J. Math. Sci. Univ. Tokyo
7 (2000), 423–448.

Sur une Classe d'Équations de Fuchs non Linéaires

By Patrice Pongérard

Abstract. For nonlinear partial differential equations, with several Fuchsian variables, we give sufficient conditions concerning the existence and uniqueness of a holomorphic solution and concerning the convergence of formal power series solutions. We reduce the proof of the theorems to the proof of the fixed-point theorem in a Banach space defined by a majorant function that is suitable to this kind of equation. We show how one can deduce the generalization of these results under Gevrey regularity hypothesis with respect to the other variables.

Introduction

Le présent article concerne l'étude d'une équation de Fuchs aux dérivées partielles d'ordre m, non linéaire.

Dans la première partie, cette étude est faite au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_t^q \times \mathbf{C}_x^n$ sous deux conditions définies au point $(t,x) = (0,0)$; la première est une condition de Poincaré lorsque $q = 1$ ou (lemme 6.2.6 de [4]) lorsque $m = 1$ et la seconde est une condition spectrale. La question de l'existence et de l'unicité d'une solution holomorphe a été traitée par N. S. Madi et M. Yoshino [6] ; pour un opérateur d'un type moins général, R. Gérard et H. Tahara [4] prouvent, en outre, que toute série formelle solution, de la forme $u = \sum_{k \in \mathbf{N}^q} u_k(x) t^k$, est convergente si les fonctions u_k sont holomorphes dans un même polydisque ouvert centré à l'origine. Ces résultats ont été obtenus d'une autre manière par M. Miyake [7] pour une équation du premier ordre.

Dans tous ces travaux, l'estimation de l'opérateur $D^\alpha \mathcal{Q}$ où $\mathcal{Q}$ est une certaine perturbation de l'opérateur identique, conduit à des techniques très calculatoires. L'objet de la première partie est de simplifier la démonstration de ces résultats en la réduisant à celle du théorème du point fixe dans un espace de Banach ; l'idée essentielle étant la recherche d'une fonction majorante qui permette de stabiliser l'opérateur $D^\alpha \mathcal{Q} \times D^\alpha \mathcal{Q}$. Nous

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35A07; Secondary 35A20, 35A10.

précisons d'autre part que toute solution formelle $u = \sum_{k\in\mathbf{N}^q} u_k(x)t^k \in \mathbf{C}[[t,x]]$ est convergente, si seulement un nombre fini de coefficients u_k sont holomorphes au voisinage de l'origine (théorème 1.1).

Dans la seconde partie, on aborde l'étude de la même équation, au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_t^q \times \mathbf{R}_x^n$, lorsque les hypothèses d'holomorphie par rapport à x sont remplacées par des hypothèses de régularité Gevrey ; cette question ne figure pas, semble-t-il, dans les travaux antérieurs. En reprenant le formalisme des fonctions majorantes développé par C. Wagschal [8], nous montrons comment déduire de la première partie une généralisation dans des espaces de Gevrey.

Enfin, je souhaite remercier Claude Wagschal qui a bien voulu lire ce travail et me faire part de ses remarques.

1. Équation Holomorphe

Les coordonnées d'un point (t,x) de $\mathbf{C}^q \times \mathbf{C}^n$ seront notées $(t_1,\dots,t_q, x_1,\dots,x_n)$. L'opérateur de dérivation par rapport à la variable t_i (resp. x_j) sera noté D_{t_i} (resp. D_j) et nous poserons $D_t^l = D_{t_1}^{l_1}\cdots D_{t_q}^{l_q}$ et $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$ pour tout $l=(l_1,\dots,l_q)\in\mathbf{N}^q$ et tout $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n$. On considère un opérateur différentiel linéaire de la forme

$$a(t,x,D_t) = \sum_{|l|\le m} a_l(t,x)t^l D_t^l$$

où l'entier m est ≥ 0 et les fonctions a_l sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q\times\mathbf{C}^n$. On associe à cet opérateur le polynôme d'indéterminée $T=(T_1,\dots,T_q)$ à coefficients constants

