

## *Problème de Cauchy Caractéristique à Solution Entière*

By Patrice PONGÉRARD

**Abstract.** For a Fuchsian differential operator with order  $m$  and weight  $p \in [0, m]$  in the sense of M. S. Baouendi and C. Goulaouic, we approach the study of the Cauchy problem in entire functions spaces. This article is mainly based on the fixed-point theorem in a Banach space defined by a majorant function with two variables that is suitable to this kind of operator. The proposed method allows one to generalize a H. Yamane theorem and to give the order of the solution ; when  $p = m$ , we find again the well-known theorems.

Dans un travail antérieur [5], nous avons simplifié la résolution du problème de Cauchy dans des espaces de fonctions entières lorsque les données de Cauchy sont portées par un hyperplan uniformément non caractéristique. L'objet de cet article est d'étendre les conclusions de [5] à un opérateur différentiel fuchsien d'ordre  $m$  et de poids  $p \in [0, m]$  au sens de M. S. Baouendi et C. Goulaouic [1]. Indiquons que H. Yamane [8] a étudié cette question mais les résultats obtenus ne coïncident pas avec ceux de [5] lorsque  $p = m$ .

On se ramène d'abord à une unique équation fuchsienne de poids nul que l'on peut écrire sous la forme  $u = \mathcal{A}u + v$  (voir (1.5)). On considère un espace de Banach défini par une fonction majorante à deux variables obtenue à partir de la fonction majorante  $\phi(\xi) = e^{\alpha\xi} \frac{1}{R-\xi}$ , introduite dans [5], à laquelle on applique la transformée de [7] adaptée à ce type d'équation. On fournit alors une majoration précise de la norme de l'endomorphisme continu  $\mathcal{A}$  de cet espace de Banach : il s'agit de la proposition essentielle de cet article (proposition 1.6).

Dans la première partie, on en déduit l'holomorphie de la solution  $u$  sur  $\Omega \times \mathbf{C}_x^n$ , où  $\Omega$  est un voisinage ouvert de  $t = 0$ . Ensuite, au voisinage de tout point  $t \neq 0$ , on rencontre un problème de Cauchy-Kowalevski à coefficients holomorphes dans  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}_x^n$  ; en se ramenant alors à un lemme de [5], on

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35A05; Secondary 35A20, 35A10.

constate que la solution de ce problème est holomorphe dans  $\Omega(t) \times \mathbf{C}_x^n$  où  $\Omega(t)$  est un voisinage ouvert de  $t$  dont le diamètre dépend continuellement de  $t$  dans  $\mathbf{C}^*$  et, par des techniques élémentaires de prolongement analytique, on montre que le domaine de convergence de  $u$  est égal à  $\mathbf{C}^{n+1}$ .

Dans la seconde partie, on déduit encore de la proposition 1.6 que  $u$  est une fonction entière d'ordre fini sous des hypothèses analogues à celles du théorème 2.5 de [5].

La méthode proposée permet de généraliser (hypothèse (1.2)-remarque 1.8) le théorème 1 de [8] ; elle permet aussi de préciser ses conclusions concernant l'ordre de la solution. Enfin, lorsque  $p = m$ , on retrouve bien [5].

Je remercie Claude Wagschal qui m'a adressé un preprint de l'article [8].

## A. Solution Entière

### 1. Solution au Voisinage de $t = 0$

Les coordonnées d'un point  $(t, x)$  de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  seront notées  $(t, x_1, \dots, x_n)$ . L'opérateur de dérivation par rapport à la variable  $t$  (resp.  $x_j$ ) sera noté  $D_t$  (resp.  $D_j$ ) et nous poserons  $D_t^l$  et  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$  pour tout  $l \in \mathbf{N}$  et tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ . Étant donné un entier  $m \geq 1$  et un entier  $0 \leq p \leq m$ , on considère une partie principale fuchsienne d'ordre  $m$  et de poids  $p$

$$a(t, D_t) = \sum_{l=p}^m a_l t^{l-p} D_t^l, \quad a_m \in \mathbf{C}^*,$$

où l'on suppose que  $a_l$ ,  $p \leq l < m$ , est une constante complexe. On associe à cet opérateur le polynôme d'indéterminée  $T$

$$\mathcal{P}(T) = \sum_{l=p}^m a_l \prod_{k=0}^{l-1} (T - k)$$

où l'on convient que  $\prod_{\emptyset} = 1$  ; on obtient la relation  $t^p a(t, D_t) = \sum_{l=p}^m a_l t^l D_t^l = \mathcal{P}(tD_t)$  et  $\mathcal{P}(tD_t)$  est une partie principale fuchsienne de poids 0. Pour tout  $l \in \mathbf{N}$ , on notera  $\nu \equiv \nu(l)$  l'entier

$$\nu = \max(p - l - 1, 0).$$

On considère le problème de Cauchy

$$(1.1) \quad \begin{cases} a(t, D_t)u(t, x) = \sum_{\substack{l+|\alpha| \leq m \\ l < m}} a_{l\alpha}(t, x)t^{\nu+1+l-p}D_t^l D^\alpha u(t, x) + v(t, x), \\ D_t^h u(0, x) = w_h(x), \text{ pour } 0 \leq h < p, \end{cases}$$

où l'hypothèse sur les coefficients  $a_{l\alpha}$  est

$$(1.2) \quad \begin{cases} \text{pour } l + |\alpha| < m, a_{l\alpha} \text{ est une fonction entière,} \\ \text{pour } l + |\alpha| = m, a_{l\alpha} \text{ est un polynôme en } x \text{ de degré } \leq |\alpha| \\ \text{dont les coefficients sont des fonctions entières dans } \mathbf{C}_t. \end{cases}$$

On a alors le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.1.** *Si  $\mathcal{P}(k) \neq 0$  pour tout entier  $k \geq p$ , alors, pour toutes fonctions entières  $w_h, v$ , le problème (1.1) admet une unique solution entière  $u$ .*

