論文の内容の要旨

論文題目：**THE $(\mathfrak{g}, K)$-MODULE STRUCTURE OF PRINCIPAL SERIES AND RELATED WHITTAKER FUNCTIONS OF $SU(2,2)$**

（和訳・$SU(2,2)$ の主系列の $(\mathfrak{g}, K)$-加群構造と関連する WHITTAKER 関数）

名前: GOMBODORJ BAYARMAGNAI

ここ数十年間で，整数論，微分方程式論，数論幾何，および保型形式の理論と関連し，表現論は現代の数学における中心的役割を果たしてきた．特に Whittaker 模型は保型形式の尖点における Fourier 展開の理論において基本的であり，Whittaker 関数の知識は保型形式の深い研究にとても重要となる．

本論文では群 $G = SU(2,2)$ の主系列表現に対して，この問題を扱う．

目的 (π, H_π) を G の既約主系列表現とする．π は極小放物型部分群 P_{min} から誘導された誘導表現である．$P_{min} = MAN$ を P_{min} の Langlands 分解とする．N の連続ユニタリ指標 η: $N \to U(1)$ に対し，$C_\eta^\infty(N\backslash G)$ を

$$\text{任意の } n \in N \text{ と } g \in G \text{ に対し，} f(ng) = \eta(n)f(g)$$

を満たす関数 f 全体のなす $C^\infty(G)$ の部分空間とする．これは，右作用で G 加群となる．$C_\eta^\infty(N\backslash G)$ を $(\mathfrak{g}, K)$-加群（K は G の極大コンパクト部分群で，$\mathfrak{g}$ は G の Lie 環）としてみると，次の自然な写像が得られる．

$$\mathrm{Hom}_G(H_\pi^\infty, C_\eta^\infty(N\backslash G)) \to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(H_\pi|_K, C_\eta^\infty(N\backslash G)) \tag{1}$$

ただし，H_π^∞ は H_π の C^∞ ベクトル全体である．この右辺は Kostant により導入された代数的 Whittaker ベクトルの空間で，本論文での主要な研究対象である．(1) の両辺を明示的に理解することが本論文の目的であり，そのためには良い基底が必要となる．

(1) の左側に関し，H. Jacquet は H_π^∞ 上のある汎関数で，π から $C_\eta^\infty(N\backslash G)$ への絡作用素を定めるものを定義した．Shalika のアルキメデス的素点における局所重複度 1 定理により，このような汎関数は定数倍を除き一意に定まる．Wallach はこの Shalika の定理をより精密にし，任意の既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 π_∞ に対し，絡作用素空間 $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_\infty, \mathcal{A}_\eta(N\backslash G))$ は高々1 次元となることを示した．ここで，$\mathcal{A}_\eta(N\backslash G)$ は急減少条件を満たす関数全体のなす $C_\eta^\infty(N\backslash G)$ の部分空間である．

結果 1. まず私は，G の主系列表現の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群としての構造を完全に決定した．π の K-有限ベクトル全体のなす空間上への，$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の作用を記述する際に重要な役割を果たす "marked basis" の概念を導入した．また，この基底を $L^2_{(M,\sigma)}(K)$ の元として記述した．ここで，

$$\begin{aligned} L^2_{(M,\sigma)}(K) = \quad & \{f \in L^2(K) \mid \\ & \quad f(mk) = \sigma(m)f(k) \ (m \in M,\, k \in K,\, \text{a.e.})\} \end{aligned}$$

は $L^2(K)$ の閉部分空間で，π の表現空間を与える．

Lemma 1. τ を既約 K-加群とし，π の τ 成分を $H_\pi(\tau)$ とおく．これは $L^2_{(M,\sigma)}(K)$ の部分空間である．このとき，$\alpha = 1, 2, \ldots, [\pi|_K : \tau]$ に対し，部分空間 $W_\alpha \subset H_\pi(\tau)$ と部分集合 $B_\alpha = \{f_{\alpha 1}, \ldots, f_{\alpha n}\} \subset W_\alpha$ であって，次を満たすものが存在する．

$$\begin{cases} W_\alpha \simeq \tau \\ \text{この同型のもとで } f_{\alpha 1}, \ldots, f_{\alpha n} \text{ は } \tau \text{ の標準基底に対応する．} \\ H_\pi(\tau) = \sum_\alpha W_\alpha,\ f_{\alpha j}(1) = \delta_{\alpha j}. \end{cases}$$

