\, |x^{\alpha}|].$$

En supposant toujours que $\xi^{\alpha-1} y^{\beta+1}$ soit suffisamment petit, on a

$$(9) \qquad |\psi(y) - \xi| \leq \delta\, |\xi|,$$

δ désignant un nombre positif arbitraire donné à l'avance. Supposons de plus $|u| \leq \delta\, |\xi|$. On aura alors

$$(10) \qquad |\lambda h(y,u)| \leq (1+2\delta)^{\alpha-1}|\xi^{\alpha-1}y^{\beta}|\, [\alpha\, |u| + \varepsilon(1+2\delta)\, |\xi|].$$

L'équation différentielle

$$|\lambda|.\ dU/dt = (1+2\delta)^{\alpha-1}|\xi^{\alpha-1}|\, t^{\beta}[\alpha U + \varepsilon(1+2\delta)\, |\xi|]$$

a une solution, s'annulant pour $t = 0$, dont l'expression est

$$U = \varepsilon(1+2\delta)\alpha^{-1}|\xi|\, [\exp \alpha(1+2\delta)^{\alpha-1}|\mu\xi^{\alpha-1}|\, t^{\beta+1} - 1].$$

Si nous condsidérons seulement la valeur de t entre 0 et $|y|$, on aura dans tous les cas

$$U \leq \varepsilon K(1+2\delta)^{\alpha}\, |\xi^{\alpha}|\, t^{\beta+1}.$$

Si donc

$$\varepsilon K(1+2\delta)^{\alpha}|\xi^{\alpha-1}\, y^{\beta+1}| \leq \delta,$$

ce qui est évidemment rempli d'après notre supposition, l'équation (7) possède une solution telle que

$$|u| \leqq \varepsilon K(1+2\delta)^{\alpha} |\xi^{\alpha} y^{\beta+1}|$$

dans le domaine

$$0 < |\xi| < \rho, \; 0 < |y| < \rho, \; |\xi^{\alpha-1} y^{\beta+1}| < \rho, \tag{11}$$

ρ désignant un nombre suffisamment petit.

Or, il n'existe qu'une telle solution, ou plus précisément, l'équation (7) n'admet qu'une solution s'annulant lorsque y s'approche de 0 le long d'une demi-droite dont l'extrémité est 0. Bien entendu, on doit prendre pour x^{α} et y^{β} des branches déterminées (mais arbitraires).

En effet

$$\lambda. \; \partial h/\partial u = x^{\alpha-1} y^{\beta} [a + ag(x, y) + x. \; \partial g/\partial x],$$

et l'inégalité (9) entraîne

$$(1-\delta)|\xi| < |\psi(y)| < (1+\delta)|\xi|.$$

Si u est suffisamment petit, nous pouvons supposer

$$(1-2\delta)|\xi| < |x| < (1+2\delta)|\xi|.$$

On aura donc une inégalité

$$|\partial h/\partial u| \leqq A\, |y^{\beta}|,$$

où A est une certaine constante (qui dépend de ξ). β étant > -1, il n'existe qu'une solution u s'annulant pour $y \to 0$ le long d'une demi-droite dont l'extrémité est 0.

Cette solution unique sera désignée par

$$u = \varphi(y) - \psi(y).$$

Alors $x = \varphi(y)$ est la solution unique de (2) prenant la valeur ξ pour $y \to 0$ le long d'une demi-droite dont l'extrémité est 0. Elle satisfait aux inégalités

$$|\varphi(y) - \psi(y)| \leqq \varepsilon K(1+2\delta)^{\alpha} |\xi^{\alpha} y^{\beta+1}|.$$

Le coefficient $\varepsilon K(1+2\delta)^{\alpha}$ peut être supposé aussi petit que l'on veut. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

L'équation (2) *admet une solution* $x = \varphi(y)$ *telle que l'on ait*

$$(12) \qquad |\varphi(y) - \psi(y)| \leqq \varepsilon\, |\xi^\alpha y^{\beta+1}|$$

pour (11). *Le nombre positif* ε *peut être supposé aussi petit que l'on veut, si l'on prend* $\rho > 0$ *assez petit. Cette solution se détermine d'une manière unique par la condition qu'elle tend vers* ξ *lorsque* y *s'approche de* 0 *le long d'une demi-droite. Bien entendu, on doit prendre dans le voisinage de* ξ *une certaine branche déterminée (mais arbitraire) de* x^α.