**RÉDUCTION.** En cherchant la solution de (1.1) sous la forme  $\sum_{h=0}^{p-1} \frac{t^h}{h!} w_h(x) + t^p u(t, x)$  et en utilisant la relation

$$t^p a(t, D_t)t^p u = \mathcal{P}(tD_t)t^p u = t^p \mathcal{P}(tD_t + p)u,$$

on constate que le problème de Cauchy (1.1) est équivalent à une équation de la forme

$$(1.3) \quad \mathcal{P}(tD_t)u = \sum_{\substack{l+|\alpha| \leq m \\ l < m}} a_{l\alpha} t^{\nu+1+l-p} D_t^l t^p D^\alpha u + v,$$

où les coefficients  $a_{l\alpha}$  demeurent inchangés, l'hypothèse (1.2) est donc conservée, et  $\mathcal{P}(tD_t)$  est une partie principale fuchsienne de poids 0 vérifiant  $\mathcal{P}(k) \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ .

**LEMME 1.2.** *a. Il existe un réel  $c_0 > 0$  tel que  $|\mathcal{P}(k)| \geq c_0 \max(1, k^m)$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ .*

b. Soit  $\Omega$  un disque ouvert centré à l'origine de  $\mathbf{C}_t$  ; l'opérateur  $\mathcal{P}(tD_t)$  est un automorphisme de  $\mathcal{H}(\Omega \times \mathbf{C}_x^n)$  ; son inverse  $\mathcal{Q}$  est défini par

$$(1.4) \quad (\mathcal{Q}u)(t, x) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{t^k D_t^k u(0, x)}{k! \mathcal{P}(k)}.$$

PREUVE. a. On peut écrire  $\mathcal{P}(k) = \sum_{l=0}^m a_l k^l$  où  $a_l \in \mathbf{C}$  et  $a_m \neq 0$ . Il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , on ait  $k^{-m} |\mathcal{P}(k)| = \left| \sum_{l=0}^m a_l (k^{-1})^{m-l} \right| \geq c > 0$  car la fonction continue  $\mu \mapsto \sum_{l=0}^m a_l \mu^{m-l}$  ne s'annule pas sur le compact  $\{k^{-1}; k \in \mathbf{N}^*\} \cup \{0\}$  par hypothèse. On conclut en prenant  $c_0 = \min(c, |\mathcal{P}(0)|)$ .

b. Soit  $u \in \mathcal{H}(\Omega \times \mathbf{C}_x^n)$ , vu que  $(tD_t)^l t^k = k^l t^k$  pour tout  $k, l \in \mathbf{N}$ , on a  $\mathcal{P}(tD_t)u(t, x) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{t^k}{k!} \mathcal{P}(k) D_t^k u(0, x)$  dans  $\Omega \times \mathbf{C}^n$  ce qui montre que  $\mathcal{P}(tD_t)$  est injectif car  $\mathcal{P}(k) \neq 0$  ; son inverse est donné par la série formelle  $\mathcal{Q}u = \sum_{(k, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n} \frac{D_t^k D^\alpha u(0)}{k! \alpha! \mathcal{P}(k)} t^k x^\alpha$  qui est, comme la série de Taylor de  $u$  en 0, absolument convergente pour tout  $(t, x) \in \Omega \times \mathbf{C}^n$  puisque  $|1/\mathcal{P}(k)| \leq 1/c_0$ , d'où le lemme.  $\square$

En remplaçant  $u$  par  $\mathcal{Q}u$  dans l'équation (1.3), on peut écrire le problème de Cauchy (1.1) sous la forme réduite

$$(1.5) \quad u = \mathcal{A}u + v \text{ où } \mathcal{A}u = \sum_{\substack{l+|\alpha| \leq m \\ l < m}} a_{l\alpha} t^{\nu+1+l-p} D_t^l t^p D^\alpha \mathcal{Q}u.$$

Pour démontrer le théorème 1.1, on commence par établir le résultat suivant.

PROPOSITION 1.3. *Il existe un disque ouvert  $\Omega$  centré à l'origine de  $\mathbf{C}$  tel que pour toute fonction entière  $v$ , l'équation (1.5) admet une unique solution holomorphe dans  $\Omega \times \mathbf{C}^n$ .*

La démonstration de cette proposition repose sur le théorème du point fixe dans un espace de Banach associé à une fonction majorante. Plus

précisément, si  $\Phi \in \mathbf{R}_+\{t, x\}$  est une série entière convergente à coefficients  $\geq 0$  c'est-à-dire une fonction majorante, rappelons que le sous-espace vectoriel des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$

$$\{u \in \mathbf{C}\{t, x\}; \exists c \geq 0, u \ll c\Phi\}$$

est un espace de Banach pour la norme

$$\min\{c \geq 0; u \ll c\Phi\}.$$

Le point fixe sera obtenu pour une fonction majorante de la forme  $\Phi(\tau, \xi)$  où  $\Phi(\tau, \xi) \in \mathbf{R}_+\{\tau, \xi\}$ ,  $\tau = \rho t$ ,  $\rho$  est un paramètre  $\geq 1$  et  $\xi = x_1 + \dots + x_n$ . L'espace et la norme associés à cette fonction majorante seront notés  $B_\Phi$  et  $\|\cdot\|$ . Indiquons alors le choix de  $\Phi$ . Nous noterons  $\phi$  la fonction majorante ([4], [5], [6])

$$\phi(\xi) = e^{a\xi} \frac{1}{R - \xi}, \quad R > 0, \quad a > 0.$$

Étant donné un entier  $s \geq m$ , nous poserons ([7])

$$(1.6) \quad \Phi(\tau, \xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p R^{s'p} \frac{D^{sp}\phi(\xi)}{(sp)!} \quad \text{où } s' = s - 1 \geq 0.$$

Cette série converge, d'après les inégalités de Cauchy, sur un voisinage compact de  $(\tau, \xi)$  pour  $|\tau| < \frac{r^s}{R^{s'}}$  et  $|\xi| < R - r$  quel que soit  $r \in ]0, R[$ , soit pour  $R^{s'/s}|\tau|^{1/s} + |\xi| < R$ ;  $\Phi$  est donc bien une fonction majorante. Nous utiliserons le lemme suivant ([4], lemme 8.2).