$$\mathcal{P}(T) = \sum_{|l|\le m} a_l(0)\prod_{i=1}^{q}\prod_{\nu=0}^{l_i-1}(T_i-\nu)$$

où l'on convient que $\prod_{\emptyset} = 1$; en notant $tD_t = (t_1D_{t_1},\dots,t_qD_{t_q})$, on obtient la relation $\sum_{|l|\le m} a_l(0)t^lD_t^l = \mathcal{P}(tD_t)$. Nous supposerons que $\mathcal{P}$ satisfait à la condition suivante.

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \text{Il existe une constante } c_0>0 \text{ et un entier } p_0\ge 1 \text{ tels que} \\ |\mathcal{P}(k)| \ge c_0|k|^m \text{ pour tout } k\in\mathbf{N}^q \text{ de longueur } |k|\ge p_0. \end{cases}$$

On considère alors l'équation

$$(1.2)\quad \begin{cases} a(t,x,D_t)u(t,x) = \sum\limits_{(l,h)\in\mathcal{L}} a_{lh}(t,x)t^l D_t^h u(t,x) + f\big(t,x,\mathcal{D}u(t,x)\big), \\ u(0,x) = 0, \end{cases}$$

où

$$\mathcal{D}u = (\mathcal{D}^\beta u)_{\beta\in B},\ \mathcal{D}^\beta u = t^l D_t^h D^\alpha u,\ \beta = (l,h,\alpha),$$
$$B \subset \{(l,h,\alpha)\in \mathbf{N}^q\times\mathbf{N}^q\times\mathbf{N}^n;\ |l|\geq|h| \text{ et } |h|+|\alpha|\leq m\} \text{ est un ensemble fini,}$$
$$n' = \operatorname{card} B,\ y = (y_\beta)_{\beta\in B} \in \mathbf{C}^{n'},$$

$f(t,x,y)$ est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'}$ vérifiant

$$(1.3)\quad \begin{aligned} & f(0,x,0) = \frac{\partial f}{\partial y_\beta}(0,x,0) = 0 \text{ pour tout } x \text{ et tout} \\ & \beta = (l,h,\alpha) \text{ tel que } |l| = |h|\ ; \end{aligned}$$

les fonctions a_{lh} sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q \times \mathbf{C}^n$ et $\mathcal{L}$ désigne une partie de l'ensemble $\{(l,h) \in \mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^q;\ |l| = |h| \leq m \text{ et } l \neq h\}$. On suppose enfin qu'il existe $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_q) \in (\mathbf{R}_+^\star)^q$ tel que

$$(1.4)\quad r(\zeta) < c_0 \text{ où } r(\zeta) = \sum_{(l,h)\in\mathcal{L}} |a_{lh}(0)|\zeta^{h-l}.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 1.1 1. *Si $p_0 = 1$, l'équation* (1.2) *admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q \times \mathbf{C}^n$; il s'agit, en outre, de son unique solution dans l'espace $\mathbf{C}[[t,x]]$ des séries formelles.*

2. *Si $p_0 > 1$ et si $u \in \mathbf{C}[[t,x]]$ est une solution formelle de l'équation* (1.2) *telle que les séries $D_t^k u(0,x)$, $|k| < p_0$, sont des séries entières convergentes, alors u est une série entière convergente.*

Réduction. On écrit d'abord, pour les $\beta = (l,h,\alpha)$ tels que $|l| > |h|$, $D^\beta u = t^{l-l'} D^{\beta'} u$ où $D^{\beta'} u = t^{l'} D_t^h D^\alpha u$, $l' \in \mathbf{N}^q$ étant choisi de sorte que $l - l' > 0$ et $|l'| = |h|$. On peut ainsi se ramener à

$$B \subset \{(l,h,\alpha) \in \mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^n;\ |l| = |h| \leq m - |\alpha|\}$$

et

$$f(0,x,0)=\frac{\partial f}{\partial y_\beta}(0,x,0)=0 \text{ pour tout } x \text{ et tout } \beta. \tag{1.5}$$