En combinant (5) et (12), nous obtenons

$$(H - \varepsilon)\, |\xi^\alpha y^{\beta+1}| \leqq |\varphi(y) - \xi| \leqq (K + \varepsilon)\, |\xi^\alpha y^{\beta+1}|,$$

ce qui peuvent être aussi remplacées par

$$(13) \qquad H\, |\xi^\alpha y^{\beta+1}| \leqq |\varphi(y) - \xi| \leqq K\, |\xi^\alpha y^{\beta+1}|,$$

car les constantes $H - \varepsilon$ et $K + \varepsilon$ peuvent être prises aussi voisines de $|\mu|$ qué l'on veut.

Considérons maintenant la fonction inverse $y = \Phi(x)$ de $x = \varphi(y)$. Elle est une solution de (1) régulière (non uniforme) dans un domaine assez petit

$$(14) \qquad 0 < |x - \xi| < r \min\{|\xi|, |\xi^\alpha|\}$$

et satisfaisant aux inégalités

$$(15) \qquad H\, |\xi^\alpha y^{\beta+1}| \leqq |x - \xi| \leqq K\, |\xi^\alpha y^{\beta+1}|.$$

C'est ce que nous allons montrer.

Prenons y_0 suffisamment petit pour que le point correspondant $x_0 = \varphi(y_0)$ se trouve dans le domaine (14), ce qui est possible d'après (13). $\varphi'(y)$ ne s'annulant pas pour $y = y_0$, la fonction inverse $\Phi(x)$ est régulière pour $x = x_0$. Prolongeons analytiquement $\Phi(x)$ à partir de x_0 jusqu'à un point x' le long d'une courbe C parcourant dans (14). Soit Γ la courbe correspondante dans le plan des y. Nous supposons que $\Phi(x)$ soit régulière en tout point de C sauf à l'extrémité x', et satisfasse aux inégalités (15) (où l'on pose $y = \Phi(x)$). Prenons une suite $\{x_n\}$ de points de C de manière que $x_n \to x'$ et $y_n = \Phi(x_n) \to y'$. Les inégalités (14) et (15) entraînent

$$|y'^{\beta+1}| \leqq r/H, \quad |\xi^{\alpha-1} y'^{\beta+1}| \leqq r/H.$$

Si nous prenons r assez petit de sorte que

$$r/H < \min\{\rho, \rho^{\beta+1}\},$$

les inégalités (11) seront remplies pour ξ, $y = y'$. ρ et r étant supposés assez petits, $f(x, y)$ est régulière pour (x', y') et, d'après le théorème d'unicité bien connu, $\Phi(x)$ est régulière pour $x = x'$. y' est donc une extrémité de Γ. Puisqu'on a (9) pour (ξ, y'), $\varphi(y)$ est régulière et satisfait aux inégalités (13) dans le voisinage de y'. $y = \Phi(x)$ satisfait donc aux inégalités (15) dans le voisinage de x'. D'après ce résultat nous pouvons énoncer la conclusion suivante, qui généralise le théorème de Boutroux-Malmquist.[1]

Théorème 1. *Si ξ est suffisamment petit, l'équation* (1) *admet une solution satisfaisant aux inégalités* (15) *dans le domaine assez petit* (14), *H et K étant des nombres quelconques satisfaisant aux inégalités* (4). *Cette solution se détermine d'une manière unique par la condition que sa fonction inverse converge vers ξ lorsque y tend vers 0 le long d'une demi-droite dont 0 est l'extrémité. Bien entendu, on doit prendre dans le voisinage de ξ une certaine branche déterminée (mais quelconque) de x^α.*

2. Nous étudions maintenant la solution de (1) satisfaisant à la condition $y(\xi) = \eta$. Pour cela nous prenons la solution de (3) satisfaisant à la même condition et la désignerons encore par $x = \psi(y)$. Elle s'écrit

$$\psi(y) = \xi[1 - (\alpha - 1)\ \mu\xi^{\alpha-1}\,(y^{\beta+1} - \eta^{\beta+1})]^{-1/(\alpha-1)}$$

si $\alpha \neq 1$ et

$$\psi(y) = \xi \exp \mu(y^{\beta+1} - \eta^{\beta+1})$$

si $\alpha = 1$. Si $y = \eta(1 - t)$ est un point du segment de droite joignant 0 et η, on a $0 \leqq t \leqq 1$ et

$$|y^{\beta+1} - \eta^{\beta+1}| \leqq |\eta^{\beta+1}|.$$

Si donc $\xi^{\alpha-1}\eta^{\beta+1}$ est suffisamment petit, on a les inégalités