LEMME 1.4. *Pour tout  $p, q \in \mathbf{N}$ , on a*

$$\begin{aligned} a. & \quad D^p \phi \ll a^{-q} D^{p+q} \phi, \\ b. & \quad D^p \phi \ll \frac{p!}{(p+q)!} R^q D^{p+q} \phi. \end{aligned}$$

PREUVE. *a.* Si  $\varphi(\xi) = 1/(R - \xi)$ , on a  $a\phi(\xi) = ae^{a\xi}\varphi(\xi) \ll ae^{a\xi}\varphi(\xi) + e^{a\xi}D\varphi(\xi) = D\phi(\xi)$ , soit  $\phi \ll a^{-1}D\phi$  et, par récurrence,  $\phi \ll a^{-q}D^q\phi$ ; le résultat voulu s'obtient en dérivant.

b. Il suffit de vérifier que  $D^p\phi \ll \frac{R}{p+1}D^{p+1}\phi$  ; on a  $0 \ll (R - \xi)\phi(\xi)$  et en dérivant à l'ordre  $p + 1$ ,  $0 \ll (R - \xi)D^{p+1}\phi(\xi) - (p + 1)D^p\phi(\xi)$ , donc  $(p + 1)D^p\phi(\xi) \ll RD^{p+1}\phi(\xi)$ , d'où le lemme.  $\square$

Rappelons (proposition 6.1 de [2]), que si  $\phi \in \mathbf{R}_+\{\xi\}$  vérifie  $0 \ll (R - \xi)\phi(\xi)$ , alors

$$(1.7) \quad \frac{\eta R}{\eta R - \xi}\phi \ll \frac{\eta}{\eta - 1}\phi \text{ pour tout } \eta > 1.$$

Ici, nous aurons besoin du

LEMME 1.5. *On a  $\frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}\Phi(\tau, \xi) \ll \frac{\eta}{\eta - 1}\Phi(\tau, \xi)$  pour tout  $\eta > 1$ .*

PREUVE. Si  $\theta_j = D^j\left(\frac{\eta R}{\eta R - \bullet}\right)/j!$  et  $a_j = D^j\phi/j!$ , cette inégalité s'écrit

$$\sum_{j=0}^p \theta_j R^{-s'j} a_{sp-sj} \ll \frac{\eta}{\eta - 1} a_{sp}.$$

On remarque que  $\sum_{j=0}^p \dots \ll \sum_{j=0}^{sp} \dots \ll \sum_{j=0}^{sp} \theta_j a_{sp-j}$  d'après le lemme 1.4-b, car  $s' = s - 1$ . L'inégalité voulue s'obtient alors en dérivant (1.7) à l'ordre  $sp$ , d'où le lemme.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de contrôler la norme de  $\mathcal{A}$  dans l'espace  $B_\Phi$ . On fixe une fois pour toutes  $\eta > 1$ . Dans les majorations qui vont suivre, la dépendance des constantes par rapport à  $n, m, s, \eta$  ne sera pas mentionnée. Pour tout  $R > 0$ , nous noterons

$$D(0, R) = \{t \in \mathbf{C}; |t| < R\} \quad \text{et} \quad \Delta_R = \{x \in \mathbf{C}^n; \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| < R\}.$$

Soient  $r > 0$ ,  $R \geq 1$  et  $0 < \delta \leq 1$ , nous prendrons

$$\rho = \frac{R}{r\delta}.$$

Pour  $l + |\alpha| < m$ , posons  $M_{l\alpha}(r, R) = \sup_{D(0, \eta r) \times \Delta_{\eta R}} |a_{l\alpha}|$ ; d'après les inégalités de Cauchy, on a

$$t^\nu a_{l\alpha} \ll (\eta r)^\nu M_{l\alpha}(r, R) \frac{\eta r}{\eta r - t} \frac{\eta R}{\eta R - \xi},$$

où  $\frac{\eta r}{\eta r - t} = \frac{\eta R}{\eta R - \frac{R}{\tau}t} \ll \frac{\eta R}{\eta R - \frac{R}{\tau\delta}t} = \frac{\eta R}{\eta R - \tau}$  car  $\delta \leq 1$ , d'où

$$(1.8) \quad t^\nu a_{l\alpha} \ll (\eta r)^\nu M_{l\alpha}(r, R) \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}.$$

Pour  $l + |\alpha| = m$ , vu l'hypothèse (1.2), on peut écrire

$$a_{l\alpha} = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} a_{l\alpha\beta}(t) x^\beta \text{ où } a_{l\alpha\beta} \in \mathcal{H}(\mathbf{C}).$$

Posons  $K_{l\alpha\beta}(r) = \sup_{D(0, \eta r)} |a_{l\alpha\beta}|$ ; d'après les inégalités de Cauchy, on a

$$t^\nu a_{l\alpha\beta} \ll (\eta r)^\nu K_{l\alpha\beta}(r) \frac{\eta r}{\eta r - t} \quad \text{et} \quad x^\beta \ll (\eta R)^{|\beta|} \frac{\eta R}{\eta R - \xi},$$

d'où, comme ci-dessus,

$$(1.9) \quad t^\nu a_{l\alpha\beta} x^\beta \ll (\eta r)^\nu K_{l\alpha\beta}(r) (\eta R)^{|\beta|} \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}.$$

