論文の内容の要旨

論文題目: Inverse Source Problems for Diffusion Equations and Fractional Diffusion Equations

(拡散方程式及び非整数階拡散方程式に対するソース項決定逆問題)

氏名: 坂本健一

本学位申請論文では拡散方程式及び非整数階拡散方程式に対して, 解に関する観測データから空間分布のソース項を決定する逆問題を考察した. ここで, 非整数階拡散方程式とは時間方向の微分階数が 1 とは限らない方程式を意味する. 主目標は, この逆問題の適切性, すなわち解の一意存在と安定性を示すことである.

地下水汚染や土壌汚染等の環境問題において拡散方程式は基本的な支配方程式であり, そのソース項にあたる汚染発生源分布をある限られた観測データにより予測することは極めて重要な課題である.

古典的な拡散方程式に対して, 関連した逆問題についてすでに研究成果があるが, 本論文においては, 第一部として, 第 1, 2 章において, 古典的な拡散方程式に関して, 現実の観測手法をよく反映しているものと考えられる 2 種類の観測データを新たに定式化し, その下での逆問題のパラメータに関する一般的な適切性などを確立した. 第二部において, 逆問題の考察に当たって, 土壌汚染などにおける拡散現象のよりよいモデル方程式に関する考察から始めた. 最近のさまざまな実験により, 土壌などの不均質媒体中における拡散現象では, 密度の時間に関する減衰が遅いなどの異常拡散現象がしばしば観察され, これまでの古典的な移流拡散方程式では十分に再現できないことが確認されている. そのような異常拡散を記述するモデルとして時間に関して非整数階の拡散方程式が提案されており, 夥しい研究成果があるものの逆問題に関する成果はほとんどない. 第二部である第 3, 4, 5 章において, ソース項決定の逆問題に関して一意性や安定性などを証明した. すなわち第 3 章において, この方程式の順問題に対して解の適切性及び漸近

挙動を得て, その応用として非整数階の拡散方程式の境界値の解の一意性や時間逆向きの問題の適切性を証明した. 第 4, 5 章では, 第 3 章の結果を用いて, この非整数階拡散方程式に対して 2 種類のソース項決定逆問題の適切性を確立した.

以下, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし, $I \subset (0, \infty)$ は任意に固定された開区間とする.

第 1 章の内容

本章では, 拡散係数 $\frac{1}{r}$ をパラメータに含んだ拡散方程式を考察した：

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \dfrac{1}{r}\Delta u(x,t) + f(x)h(x,t), & x \in \Omega,\, t \in (0,T), \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0,T). \end{cases}$$

ここで, h は既知であり, f を決定するべきソース項における未知関数と仮定している. 観測データとして,

$$\varphi_1(x) := \int_0^T \rho(x,t)u(x,t)dt, \quad x \in \overline{\Omega}$$

を用いた. ここで ρ は与えられた関数である. この観測は, 各点 $x \in \overline{\Omega}$ での時間区間における u の平均データとして解釈できる. 既存の論文においては, ρ が x に依存しない t のみの関数であるという仮定の下に, 領域が十分に小さい場合にこの逆問題は適切であるという結果が証明されていたに過ぎない. 既存の研究におけるこの仮定は, センサーが空間の点によらない一様なものであることを要求しているが, 本論文第 1 章においては, 例えば領域内を動き回る小さなセンサーも考察することができる. さらに拡散パラメターの導入により, 領域が小さくない場合にも r に関して「一般的に」(generically) この逆問題が適切であることを本章の主要定理として証明し, あわせて適切性が破れる例外的な r の集合 E_1 が必ずしも空集合にはならないことを示した:

定理 1. h, ρ は十分滑らかとする. 作用素

$$Mf = \int_0^T \rho(\cdot,t)(-\Delta)^{-1}(h(\cdot,t)f)dt$$

に対して $M^{-1} \in \mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ とする. そのとき有限集合 $E_1 \subset I$ が存在し, $r \in I \setminus E_1$ および $\varphi_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して, 逆問題の一意解 $\{u(r,f), f\}$ が存在し, 次の安定性が成立する：正定数 $C_1 > 0$ が存在して,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u(r,f)\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|u(r,f)\|_{C^1([0,T];L^2(\Omega))} \le C_1\|\varphi_1\|_{H^2(\Omega)}.$$

第 2 章の内容

本章では, 第 1 章と同様の方程式を扱った. ただし, $r = 1$ とおいた. 観測データは, $\varphi_2(x) := u(x, \gamma(x))$, $x \in \overline{\Omega}$ である. ここで $\gamma(x)$ は与えられた関数である. この観測方法は, 第 1 章で用いた観測と異なり, それぞれの点 $x \in \overline{\Omega}$ ごとに定まる時刻 $\gamma(x)$ における u の瞬間データとして解釈できる. 以下の定理を示した.

定理 2. $0 < \lambda < 1$ であって, h, γ は十分滑らかとし, すべての $x \in \overline{\Omega}$ に対して, $0 < \gamma(x) \le T$ かつ $|h(x, \gamma(x))| > 0$ が満たされるとする. このとき次のどちらかが成立する.
(i) $\varphi_2|_{\partial\Omega} = 0$ を満たす $\varphi_2 \in C^{2+\lambda}(\overline{\Omega})$ に対して, 逆問題の一意解 $\{u(f), f\} \in C^{2+\lambda, 1+\frac{\lambda}{2}}(\overline{\Omega} \times [0, T]) \times C^{\lambda}(\overline{\Omega})$ が存在する.
(ii) $\varphi_2 \equiv 0$ に対して, $u \not\equiv 0$ かつ $f \not\equiv 0$ を満たす逆問題の解 $\{u(f), f\}$ が存在する.