En divisant par c_0 et en utilisant le changement de variables $t\mapsto(\zeta_1 t_1,\dots,\zeta_q t_q)$ qui laisse invariant l'opérateur $\mathcal{P}(tD_t)$, on peut ensuite supposer

$$c_0=1,\ \zeta=(1,\dots,1) \text{ et } r(\zeta)=\sum_{(l,h)\in\mathcal{L}}|a_{lh}(0)|<1.$$

Finalement, la décomposition $a_l(t,x)=a_l(0)+(a_l(0,x)-a_l(0))+(a_l(t,x)-a_l(0,x))$ et $a_{lh}(t,x)=a_{lh}(0,x)+(a_{lh}(t,x)-a_{lh}(0,x))$ permet d'écrire l'équation (1.2) sous la forme réduite

$$\begin{cases} \mathcal{P}(tD_t)u=\displaystyle\sum_{|l|=|h|\le m} b_{lh}(x)t^l D_t^h u+f(t,x,\mathcal{D}u),\\ u=0 \text{ pour } t=0,\end{cases} \tag{1.6}$$

où les fonctions b_{lh} sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ qui vérifient

$$b_{lh}(0)=\begin{cases} a_{lh}(0) & \text{si } (l,h)\in\mathcal{L},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{1.7}$$

LE CAS $\mathbf{p_0=1}$. Pour démontrer le point 1 du théorème, on commence par établir le

LEMME 1.2. *Soit D un polydisque ouvert centré à l'origine de $\mathbf{C}^q_t\times\mathbf{C}^n_x$. L'opérateur $\mathcal{P}(tD_t)$ est un automorphisme de l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans D qui s'annulent avec t ; son inverse $\mathcal{Q}$ est défini par*

$$(\mathcal{Q}u)(t,x)=\sum_{|k|\ge 1}\frac{t^k}{k!}\frac{D_t^k u(0,x)}{\mathcal{P}(k)}. \tag{1.8}$$

PREUVE. Soit u une fonction holomorphe dans D vérifiant $u(0,x)=0$. Vu que $(tD_t)^l t^k=k^l t^k$ pour tout $(k,l)\in\mathbf{N}^q\times\mathbf{N}^q$, on a $\mathcal{P}(tD_t)u(t,x)=$

$\sum\limits_{|k|\geq 1} \dfrac{t^k}{k!}\mathcal{P}(k)D_t^k u(0,x)$ dans D, ce qui montre que $\mathcal{P}(tD_t)$ est injectif car $\mathcal{P}(k) \neq 0$; son inverse est donné par la série formelle

$$\mathcal{Q}u = \sum_{\substack{(k,\alpha)\in\mathbf{N}^q\times\mathbf{N}^n \\ |k|\geq 1}} \frac{D_t^k D^\alpha u(0)}{k!\alpha!\mathcal{P}(k)} t^k x^\alpha$$

qui est, comme la série de Taylor de u en 0, absolument convergente pour tout $(t,x) \in D$ puisque $|1/\mathcal{P}(k)| \leq 1$, d'où le lemme. □

En remplaçant u par $\mathcal{Q}u$, l'équation (1.6) est alors équivalente à l'équation

$$\text{(1.9)} \qquad \begin{cases} u = \sum\limits_{|l|=|h|\leq m} b_{lh}(x)t^l D_t^h \mathcal{Q}u + f(t,x,\mathcal{R}u), \\ u = 0 \text{ pour } t = 0, \end{cases}$$

$$\text{où } \mathcal{R}u = (\mathcal{R}_\beta u)_{\beta\in B},\ \mathcal{R}_\beta u = \mathcal{D}^\beta \mathcal{Q}u.$$