**PROPOSITION 1.6.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que l'opérateur  $\mathcal{A}$  induise un endomorphisme continu de l'espace de Banach  $B_\Phi$  dont la norme est majorée par  $c \left( \max_{\substack{l+|\alpha|=m, l < m \\ |\beta| \leq |\alpha|}} r^{\nu+1} K_{l\alpha\beta}(r) R^{|\beta| - |\alpha|} + \max_{l+|\alpha| < m} \frac{r^{\nu+1} M_{l\alpha}(r, R) R^{l-m}}{a^{m-(l+|\alpha|)}} \right) \delta$ .*

**PREUVE.** Il résulte de la définition (1.4) de  $\mathcal{Q}$  que

$$t^{l-p} D_t^l t^p D^\alpha \mathcal{Q}u = \sum_{\substack{k \in \mathbf{N} \\ k \geq l-p}} \frac{t^k}{k!} \frac{(k+p)!}{(k+p-l)!} \frac{D^\alpha D_t^k u(0, x)}{\mathcal{P}(k)}.$$

D'autre part,  $u \ll \|u\| \Phi(\tau, \xi)$  et  $\tau = \rho t$ , d'où

$$D^\alpha D_t^k u(0, x) \ll \|u\| \rho^k k! R^{s'k} \frac{D^{sk+|\alpha|} \phi(\xi)}{(sk)!}.$$

Étant donné que  $|\alpha| \leq m \leq s$ , d'après le lemme 1.4, on peut majorer  $D^{sk+|\alpha|} \phi$  comme suit

$$D^{sk+|\alpha|} \phi \ll \begin{cases} R^{s-|\alpha|} (sk + |\alpha|)! \frac{D^{s(k+1)} \phi}{(s(k+1))!} & \text{si } l + |\alpha| = m, \\ \frac{R^{s-(m-l)}}{a^{m-(l+|\alpha|)}} (sk + m - l)! \frac{D^{s(k+1)} \phi}{(s(k+1))!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $l + |\alpha| = m$ , on a, vu le lemme 1.2-a,  $\frac{(k+p)!(sk+|\alpha|)!}{(k+p-l)!(sk)!|\mathcal{P}(k)|} \leq \frac{(k+p)^l (sk+m)^{|\alpha|}}{c_0 \max(1, k^m)} \leq c$ ; on en déduit

$$t^{l-p} D_t^l t^p D^\alpha \mathcal{Q}u \ll \|u\| c R^{s-s'-|\alpha|} \sum_{k \in \mathbf{N}} (\rho t)^k R^{s'(k+1)} \frac{D^{s(k+1)} \phi}{(s(k+1))!},$$

d'où, en multipliant par  $t = \rho^{-1} \tau = \frac{r\delta}{R} \tau$  et vu que  $s - s' - 1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} t^{1+l-p} D_t^l t^p D^\alpha \mathcal{Q}u &\ll \|u\| cr\delta R^{-|\alpha|} \sum_{k \in \mathbf{N}} \tau^{k+1} R^{s'(k+1)} \frac{D^{s(k+1)} \phi}{(s(k+1))!} \\ &\ll \|u\| cr\delta R^{-|\alpha|} \Phi. \end{aligned}$$

Pour  $l + |\alpha| < m$ , de même on a  $\frac{(k+p)!(sk+m-l)!}{(k+p-l)!(sk)!|\mathcal{P}(k)|} \leq c$  et on en déduit

$$t^{1+l-p} D_t^l t^p D^\alpha \mathcal{Q}u \ll \|u\| cr\delta \frac{R^{-(m-l)}}{a^{m-(l+|\alpha|)}} \Phi.$$

D'après (1.9), (1.8) et le lemme 1.5, on a donc bien

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u\| &\leq \|u\| c \left( \max_{\substack{l+|\alpha|=m, l < m \\ |\beta| \leq |\alpha|}} r^{\nu+1} K_{l\alpha\beta}(r) R^{|\beta|-|\alpha|} \right. \\ &\quad \left. + \max_{l+|\alpha| < m} \frac{r^{\nu+1} M_{l\alpha}(r, R) R^{l-m}}{a^{m-(l+|\alpha|)}} \right) \delta. \quad \square \end{aligned}$$



PREUVE DE LA PROPOSITION 1.3. D'après les inégalités de Cauchy, on a

$$v \ll b(r, R) \frac{R}{R - (\tau + \xi)} \quad \text{où} \quad b(r, R) = \sup_{D(0,r) \times \Delta_R} |v|.$$

LEMME 1.7. On a  $\frac{1}{R - (\tau + \xi)} \ll \Phi(\tau, \xi)$ .

PREUVE. En effet, d'après le lemme 1.4-b,

$$\frac{1}{R - (\tau + \xi)} \ll \phi(\tau + \xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p \frac{D^p \phi(\xi)}{p!} \ll \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p R^{s'p} \frac{D^{sp} \phi(\xi)}{(sp)!} = \Phi(\tau, \xi). \quad \square$$

Ce lemme montre en particulier que  $v$  appartient à  $B_{\Phi}$  où  $\|v\| \ll Rb(r, R)$ .

Posons

$$M(r, R) = \max_{l+|\alpha| < m} M_{l\alpha}(r, R) \quad \text{et} \quad K(r) = \max_{\substack{l+|\alpha|=m \\ |\beta| \leq |\alpha|}} K_{l\alpha\beta}(r).$$