$$H|\xi^\alpha \eta^{\beta+1}| \leqq |\psi(y) - \xi| \leqq K|\xi^\alpha \eta^{\beta+1}|,$$

la signification de H et K étant la même qu'au numéro précédent. Désignons encore par (7) l'équation en $u = x - \psi(y)$. La relation (8) reste valable. En supposant toujours que les nombres ξ, η et $\xi^{\alpha-1}\eta^{\beta+1}$ soient suffisamment petits et que y désigne un point quelconque du segment 0η, nous obtenons l'inégalité (9), puis l'inégalité (10) si $|u| \leqq \delta|\xi|$. L'équation différentielle

(1) J. Malmquist, loc. cit.

$$|\lambda|.\ dU/dt = (1+2\delta)^{\alpha-1}|\xi^{\alpha-1}\eta^{\beta+1}|(1-t)^{\beta}[aU+\varepsilon(1+2\delta)|\xi|]$$

admet une solution s'annulant pour $t=0$ qui s'écrit

$$U = \varepsilon(1+2\delta)a^{-1}|\xi|[\exp a(1+2\delta)^{\alpha-1}|\mu\xi^{\alpha-1}\eta^{\beta+1}|1-(1-t)^{\beta+1})-1].$$

On voit sans peine dans tous les cas

$$U \leqq \varepsilon K(1+2\delta)^{\alpha}|\xi^{\alpha}\eta^{\beta-1}|(1-(1-t)^{\beta+1}).$$

Si donc

$$\varepsilon K(1+2\delta)^{\alpha}|\xi^{\alpha-1}\eta^{\beta+1}| \leqq \delta,$$

la solution de (7) s'annulant pour $y=\eta$ satisfait à l'inégalité

$$|u| \leqq \varepsilon K(1+2\delta)^{\alpha}|\xi^{\alpha}\eta^{\beta+1}|.$$

Le coefficient $\varepsilon K(1+2\delta)^{\alpha}$ peut être remplacé par ε, car ε est un nombre positif que l'on peut supposer aussi petit que l'on veut. La solution x de (2) prenant la valeur η pour $x=\xi$ satisfait donc à l'inégalité

$$|x-\psi(y)| \leqq \varepsilon|\xi^{\alpha}\eta^{\beta+1}|.$$

Il en découle

$$|x-\xi| \leqq |x\,\psi(y)| + |\psi(y)-\xi|$$
$$\leqq (K+\varepsilon)|\xi^{\alpha}\eta^{\beta+1}|.$$

Ici encore le coefficient $K+\varepsilon$ peut être remplacé par K, car $K+\varepsilon$ peut être pris aussi voisin de $|\mu|$ que l'on veut. On peut en conclure la proposition suivante.(1)

Théorème 2. *Si ξ, η et $\xi^{\alpha-1}\eta^{\beta+1}$ sont assez petits, la solution de (1) prenant la valeur η pour $x=\xi$ s'annule en un point x_0 tel que*

$$|x_0-\xi| \leqq K|\xi^{\alpha}\eta^{\beta+1}|,$$

K désignant un nombre quelconque plus grand que $|\mu|$. La fonction inverse tend vers x_0 lorsque y s'approche de 0 le long du segment 0η.

3. Nous allons maintenant déduire des théorèmes 1 et 2 quelques conséquences importantes.

(1) Cf. J. Malmquist, loc. cit.

Théorème 3. *Si $\xi(\neq 0)$ est assez petit, une solution de* (1) *non identiquement nulle et s'annulant lorsque x tend vers ξ suivant une certaine courbe C dont ξ est l'extrémité n'est autre que la solution du théorème* 1, *c'est-à-dire sa fonction inverse converge vers ξ lorsque y s'approche de 0 le long d'une demi-droite dont 0 est l'extrémité.*

En effet, si l'on prend sur C un point ξ' assez voisin de ξ, et si l'on désigne par η' la valeur que prend la solution au point ξ', les nombres ξ', η' et $\xi'^{\alpha-1}\eta'^{\beta+1}$ sont assez petits. Donc, d'après le théorème 2, la solution s'annule en un point x_0 tel que

$$|x_0 - \xi'| \leq K|\xi'^{\alpha}\eta'^{\beta+1}|,$$

la fonction inverse convergeant vers x_0 lorsque y s'approche de 0 le long du segment $0\eta'$. Alors le théorème 1 montre que l'on a

$$|x - x_0| \leq K|x_0^{\alpha}y^{\beta+1}|$$

pour

$$|x - x_0| \leq r \min\{|x_0|, |x_0^{\alpha}|\}.$$

Ce domaine peut être supposé contenir le point ξ. Mais l'inégalité ci-dessus montre que y ne peut s'annuler qu'au point x_0. Le théorème est donc établi.