ここで $n = \dim(\tau)$ とおいた．

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする．$\mathfrak{p}$ の複素化を $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ とかく．K の随伴作用により $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ は正則部分 $\mathfrak{p}_+$ と非正則部分 $\mathfrak{p}_-$ とに既約分解される．本論文の主結果は

$$\mathcal{C}_{[\pm,\pm;\pm]}\mathbf{S}^{(m)} = \mathbf{S}^{(m')}\Gamma_{[\pm,\pm;\pm]},$$

という形の式で書かれる．ここで $\mathbf{S}^{(m)}$ は上の補題の中の関数 $f_{\alpha j}$ を成分とする行列であり，また $\mathcal{C}_{[\pm,\pm;\pm]}$ は $\mathfrak{p}^+$ または $\mathfrak{p}^-$ の元を成分にもつある行列，$\Gamma_{[\pm,\pm;\pm]}$ は表現のパラメータ達の線形結合を成分を持つ定数行列である．Casimir 作用素 $\mathcal{C}$ における Casimir 方程式

$$\mathcal{C}v = \gamma(\mathcal{C})v$$

を思い出そう．ここで，γ は無限小指標で，v は C^∞ ベクトルである．我々の公式はこれの "covariant" 類似である．

結果 2. 次に私は，G 上の Whittaker 関数を調べた．保型 L-関数の Γ-因子の明示式などを初めとする数々の応用の中で，Whittaker 関数の明示的な積分表示はとても重要である．我々の公式は G の標準主系列表現の代数的 Whittaker ベクトルの空間の基底の原点周りにおける明示公式を与える．

$M^* = N_K(\mathfrak{a})$ とすると，$W(A) = M^*/M$ は G の小 Weyl 群となる．$s \in W(A)$ を最長元とし，その M^* への持ちあげを s^* とする．Jacquet は H_π^∞ 上の連続汎関数で，$J_{\sigma,\nu}(\pi(n)f) = \eta(n)J_{\sigma,\nu}(f)$, を満たすものを

$$J_{\sigma,\nu}(f) = \int_N \eta(n)^{-1} a(s^*n)^{\nu+\rho} f(k(s^*n))dn$$

により定義した．ここで，f は $L^2_{(M,\sigma)}(K)$ における C^∞ ベクトルである．C^∞ ベクトル $f \in L^2_\sigma(K)$ に対し，$C^\infty_\eta(N\backslash G)$ の元 $J_f(g)$ を

$$J_f(g) = J_{\sigma,\nu}(\pi(g)f),\ (g \in G).$$

と定義する．関数 $J_f(g)$ は G 上緩増大で，とくに A 上でも緩増大である．

本論文において，π の中の特殊な K-type τ に属する f に対し，$J_f(g)$ の A 動径成分における明示的公式を与えた．その結果は

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{\nu_1+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}+1)\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+1)} \times$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty K_{\frac{\nu_1}{2}}\left(2y_2\sqrt{\frac{(1+x)(1+y)}{xy}}\right) K_{\frac{\nu_2}{2}}\left(2y_1\sqrt{1+x+y}\right)$$

$$\left(\frac{x(1+x)}{y(1+y)}\right)^{\frac{\nu_1}{4}} \left(\frac{x^2y^2}{1+x+y}\right)^{\frac{\nu_2}{4}} \frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

である．これは $(y_1, y_2) \in A$ のそれぞれの変数に関して無限遠で急減少する．このように，modified Bessel 関数により表すことができたことを用いて，, Mellin-Barnes 積分表示を得た．この結果を用いて，0 の周りの代数的 Whittaker ベクトルの空間の生成元の明示的公式を得た．