D'après la proposition 1.6, en fixant  $r = 1$  par exemple et en supposant  $a \geq 1$ , on a donc  $\|\mathcal{A}\| \leq c \left( K(1) + \frac{M(1, R)}{a} \right) \delta$  car  $R \geq 1$ . En prenant  $\delta = 1/(1 + cK(1))$  et  $a = 1 + cM(1, R)$ , on obtient  $\|\mathcal{A}\| < 1$ , alors  $u = (I - \mathcal{A})^{-1}v$  est une solution de l'équation (1.5) ; cette solution appartient à l'espace  $B_{\Phi}$ , elle est donc holomorphe pour  $R^{s'/s}|\tau|^{1/s} + |\xi| < R$  soit pour  $R(|t|/\delta)^{1/s} + |\xi| < R$  quel que soit  $R \geq 1$ , donc pour  $|t| < \delta$  et  $x \in \mathbf{C}^n$ . On a également l'unicité car, si  $u = \mathcal{A}u$  est une fonction holomorphe dans  $\Omega' \times \mathbf{C}^n$  où  $\Omega'$  est un voisinage de  $t = 0$ , on peut encore choisir  $r > 0$ ,  $0 < \delta \leq 1$ ,  $a \geq 1$  tels que  $\|\mathcal{A}\| < 1$  et  $u \in B_{\Phi}$ , d'où  $u = 0$ , ce qui termine la démonstration de la proposition 1.3.  $\square$

REMARQUE 1.8. Dans [8], les fonctions  $a_{l\alpha}$ ,  $l + |\alpha| = m$ ,  $l < m$ , sont des polynômes en  $(t, x)$  ; il existe donc  $c_1 \geq 0$  et un entier  $d \geq 0$  tels que  $K(r) = c_1 r^d$  pour tout  $r > 0$ . Le degré par rapport à  $x$  de ces polynômes est supposé  $\leq |\alpha| - 1$ . Dans ces conditions, en supposant  $a, r \geq 1$  et vu que  $\nu \leq p$ , on a donc  $\|\mathcal{A}\| \ll c \left( c_1 r^{d+p+1} R^{-1} + \frac{r^{p+1} M(r, R)}{a} \right) \delta$  d'après la proposition

1.6. En prenant  $\delta = \frac{1}{1+cc_1}$ ,  $r = R^{\frac{1}{a+p+1}}$  et  $a = 1 + cr^{p+1}M(r, R)$ , on obtient  $\|\mathcal{A}\| < 1$ , soit une solution holomorphe pour  $R(|t|/r\delta)^{1/s} + |\xi| < R$  quel que soit  $R \geq 1$ , d'où une solution entière unique.

Dans notre cas, l'hypothèse (1.2) ne permet pas un tel choix de paramètres. Outre la proposition 1.3, la démonstration du théorème 1.1 nécessite une étude de l'équation (1.3) au voisinage de  $t \neq 0$ , ce qui fera l'objet du paragraphe suivant.

## 2. Solution au Voisinage de $t \neq 0$

On considère un opérateur différentiel linéaire de la forme

$$(2.1) \quad D_t^m - \sum_{\substack{l+|\alpha| \leq m \\ l < m}} a_{l\alpha}(t, x) D_t^l D^\alpha$$

avec l'hypothèse

$$(2.2) \quad \begin{cases} \text{pour } l + |\alpha| < m, a_{l\alpha} \text{ est holomorphe dans } \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^n, \\ \text{pour } l + |\alpha| = m, a_{l\alpha} = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} a_{l\alpha\beta}(t) x^\beta \\ \text{où } a_{l\alpha\beta} \text{ est holomorphe dans } \mathbf{C}^*. \end{cases}$$

LEMME 2.1. *Il existe une fonction continue  $\delta : \mathbf{C}^* \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que : soient  $a \in \mathbf{C}^*$ ,  $(w_h)_{0 \leq h < m}$  et  $v$  des fonctions holomorphes dans  $\mathbf{C}^n$  et  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^n$  respectivement, alors le problème de Cauchy*

$$(2.3) \quad \begin{cases} D_t^m u(t, x) = \sum_{\substack{l+|\alpha| \leq m \\ l < m}} a_{l\alpha}(t, x) D_t^l D^\alpha u(t, x) + v(t, x), \\ D_t^h u(t, x)|_{t=a} = w_h(x), \text{ pour } 0 \leq h < m, \end{cases}$$

admet une unique solution holomorphe dans  $D(a, \delta(a)) \times \mathbf{C}^n$ ,  $\delta(a) < |a|$ .

Afin de démontrer ce lemme, rappelons le résultat suivant.

LEMME 2.2 (P. Pongérard et C. Wagschal [5]). *Soit  $\eta > 1$ , il existe une constante  $c = c(\eta) > 0$  telle que la propriété suivante soit vérifiée : soit  $a \in \mathbf{C}^*$ , si les coefficients  $a_{l\alpha}$  sont holomorphes au voisinage de  $\overline{D}(a, \eta) \times \mathbf{C}^n$ , si les coefficients  $a_{l\alpha\beta}$  sont holomorphes et bornés dans  $D(a, \eta)$  par  $K_a$  et*

si  $v$  est holomorphe au voisinage de  $\overline{D}(a, 1) \times \mathbf{C}^n$ , les fonctions  $(w_h)_{0 \leq h < m}$  étant toujours supposées holomorphes dans  $\mathbf{C}^n$ , alors le problème de Cauchy (2.3) admet une unique solution holomorphe dans l'ouvert  $D(a, \delta(a)) \times \mathbf{C}^n$  où  $\delta(a) = 1/(1 + cK_a) \in ]0, 1]$ .

PREUVE DU LEMME 2.1. Observons que les coefficients  $a_{l\alpha}$  sont holomorphes dans  $D(a, |a|) \times \mathbf{C}^n$  ; ils sont donc holomorphes au voisinage de  $\overline{D}(a, |a|/2) \times \mathbf{C}^n$  par exemple. En particulier, les coefficients  $a_{l\alpha\beta}$  sont holomorphes au voisinage de  $\overline{D}(a, |a|/2)$  et par conséquent  $M_a \equiv \max_{\substack{l+|\alpha|=m \\ l < m}} \sup_{\overline{D}(a, |a|/2)} |a_{l\alpha\beta}|$  définit une fonction continue de  $a \in \mathbf{C}^*$ .