La résolution de l'équation (1.9) repose sur le théorème du point fixe dans un espace métrique complet ; cet espace métrique complet sera une boule fermée de l'espace de Banach associé à une certaine fonction majorante. Plus précisément, si $\Phi \in \mathbf{R}_+\{t,x\}$ est une série entière convergente à coefficients ≥ 0 c'est-à-dire une fonction majorante, rappelons que le sous-espace vectoriel des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_t^q \times \mathbf{C}_x^n$

$$\bigl\{u \in \mathbf{C}\{t,x\};\ \exists c \geq 0,\ u \ll c\Phi\bigr\}$$

est un espace de Banach pour la norme

$$\min\{c \geq 0;\ u \ll c\Phi\}.$$

Le point fixe sera obtenu pour une fonction majorante de la forme

$$\Phi(t,x) = \sigma\phi(\tau,\xi)$$

où $\sigma = t_1 + \cdots + t_q$, $\phi \in \mathbf{R}_+\{\tau,\xi\}$, $\tau = \rho\sigma$, ρ est un paramètre ≥ 1 et $\xi = x_1 + \cdots + x_n$. L'espace et la norme associés à cette fonction majorante seront notés B_Φ et $\| \ \|$. Indiquons ensuite le choix de ϕ. Rappelons ([8]) que si θ désigne la fonction majorante $\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{(n+1)^2}$, il existe $K > 0$ tel que $\theta^2 \ll K\theta$; la fonction majorante $\varphi_R(\xi) = K^{-1}\theta(\xi/R)$, $R > 0$, vérifie alors

$$\varphi_R(0) = K^{-1} \text{ et } \varphi_R^2 \ll \varphi_R.$$

Étant donné un entier $s \geq 1$ et un réel $R > 0$, nous poserons

$$\phi(\tau, \xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p \frac{D^{sp}\varphi_R(\xi)}{(sp)!}. \tag{1.10}$$

Cette série converge, d'après les inégalités de Cauchy, pour $|\tau| < r^s$ et $|\xi| < R - r$ quel que soit $r \in]0, R[$, soit pour $|\tau|^{1/s} + |\xi| < R$; il s'agit donc bien d'une fonction majorante.

En outre, on a

$$\phi^2 \ll \phi. \tag{1.11}$$

En effet, si $a_j = D^j\varphi_R/j!$, cette inégalité s'écrit $\sum_{j=0}^{p} a_{sp-sj}a_{sj} \ll a_{sp}$; elle s'obtient en remarquant que $\sum_{j=0}^{p} \ldots \ll \sum_{j=0}^{sp} a_{sp-j}a_j \ll a_{sp}$ par dérivation de $\varphi_R^2 \ll \varphi_R$. L'espace $B_\phi, \| \ \|_\phi$, associé à $\phi(\tau, \xi)$ est donc une algèbre de Banach et, comme $\phi(0) = K^{-1}$, la proposition 2.3 de [8] énoncée ci-après est encore valable.

PROPOSITION 1.3. *Soient $u \in B_\phi$ et $R' > 0$ tels que $\| u \|_\phi < R'$, alors la fonction $R'/(R' - u)$ appartient à l'espace B_ϕ et*

$$\frac{R'}{R' - u} \ll \Big(K + \frac{\| u \|_\phi}{R' - \| u \|_\phi}\Big)\phi(\tau, \xi).$$

Nous utiliserons également les propriétés suivantes.

LEMME 1.4. *Il existe une constante L $(= 1/4)$ telle que, pour tout $0 < R \leq L$,*

a. $$D^p\varphi_R \ll \frac{p!}{(p+q)!} D^{p+q}\varphi_R, \ \forall (p, q) \in \mathbf{N}^2.$$

Soit $\eta > 1$, il existe ([8]) $c = c(\eta) > 0$ *tel que, pour tout* $0 < R \leq L$,

b. $$\frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)} \ll c\phi(\tau, \xi).$$