この定理 2 により, もし解の一意性のみを示せたならば, 逆問題の解の一意存在を $\varphi_2|_{\partial\Omega} = 0$ を満たす任意の $\varphi_2 \in C^{2+\lambda}(\overline{\Omega})$ に対して結論づけることができることを示しており, これは Fredholm の択一定理に相当する性質である. 拡散係数 $\frac{1}{r}$ をパラメータとして第 1 章の定理 1 と類似の定理を証明することも可能である.

第 3 章の内容

本章では, $0 < \alpha < 2$ として次の非整数階拡散方程式の解の固有関数展開による表現を Fourier の方法で求め, それを用いて解に関するいくつかの基本的な結果を得た.

$$\begin{cases} {}^{c}D_t^{\alpha} u(x,t) = (Lu)(x,t) + F(x,t), \quad x \in \Omega, t \in (0,T), \\ \quad u(x,0) = a(x), \quad x \in \Omega, \\ \quad u_t(x,0) = b(x), \quad x \in \Omega, \quad (1 < \alpha < 2 \text{ の場合のみ課す}) \\ \quad u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in (0,T). \end{cases}$$

ここで, ${}^{c}D_t^{\alpha}$ は Caputo 微分とよばれる非整数階微分であり, Γ をガンマ関数として, 次のように定義される:

$${}^{c}D_t^{\alpha} g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} g(\tau) \mathrm{d}\tau, \quad n-1 < \alpha < n, \ n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n}{dt^n} g(t), \quad \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

さらに F, a, b は既知関数, L は対称な 2 階の楕円型作用素で 0 階項の係数が非正値関数とする. 本章で解の固有関数展開に基づいてこの初期値・境界値問題の解の一意存在及び安定性を得た.

定理 3. $0 < \alpha < 1$, $a \in L^2(\Omega)$, $F \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ とする. そのとき一意解 $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C((0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ が存在し, ある正定数 $C_2 > 0$ に対し,

$$\|u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \le C_2(\|a\|_{L^2(\Omega)} + \|F\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}).$$

さらに $a \in H_0^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ならば, 正定数 $C_3 > 0$ が存在して,

$$\|u\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|{}^{c}D_t^{\alpha} u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \le C_3(\|a\|_{H^2(\Omega)} + \|F\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}).$$

系 1. $0 < \alpha < 1$, $a \in L^2(\Omega)$, $F = 0$ とする. このとき, 定理 3 の解は $u \in C^{\infty}((0,T); L^2(\Omega))$ を満たす. また, 正定数 $C_4 > 0$ と $\lambda_1 > 0$ が存在して, す

べての $t \geq 0$ に対して

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_4}{1+\lambda_1 t^\alpha}\|a\|_{L^2(\Omega)}.$$

定理 4. $1<\alpha<2$, $a \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $b \in H_0^1(\Omega)$, $F \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$ とする．このとき一意解 $u \in C([0,T];H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T]:L^2(\Omega))$ が存在し, ある正定数 $C_5>0$ に対して

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^1([0,T];L^2(\Omega))} + \|u\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|{}^cD_t^\alpha u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \\ \leq C_5\{\|a\|_{H^2(\Omega)} + \|b\|_{H^1(\Omega)} + \|F\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}\}.\end{aligned}$$

系 2. $1<\alpha<2$, $a \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $b \in H_0^1(\Omega)$, $F=0$ とする．このとき、定理 4 の解は $u \in C^\infty((0,T);L^2(\Omega))$ を満たす．また正定数 $C_6, C_7>0$ が存在して、すべての $t \geq 0$ に対して,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_6}{1+\lambda_1 t^\alpha}\{\|a\|_{L^2(\Omega)} + t\|b\|_{L^2(\Omega)}\}$$

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_7}{1+\lambda_1 t^\alpha}\{t^{\alpha-1}\|a\|_{H^2(\Omega)} + \|b\|_{L^2(\Omega)}\}.$$

第 4 章の内容

本章では $0<\alpha<1$ として, パラメター r^α を含む非整数階拡散方程式を考察した.

$$\begin{cases} {}^cD_t^\alpha u(x,t) = r^\alpha(Lu)(x,t) + f(x)h(x,t), & x \in \Omega, t \in (0,T), \\ u(x,0)=0, & x \in \Omega, \\ u(x,t)=0, & x \in \partial\Omega, t \in (0,T). \end{cases}$$

L は3章の同様の楕円型作用素とし, h が既知関数で f が未知関数であるとする. 観測としては, 終端値におけるデータを考える：

$$\varphi_3(x) := u(x,T), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

以下の定理を示した.

定理 5. h は十分滑らかとし, $|h(x,T)|>0$, $x \in \overline{\Omega}$ とする．このとき, ある有限集合 $E_2 \subset I$ が存在し, $r \in I \setminus E_2$ および $\varphi_3 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ に対して, 逆問題の一意解 $\{u(r,f), f\}$ が存在し, ある正定数 $C_8>0$ に対し,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u(r,f)\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|{}^cD_t^\alpha u(r,f)\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq C_8\|\varphi_3\|_{H^2(\Omega)}.$$

第 5 章の内容

本章では, 第 4 章で扱った方程式の $L=\Delta$ の場合に対して, 第 1 章の観測方法による逆問題を考察し, 第1章と同様にして r に関する一般的な適切性が非整数階拡散方程式に対しても成立することを証明した.