On fixe  $\eta > 1$ . On effectue le changement de variable  $\theta = \varphi(t) = \frac{t-a}{|a|/2\eta} + a$  qui transforme  $D(a, |a|/2)$  en  $D(a, \eta)$  et on pose  $u(t, x) = U(\varphi(t), x)$ . Le problème (2.3) est alors équivalent au problème

$$\begin{cases} D_\theta^m U(\theta, x) = \sum_{\substack{l+|\alpha| \leq m \\ l < m}} a_{l\alpha}(\varphi^{-1}(\theta), x) \left(\frac{|a|}{2\eta}\right)^{m-l} D_\theta^l D^\alpha U(\theta, x) + V(\theta, x), \\ D_\theta^h U(\theta, x)|_{\theta=a} = \left(\frac{|a|}{2\eta}\right)^h w_h(x), \text{ pour } 0 \leq h < m, \end{cases}$$

où les coefficients  $a_{l\alpha\beta}(\varphi^{-1}(\theta)) \left(\frac{|a|}{2\eta}\right)^{m-l}$  sont holomorphes et bornés dans  $D(a, \eta)$  par  $K_a \equiv M_a \max(1, \left(\frac{|a|}{2\eta}\right)^m)$ . De même, la fonction  $V(\theta, x) = v(\varphi^{-1}(\theta), x)$  est holomorphe au voisinage de  $\overline{D}(a, \eta) \times \mathbf{C}^n$  donc au voisinage de  $\overline{D}(a, 1) \times \mathbf{C}^n$ . On est alors ramené à la situation du lemme 2.2 qui prouve que  $U$  est holomorphe dans  $D(a, \delta(a)) \times \mathbf{C}^n$  ; autrement dit,  $u$  est holomorphe dans  $D(a, \frac{|a|}{2\eta}\delta(a)) \times \mathbf{C}^n$ . La fonction  $a \mapsto \frac{|a|}{2\eta}\delta(a) = |a|/2\eta(1 + cK_a)$  est évidemment continue sur  $\mathbf{C}^*$ , d'où le lemme 2.1.  $\square$

### 3. Preuve du Théorème 1.1

D'après la proposition 1.3 et le lemme 1.2-b, il existe un  $r > 0$  tel que, l'équation (1.3) admet une unique solution  $u$  holomorphe dans  $D(0, r) \times \mathbf{C}^n$ . Soit

$R = \sup\{r > 0; \text{ la série de Taylor de } u \text{ converge dans } D(0, r) \times \mathbf{C}^n\} \in \overline{\mathbf{R}}_+^*$ ,

alors  $u \in \mathcal{H}(D(0, R) \times \mathbf{C}^n)$  et il s'agit de montrer que  $R = +\infty$ . Raisonnons par l'absurde en supposant  $R \in ]0, +\infty[$ .

Notons  $A = \sum_{\substack{l+|\alpha| \leq m \\ l < m}} a_{l\alpha} t^{\nu+1+l-p} D_t^l t^p D^\alpha$  l'opérateur qui apparaît dans l'équation (1.3) et montrons brièvement comment on se ramène au paragraphe précédent. On a

$$A = \sum_{\substack{l+|\alpha| \leq m \\ j \leq l}} a_{l\alpha} c_{lj} t^{\nu+1+j} D_t^j D^\alpha \quad \text{où } c_{lj} \in \mathbf{N},$$

soit

$$A = \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}} b_{j\alpha} D_t^j D^\alpha \quad \text{où } b_{j\alpha} = \sum_{l=j}^{\min(m-1, m-|\alpha|)} a_{l\alpha} c_{lj} t^{\nu+1+j}.$$

Les coefficients  $b_{j\alpha}$  sont des fonctions entières qui vérifient également l'hypothèse (1.2) ; il en résulte que  $t^{-m} \mathcal{P}(tD_t) - t^{-m} A$  divisé par une constante non nulle est un opérateur du même type que (2.1)-(2.2). Le lemme 2.1 associe à cet opérateur une fonction continue  $\delta : \mathbf{C}^* \rightarrow ]0, +\infty[$ .

On fixe alors  $\rho \in ]0, R[$ , on note  $\sigma = \min_{\rho \leq |a| \leq R} \delta(a) > 0$  et on choisit

$$r = \max(\rho, R - \sigma/2) \in [\rho, R[.$$

Dans ce qui suit nous poserons

$$\begin{aligned} S(0, r) &= \{t \in \mathbf{C}; |t| = r\} \quad \text{et} \\ D(a, \sigma) &= \{t \in \mathbf{C}; |t - a| < \sigma\} \quad \text{pour tout } a \in S(0, r). \end{aligned}$$

LEMME 3.1. *on a*

$$(3.1) \quad D(0, R) \cup \bigcup_{a \in S(0, r)} D(a, \sigma) = D(0, r + \sigma)$$

et pour tout  $a, b \in S(0, r)$ ,

$$(3.2) \quad D(a, \sigma) \cap D(b, \sigma) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad D(0, R) \cap D(a, \sigma) \cap D(b, \sigma) \neq \emptyset.$$

PREUVE. Soit  $t \in D(0, R)$ , on a  $|t| < R < \max(\rho + \sigma, R + \sigma/2) = r + \sigma$  ; soit  $t \in \bigcup_{a \in S(0, r)} D(a, \sigma)$ , on a  $|t| \leq |a| + |t - a| = r + |t - a| < r + \sigma$ . D'autre

part, si  $|t| \in [R, r + \sigma[$ , en prenant  $a = rt/|t|$ , on a  $|t - a| = ||t| - r| = |t| - r < \sigma$ , d'où (3.1).

