論文の内容の要旨

論文題目：Brauer groups, Mackey and Tambara functors on profinite groups, and 2-dimensional homological algebra
(Brauer 群、プロ有限群上の Mackey 及び丹原関手 と 2 次元ホモロジー代数)

氏名：　中岡　宏行

Brauer 群を中心に、それに関連する圏と関手について論じた。

第１部では、体の有限ガロア拡大に対応する Brauer 環について調べている。

1986 年、Jacobson により Brauer 環の概念が定義された [5]。任意の有限ガロア体拡大に対して、Brauer 環は Brauer 群を乗法群の部分群にもつ可換環であり、Mackey 関手を用いた解析が可能である。(Brauer 環は F-Burnside 環と呼ばれる典型的な Mackey 関手で表すことができる。)

このことは、 Brauer 群・ガロア理論・Mackey 関手の三対象の背後に緊密な関係があることを暗示している。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \text{Brauer 群} \arrow[rr, dash] \arrow[dr, dash] & {\scriptstyle \exists ?}\text{関係} & \text{Mackey 関手} \arrow[dl, dash] \\ & \text{Galois 理論} & \end{tikzcd}$$

Brauer 群を調べるために定義された Brauer 環だが、体拡大が自明な場合を除き、その構造を与える明示公式は存在しなかった。第１部では、Brauer 環の Mackey 関手としての側面を詳しく調べ、関連する随伴性を用いて明示公式を与え、その構造決定を行った。

具体的には、G をガロア群にもつ有限次 Galois 体拡大 E/F に付随する Brauer 環 $B(E,F)$ の構造は以下のように決定される：

$$B(E,F) \cong (\bigoplus_{H \le G} \mathbb{Z}[\mathrm{Br}(E^H)])/(I(\mathbb{Z}[G]) \cdot \bigoplus_{H \le G} \mathbb{Z}[\mathrm{Br}(E^H)])$$

例えば $B(\mathbb{C},\mathbb{R})$ は、$B(\mathbb{C},\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}[X,Y]/(X^2-1, Y^2-2Y, XY-Y)$ と計算できる。

Brauer 群・ガロア理論・Mackey 関手 の三者のより明示的な関係として、Ford による結果がある [4]。Ford は、群 G をガロア群にもつ可換環の有限ガロア拡大に対して、中間にある拡大環の Brauer 群が、G 上のコホモロジカル Mackey 関手をなすことを示した。Mackey 関手は、いわゆる両変 (bivariant) 関手であり、関手のもつ共変性 (Brauer 群ではノルム写像) と反変性 (Brauer 群では pull-back) を統一的に扱うことを可能にする。

第２部では、スキームの有限次ガロア被覆に対し、Brauer 群がガロア群上のコホモロジカル Mackey 関手をなすことを示した。これは Ford の結果 [4] のスキームへの一般化となっている。

より強く、有限エタール被覆のなすガロア圏を用い、ガロア圏上の Mackey 関手として “Brauer-Mackey 関手” を構成している。ガロア圏を用いることで構成がより自然になり、スキームのエタール被覆の Brauer 群たちを単一の統合的対象として扱うことができる。Fundamental functor でうつすことで基本群上のコホモロジカル Mackey 関手が得られ、さらに有限群に「制限」することにより、有限ガロア被覆に対する上記の結果を得られる。

Mackey functor はもともと有限群の表現論で考案されたものだが、 現在では群 G に対する G-同変理論での Abel 群のアナロジーと考えられている。 この文脈のもと、可換環の G-同変類似物は丹原関手 (Tambara functor) であると考えられている [9]。すなわち丹原関手とは、適切な条件を満たす Mackey 関手のペア (それぞれ加法・乗法に相当) であり、Mackey 関手より多様な構造を持つ。

Witt-Burnside 構成に関する最近の研究の中で、Brun により丹原関手の有用性が明らかにされた [2]。Brun は同論文において、適切な条件下で Witt(-Burnside) 環が丹原関手を用いて記述されることを示している。

Witt-Burnside 構成自体はプロ有限群上で可能なものであるが、Brun による結果は有限群の場合に限っている。G がプロ有限の場合に拡張できていない原因として, そもそもプロ有限群上での丹原関手が定義されていなかった点が挙げられる。

第 3 部において、Witt-Burnside 環の丹原関手的解釈を目標に、プロ有限群上での丹原関手の定義を行った。Bley, Boltje により定義された Mackey system [1] を用い、有限群の場合の一般化となるよう定義した。

この定義のもと、吉田知行教授の定義した一般 Burnside 環 (generalized Burnside ring) に丹原関手の構造を与えており、また、Witt-Burnside 構成に関連して、Elliott の定義した関手 $\mathbf{V}_M$ に丹原関手の構造を与えた。Elliott の関手は任意のモノイド M に対し定義され、その商がモノイドの群環係数の Witt-Burnside 環に一致する [3]。

Symmetric monoidal category の Brauer 群の研究の中で、Vitale 達は symmetric categorical group のなす 2-圏 SCG を用いることで、Brauer 群について「ホモロジカル」で「2-categorical」な議論を行った ([6], [7])。特に [6] においては、SCG の持つ Ab の 2 次元版ともいうべき代数構造が有効に用いられている。第 4 部では、これらの論文を包括する形での「2 次元ホモロジー代数」を扱う一般的枠組みを構成している。

References

[1] W. Bley, R. Boltje, Cohomological Mackey functors in number theory, *J. Number Theory* **105** (2004), 1-37.

[2] M. Brun, Witt vectors and Tambara functors, *Adv. in Math.* **193** (2005), 233-256.

[3] J. Elliott, Constructing Witt-Burnside rings, *Adv. in Math.* **203** (2006) 319-363.

[4] T. J. Ford, Hecke actions on Brauer groups, *J. Pure Appl. Algebra* 33 (1984), 11-17.

[5] E.T. Jacobson, The Brauer ring of a field, *Illinois J. Math.* **30** (1986), 479–510.

[6] A. del Río, J. Martínez-Moreno, E. M. Vitale, Chain complexes of symmetric categorical groups, *J. Pure Applied Algebra* **196** (2004), 279-312.

[7] E. M. Vitale, A Picard-Brauer exact sequence of categorical groups, *J. Pure Applied Algebra* **175** (2002), 383-408.

[8] D. N. Yetter, Functorial knot theory, *Series on Knots and Everything* Vol. 26, World Scientific, 2001.

[9] T. Yoshida, Polynomial rings with coefficients in Tambara functors (Japanese) (Kyoto, 2006). *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku* No. 1466 (2006), 21–34.