Preuve. *a.* Il suffit de montrer que $D^p\varphi_R \ll \frac{1}{p+1}D^{p+1}\varphi_R$, soit $D^p\theta \ll \frac{R^{-1}}{p+1}D^{p+1}\theta$; cette inégalité s'écrit $\frac{(n+p)!}{(n+p+1)^2} \leq \frac{R^{-1}}{p+1}\frac{(n+p+1)!}{(n+p+2)^2}$. La suite $\left(\frac{(n+p+2)^2(p+1)}{(n+p+1)^3}\right)_n$ étant décroissante, $L = \min_{p \in \mathbf{N}} \frac{(p+1)^2}{(p+2)^2}$ convient.

b. D'après le lemme 2.4 de [8], en prenant $c = \sup_{n \in \mathbf{N}} K\frac{(n+1)^2}{\eta^n}$, on a $\frac{\eta R}{\eta R - \bullet} \ll c\varphi_R$. Il suffit donc que $\varphi_R(\tau + \xi) \ll \phi(\tau, \xi)$; on peut conclure car d'après la propriété *a*,

$$\varphi_R(\tau + \xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p \frac{D^p\varphi_R(\xi)}{p!} \ll \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p \frac{D^{sp}\varphi_R(\xi)}{(sp)!} = \phi(\tau, \xi). \square$$

Choisissons dès maintenant et pour toute la suite de cet article l'entier

$$s \geq \max(1, 2m).$$

L'intérêt essentiel de la fonction majorante ϕ réside dans le lemme suivant.

Lemme 1.5. *Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $a, a' > 0$ et tout $0 < R \leq L$, la propriété suivante soit vérifiée : soient $u \ll a\Phi$ et $u' \ll a'\Phi$, alors pour tout $\beta, \gamma \in B$*

$$\begin{cases} \mathcal{R}_\beta u & \ll c\rho^{-1}a\phi, \\ \mathcal{R}_\beta u \mathcal{R}_\gamma u' & \ll c\rho^{-1}aa'\Phi. \end{cases}$$

Preuve. Si $\beta = (l, h, \alpha) \in B$, rappelons que $|l| = |h| \leq m - |\alpha|$ et $\mathcal{R}_\beta u = t^l D_t^h D^\alpha \mathcal{Q}u$; il résulte de la définition (1.8) de $\mathcal{Q}$ que

$$\mathcal{R}_\beta u = \sum_{|k| \geq 1, k \geq h} \frac{t^{k+l-h}}{(k+l-h)!} \frac{(k+l-h)!}{(k-h)!} \frac{D^\alpha D_t^k u(0, x)}{\mathcal{P}(k)}.$$

Étant donné que $\frac{p!}{p'!} \leq \frac{|p|!}{|p'|!}$ quels que soient $p \geq p'$, on a

$$\frac{(k+l-h)!}{(k-h)!}\frac{1}{|\mathcal{P}(k)|} \leq \frac{|k|!}{(|k|-|h|)!}\frac{1}{|k|^m} \leq \frac{|k|^{|h|}}{|k|^m}.$$

On a d'autre part, $D^\alpha D_t^k u(0,x) \ll aD^\alpha D_t^k \Phi(0,x) = a\rho^{|k|-1}|k|! \cdot \dfrac{D^{s(|k|-1)+|\alpha|}\varphi_R(\xi)}{(s(|k|-1))!}$ car $\Phi(t,x) = \sigma\phi(\tau,\xi)$ et $\tau = \rho\sigma$; donc, d'après le lemme 1.4-a

$$D^\alpha D_t^k u(0,x) \ll a\rho^{|k|-1}|k|!\frac{(s(|k|-1)+|\alpha|)!}{(s(|k|-1))!}\frac{D^{s(|k|-1)+m}\varphi_R}{(s(|k|-1)+m)!}.$$