Si  $D(a, \sigma) \cap D(b, \sigma) \neq \emptyset$ , alors  $|a - b| < 2\sigma$  et le point  $t = (a + b)/2$  vérifie  $|t - a| = |t - b| = |a - b|/2 < \sigma$ . L'ensemble  $D(0, R)$  étant convexe,  $t \in D(0, R)$  ce qui prouve (3.2).  $\square$

Pour tout  $a \in S(0, r) \subset D(0, R)$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} t^{-m} \mathcal{P}(tD_t)u_a = t^{-m} Au_a + t^{-m} v, \\ D_t^h u_a|_{t=a} = D_t^h u|_{t=a}, \text{ pour } 0 \leq h < m, \end{cases}$$

admet d'après le lemme 2.1 une unique solution  $u_a$  holomorphe dans  $D(a, \delta(a)) \times \mathbf{C}^n$ , donc dans  $D(a, \sigma) \times \mathbf{C}^n$ ; la fonction  $u$  vérifie le même problème de Cauchy dans  $\dot{D}(0, R) \times \mathbf{C}^n$  et donc  $u = u_a$  dans l'ouvert non vide  $[\dot{D}(0, R) \cap D(a, \sigma)] \times \mathbf{C}^n = [D(0, R) \cap D(a, \sigma)] \times \mathbf{C}^n$  car  $\sigma \leq \delta(a) < |a|$ .

On définit alors une fonction  $\tilde{u}$  sur  $D(0, r + \sigma) \times \mathbf{C}^n$  de la manière suivante. Soit  $t \in D(0, r + \sigma)$ , si  $t \in D(0, R)$ , on pose  $\tilde{u}(t, \cdot) = u(t, \cdot)$ , sinon, on note  $A_t$  l'ensemble  $A_t = \{a \in S(0, r); t \in D(a, \sigma)\}$  et on pose  $\tilde{u}(t, \cdot) = u_a(t, \cdot)$  pour un point  $a$  quelconque de  $A_t$  car cette définition ne dépend pas du choix du point  $a \in A_t$ . En effet, soit  $b \in A_t$ , alors  $u_a = u = u_b$  dans  $[D(a, \sigma) \cap D(b, \sigma) \cap D(0, R)] \times \mathbf{C}^n$ ; cet ouvert est non vide d'après (3.2) puisque  $t \in D(a, \sigma) \cap D(b, \sigma)$ . Ce dernier ouvert étant convexe donc connexe, il en résulte que  $u_a = u_b$  dans  $[D(a, \sigma) \cap D(b, \sigma)] \times \mathbf{C}^n$  et en particulier  $u_a(t, \cdot) = u_b(t, \cdot)$ .

Montrons que la fonction  $\tilde{u}$  ainsi définie est holomorphe. Dans  $D(0, R) \times \mathbf{C}^n$ , c'est évident, soit donc  $t \in D(0, r + \sigma) - D(0, R)$ , alors  $\tilde{u}(t, \cdot) = u_a(t, \cdot)$  pour un point  $a \in A_t$ ; par définition, on a  $\tilde{u} = u = u_a$  dans  $[D(0, R) \cap D(a, \sigma)] \times \mathbf{C}^n$  et pour tout point  $t' \in D(a, \sigma) - D(0, R)$ , on a  $\tilde{u}(t', \cdot) = u_a(t', \cdot)$  car  $a \in A_{t'}$ , autrement dit  $\tilde{u} = u_a$  dans  $D(a, \sigma) \times \mathbf{C}^n$  ce qui prouve que  $\tilde{u}$  est holomorphe au point  $t$ .  $\square$

FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1.1. La fonction  $\tilde{u}$  est égale à  $u$  dans  $D(0, R) \times \mathbf{C}^n$ , elle a donc la même série de Taylor que  $u$  en 0, mais elle est holomorphe dans  $D(0, r + \sigma) \times \mathbf{C}^n$  avec  $r + \sigma \geq R + \sigma/2 > R$ , ce qui est contraire à la définition de  $R$ , d'où le résultat voulu.  $\square$

## B. Solution Entière d'Ordre Fini

### 4. Énoncé et Démonstration

Rappelons la définition suivante.

DÉFINITION 4.1. Pour  $q \in [1, +\infty[$ , on désigne par  $E^q(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n)$  le sous-espace des fonctions entières d'ordre  $q$

$$E^q(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n) = \{u \in \mathcal{H}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n); \exists A, B \geq 0, |u(t, x)| \leq Ae^{B\|t, x\|^q}\}$$

où  $\|t, x\| = \max(|t|, \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|)$ .

On se propose d'étudier le problème de Cauchy (1.1) dans l'espace  $E^q(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n)$  avec l'hypothèse

$$(4.1) \quad \begin{cases} \text{pour } l + |\alpha| < m, a_{l\alpha} \text{ est un polynôme de degré } k_{l\alpha}, \\ \text{pour } l + |\alpha| = m, a_{l\alpha} \text{ est une constante complexe.} \end{cases}$$

On pose

$$(4.2) \quad q_0 = 1 + \max_{l+|\alpha| < m} \frac{k_{l\alpha}}{m - (l + |\alpha|)}.$$

THÉORÈME 4.2. Si  $\mathcal{P}(k) \neq 0$  pour tout entier  $k \geq p$ , alors, pour tous  $q \geq q_0$ ,  $w_h \in E^q(\mathbf{C}^n)$  et  $v \in E^q(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n)$ , la solution du problème de Cauchy (1.1) appartient à  $E^q(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n)$ .

Il est clair que l'espace  $E^q$  est stable par multiplication par des polynômes et, en utilisant les inégalités de Cauchy, on vérifie qu'il est également stable par dérivation. En cherchant la solution de (1.1) sous la forme  $\sum_{h=0}^{p-1} \frac{t^h}{h!} w_h(x) + t^p u(t, x)$ , on se ramène donc à l'équation (1.3) comme précédemment. Le lemme 1.2 peut être préciser par le

LEMME 4.3. L'opérateur  $\mathcal{P}(tD_t)$  est un automorphisme de  $E^q(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n)$ ; son inverse  $\mathcal{Q}$  est défini par (1.4).