Théorème 4. *Si une solution $\varphi(x)$ de* (1) *s'annule en deux points ξ, ξ' assez voisins de* 0, *les domaines* (14) *et*

$$(16) \qquad 0 < |x - \xi'| < r \min\{|\xi'|, |\xi'^{\alpha}|\}$$

considérés sur la surface de Riemann de $\varphi(x)$ ne contiennent aucun point commun pourvu que r soit assez petit.

En effet, le théorème 3 montre que l'on peut appliquer le théorème 1 à la solution $y = \varphi(x)$. Alors la deuxième des inégalités (15) montre que $\varphi(x)$ ne s'annule pas dans le domaine (14). Par suite le domaine (14) ne contient pas ξ'.(1) De même le domaine (16) ne contient pas ξ. Alors les deux domaines

$$0 < |x - \xi| < (r/2) \min\{|\xi|, |\xi^{\alpha}|\},$$

(1) ξ' étant un point singulier de $\varphi(x)$, il n'est pas un point de la surface de Riemann. Donc, pour être rigoureux, on doit dire que le domaine (14) ne contient pas de chemin définissant le point singulier ξ'.

$$0 < |x - \xi'| < (r/2) \min \{|\xi'|, |\xi'^{\alpha}|\}$$

ne contiennent aucun point commun.

En effet, s'il existait un point commun de ces deux domaines et si $|\xi| \geq |\xi'|$, le domaine (14) contiendrait le point ξ'.

Théorème 5[2]. *Soit $\varphi(x)$ une solution de* (1). *Nous associons à chaque point $\xi(\neq 0)$, où $\varphi(x)$ s'annule, un domaine $D(\xi)$ (sur la surface de Riemann de $\varphi(x)$) défini par* (14). *A l'extérieur de ces domaines sur la surface de Riemann de $\varphi(x)$ on a*

$$|y| > \sigma \min \{1, |x^{\gamma}|\} \qquad (\gamma = (1-\alpha)/(\beta+1))$$

pour $0 < |x| < \delta$, σ et δ étant des nombres positifs assez petits. On peut supposer deux des domaines $D(\xi)$ n'avoir aucun point commun.

Soit en effet, x_0 $(0 < |x_0| < \delta)$ un point quelconque à l'extérieur des domaines $D(\xi)$. Supposons que la valeur $y_0 = \varphi(x_0)$ satisfasse à l'inégalité

$$|y_0| \leq \rho \min \{1, |x_0^{\gamma}|\},$$

qui est équivalente à

$$|y_0| \leq \rho, \quad |x_0^{\alpha-1} y_0^{\beta+1}| \leq \rho' = \rho^{\beta+1}.$$

δ et ρ étant supposés assez petits, le théorème 2 montre qu'il existe dans le domaine

$$|x - x_0| \leq K |x_0^{\alpha} y_0^{\beta+1}|$$

un point ξ où $\varphi(x)$ s'annule. Le domaine $D(\xi)$ ne contenant pas x_0, on doit avoir

$$K |x_0^{\alpha} y_0^{\beta+1}| \geq r \min \{|\xi|, |\xi^{\alpha}|\}.$$

Or, on a

$$|\xi| \geq |x_0| - K |x_0^{\alpha} y_0^{\beta+1}| \geq (1 - K\rho') |x_0|.$$

Donc

$$\min \{|\xi|, |\xi^{\alpha}|\} \geq (1 - K\rho') |x_0|$$

si $\alpha = 1$, et

$$\min \{|\xi|, |\xi^{\alpha}|\} \geq (1 - K\rho')^{\alpha} |x_0^{\alpha}|$$

si $\alpha > 1$. Par suite

$$|y_0| \geq A_{\rho} \min \{1, |x_0^{\gamma}|\},$$

où

$$A_{\rho}^{\beta+1} = r \min \{(1 - K\rho')/K, (1 - K\rho')^{\alpha}/K\}.$$

On peut alors prendre $\sigma = \min \{\rho, A_{\rho}\}$.

(2) Cf. J. Malmquist, loc. cit.