Vu que

$$\frac{|k|^{|h|}}{|k|^m}\frac{(s(|k|-1)+|\alpha|)!}{(s(|k|-1))!} \leq \Big(\frac{s(|k|-1)+m}{|k|}\Big)^{|\alpha|} \leq c,$$

on en déduit (en changeant $k+l-h$ en k)

$$\mathcal{R}_\beta u \ll c\rho^{-1}a\sum_{|k|\geq 1}\frac{(\rho t)^k}{k!}|k|!\frac{D^{s(|k|-1)+m}\varphi_R}{(s(|k|-1)+m)!} = c\rho^{-1}a\sum_{p=0}^{\infty}\tau^{p+1}\frac{D^{sp+m}\varphi_R}{(sp+m)!}\ ;$$

de même, comme $\rho^{-1}\tau = \sigma$,

$$\mathcal{R}_\beta u\mathcal{R}_\gamma u' \ll c\rho^{-1}aa'\sigma\sum_{p=0}^{\infty}\tau^p\frac{D^{sp+m}\varphi_R}{(sp+m)!}\sum_{p=0}^{\infty}\tau^{p+1}\frac{D^{sp+m}\varphi_R}{(sp+m)!}.$$

Posons $a_j = D^j\varphi_R/j!$. Puisque $m \leq s$, d'après le lemme 1.4-a

$$\sum_{p=0}^{\infty}\tau^{p+1}a_{sp+m} \ll \sum_{p=0}^{\infty}\tau^{p+1}a_{s(p+1)} \ll \phi(\tau,\xi).$$

Il reste à vérifier que $\sum\limits_{j=0}^{p} a_{s(p-j)+m}a_{sj+m} \ll a_{s(p+1)}$. On a $\sum\limits_{j=0}^{p}\ldots = \sum\limits_{j\in s[0,p]+m} a_{sp+2m-j}a_j$. Vu que $2m \leq s$, on a d'après le lemme 1.4-a et en dérivant $\varphi_R^2 \ll \varphi_R$

$$\sum_{j=0}^{p}\ldots \ll \sum_{j=0}^{s(p+1)} a_{s(p+1)-j}a_j \ll a_{s(p+1)}.\ \square$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que

$$u \ll \Phi \Rightarrow t^l D_t^h \mathcal{Q} u \ll \Phi, \text{ si } |l| = |h| \leq m.$$

Existence et unicité de la solution holomorphe. On pose

$$\varepsilon_{lh} = b_{lh} - b_{lh}(0).$$

On écrit ensuite

$$f(t,x,y) = f(t,x,0) + \sum_{\beta \in B} \frac{\partial f}{\partial y_\beta}(t,x,0) y_\beta + g(t,x,y) \ ;$$

la fonction g est holomorphe au voisinage de l'origine et on a $g(t,x,0) = \dfrac{\partial g}{\partial y_\beta}(t,x,0) \equiv 0$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} &g(t,x,y) - g(t,x,y') \\ &\quad = \sum_{\beta,\gamma \in B} \big(h_{\beta,\gamma}(t,x,y,y') y_\beta (y_\gamma - y'_\gamma) + k_{\beta,\gamma}(t,x,y,y') y'_\gamma (y_\beta - y'_\beta)\big) \end{aligned}$$

où les fonctions $h_{\beta,\gamma}, k_{\beta,\gamma}$ sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'} \times \mathbf{C}^{n'}$. On fixe une fois pour toutes $\eta > 1$, $r_0 \in]r(\zeta), 1[$, $R_0 \in]0, L]$ et $R' > 0$ tels que les fonctions ε_{lh} soient holomorphes dans le polydisque $\Delta_{\eta R_0} = \{x \in \mathbf{C}^n;\ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| < \eta R_0\}$, vérifient

$$r(\zeta) + c(\eta) \sum_{|l|=|h| \leq m} \sup_{\Delta_{\eta R_0}} |\varepsilon_{lh}| \leq r_0$$

et tels que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial y_\beta}(t,x,0), h_{\beta,\gamma}, k_{\beta,\gamma}$ soient holomorphes et bornées par M pour

$$\max_{1 \leq i \leq q} |t_i| < \eta R_0,\ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| < \eta R_0,\ \max_{\beta \in B} |y_\beta| < R',\ \max_{\beta \in B} |y'_\beta| < R'.$$

Dans les majorations qui vont suivre, toute constante qui dépend des paramètres η, r_0, R_0, R', M déjà fixés, sera notée c, sauf mention expresse du contraire.