PREUVE. Soit  $u \in E^q(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n)$ , il existe  $A, B \geq 0$  tels que

$$\frac{|D_t^k u(0, x)|}{k!} \leq A e^{BR^q} R^{-k} \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N}, x \in \overline{\Delta}_R \text{ et } R > 0,$$

d'après le inégalités de Cauchy. Vu le lemme 1.2-a, on a donc

$$\frac{|t^k D_t^k u(0, x)|}{|\mathcal{P}(k)|k!} \leq (A/c_0) e^{BR^q} (|t|/R)^k,$$

d'où  $|\mathcal{Q}u(t, x)| \leq 2(A/c_0) e^{BR^q}$  pour  $|t| \leq R/2$  et  $\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq R$ , quel que soit  $R > 0$ ; on en déduit que  $\mathcal{Q}u \in E^q(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n)$ , d'où le lemme.  $\square$

Comme précédemment, on se ramène alors à l'équation (1.5). Indiquons que la preuve du théorème 4.2 est totalement indépendante des paragraphes 2 et 3. Elle va être déduite directement de la proposition 1.6, de la manière suivante. Soit  $R \geq 1$ , posons  $r = R$ . D'après l'hypothèse (4.2), il existe  $c_2 \geq 0$  tel que  $M_{l\alpha}(R, R) \leq c_2 R^{kl\alpha}$  pour tout  $R \geq 1$  et d'autre part,  $K(R) \equiv K$  est une constante  $\geq 0$ . D'après la proposition 1.6, on a donc

$$\|\mathcal{A}\| \leq c \left( K + c_2 \max_{l+|\alpha| < m} \frac{R^{kl\alpha}}{a^{m-(l+|\alpha|)}} \right) \delta$$

car ici  $|\beta| = 0$  et les termes  $R^{\nu+1-|\alpha|}$  et  $R^{\nu+1+l-m}$  sont majorés par 1; en effet, comme  $p \in [0, m]$ , il est clair que

$$\nu + 1 - |\alpha| = \max(p - l - |\alpha|, 1 - |\alpha|) \leq 0 \quad \text{pour } l + |\alpha| = m, l < m$$

et

$$\nu + 1 + l - m = \max(p - m, 1 + l - m) \leq 0 \quad \text{pour } l + |\alpha| < m.$$

En prenant  $a = R^{q'}$  où  $q' \equiv q - 1 \geq q_0 - 1$ , il en résulte que

$$\|\mathcal{A}\| \leq c \left( K + c_2 \max_{l+|\alpha| < m} R^{kl\alpha - q'(m-(l+|\alpha|))} \right) \delta \leq c(K + c_2) \delta$$

par définition de  $q_0$ . On choisit  $0 < \delta \leq 1$  tel que  $\delta < 1/c(K + c_2)$ , quantité indépendante de  $R$ . On obtient  $\|\mathcal{A}\| < 1$ , soit une solution holomorphe

pour  $R(|t|/R\delta)^{1/s} + |\xi| < R$  quel que soit  $R \geq 1$ , d'où une solution entière  $u$ , unique. Il reste à prouver que  $u$  est d'ordre  $q$ . On a

$$\|u\| \leq \frac{\|v\|}{1 - \|\mathcal{A}\|} \leq \frac{Rb(R, R)}{1 - \|\mathcal{A}\|} \leq ce^{cR^q}$$

où  $c \geq 0$  est une constante indépendante de  $R$  étant donné que  $v \in E^q$ . Autrement dit,  $u \ll ce^{cR^q} \Phi(\tau, \xi)$ . Rappelons (lemme 4.4 de [6]) que

$$D^k \phi(r) = \frac{e^{ar}}{(R-r)^{k+1}} k! \sum_{j=0}^k \frac{a^j (R-r)^j}{j!} \leq \frac{e^{ar}}{(R-r)^{k+1}} k! e^{a(R-r)}$$

soit

$$(4.3) \quad D^k \phi(r) \leq k! \frac{e^{aR}}{(R-r)^{k+1}} \text{ pour tout } r \in ]0, R[ \text{ et tout } k \in \mathbf{N}.$$

D'après la définition (1.6) de  $\Phi$ , pour  $|\xi| \leq r$ ,  $|\tau| \leq r/2^s$  et  $r = R/2$ , on a aisément

$$|\Phi(\tau, \xi)| \leq \frac{e^{aR}}{r} \sum_{p=0}^{\infty} (1/2)^p \leq 4e^{aR} \quad \text{car } R \geq 1.$$

Autrement dit, pour  $|t| \leq \delta R/2^{s+1}$  et  $\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq R/2$ , on a

$$|u(t, x)| \leq 4ce^{R^q(c+1)} \quad \text{pour tout } R \geq 1;$$

il en résulte que  $u$  appartient à  $E^q(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n)$ .  $\square$

## References

- [1] Baouendi, M. S. and C. Goulaouic, Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, *Comm. on Pure and Appl. Math.* **26** (1973), 455–475.
- [2] Hamada, Y., Leray, J. et C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle, *J. Math. Pures et Appl.* **55** (1976), 297–352.
- [3] Persson, J., On the local and global non-characteristic Cauchy problem when the solutions are holomorphic functions or analytic functionals in space variables, *Arkiv för Matematik* **9** (1971), 171–180.



- [4] Pongérard, P., Problème de Cauchy holomorphe, Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1996.
- [5] Pongérard, P. et C. Wagschal, Problème de Cauchy dans des espaces de fonctions entières, *J. Math. Pures et Appl.* **75** (1996), 409–418.
- [6] Pongérard, P. et C. Wagschal, Ramification non abélienne, *J. Math. Pures et Appl.* (1999), 51–88.
- [7] Pongérard, P., Sur une classe d'équations de Fuchs non linéaires, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* (à paraître).
- [8] Yamane, H., Global Fuchsian Cauchy Problem, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **7** (2000), 147–162.

(Received April 24, 2000)

23 allée des rubis  
97400 Saint-Denis  
La Réunion, France  
E-mail: mpongera@univ-reunion.fr