D'après les inégalités de Cauchy, on a pour tout $0 < R \leq R_0$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{lh} &\ll \sup_{\Delta_{\eta R_0}} |\varepsilon_{lh}| \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}, \\ h_{\beta,\gamma}, k_{\beta,\gamma} &\ll M \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)} \prod_{\beta \in B} \frac{R'}{R' - y_\beta} \frac{R'}{R' - y'_\beta}\end{aligned}$$

et, compte tenu de l'hypothèse (1.5),

$$\frac{\partial f}{\partial y_\beta}(t, x, 0) \ll M\Big(\frac{\eta R_0}{\eta R_0 - \sigma} - 1\Big) \frac{\eta R_0}{\eta R_0 - \xi} = c\sigma \frac{\eta R_0}{\eta R_0 - \sigma} \frac{\eta R_0}{\eta R_0 - \xi},$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial y_\beta}(t, x, 0) \ll c\sigma \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}.$$

Pour tout $a > 0$, nous noterons $B'(0, a)$ la boule fermée de l'espace de Banach B_Φ, $B'(0, a) = \{u \in B_\Phi;\ \| u \| \leq a\}$.

PROPOSITION 1.6. *Soit $a > 0$, il existe $\rho_0 \geq 1$ tel que pour tout $\rho \geq \rho_0$ et tout $0 < R \leq R_0$, l'application $\mathcal{T} : u \mapsto \sum_{|l|=|h|\leq m} b_{lh}(x) t^l D_t^h \mathcal{Q} u + \sum_{\beta \in B} \frac{\partial f}{\partial y_\beta}(t, x, 0) \mathcal{R}_\beta u + g(t, x, \mathcal{R} u)$, de $B'(0, a)$ dans B_Φ, soit lipschitzienne de rapport $r_0 + c\rho^{-1} + c\rho^{-1} a$.*

PREUVE. Soit $u, u' \in B'(0, a)$, alors $\mathcal{T}u - \mathcal{T}u'$ est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_t^q \times \mathbf{C}_x^n$ et il s'agit de la majorer. D'après (1.7), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{T}u - \mathcal{T}u' = \Big(\sum_{(l,h) \in \mathcal{L}} a_{lh}(0) t^l D_t^h \mathcal{Q} + \sum_{|l|=|h|\leq m} \varepsilon_{lh}(x) t^l D_t^h \mathcal{Q} \\ + \sum_{\beta \in B} \frac{\partial f}{\partial y_\beta}(t, x, 0) \mathcal{R}_\beta \Big)(u - u') \\ + \sum_{\beta,\gamma \in B} \big(h_{\beta,\gamma}(t, x, \mathcal{R}u, \mathcal{R}u') \mathcal{R}_\beta u \mathcal{R}_\gamma (u - u') \\ + k_{\beta,\gamma}(t, x, \mathcal{R}u, \mathcal{R}u') \mathcal{R}_\gamma u' \mathcal{R}_\beta (u - u') \big).\end{aligned}$$

Étant donné que $u - u' \ll \| u - u' \| \Phi$ et $u, u' \ll a\Phi$, on a d'après le lemme précédent

$$t^l D_t^h \mathcal{Q}(u - u') \ll \| u - u' \| \Phi,$$
$$\mathcal{R}_\beta(u - u') \ll c\rho^{-1} \| u - u' \| \phi,$$
$$\mathcal{R}_\beta u \mathcal{R}_\gamma(u - u'), \mathcal{R}_\gamma u' \mathcal{R}_\beta(u - u') \ll c\rho^{-1} a \| u - u' \| \Phi$$

et

$$\| \mathcal{R}_\beta u \|_\phi, \| \mathcal{R}_\beta u' \|_\phi \leq c\rho^{-1} a.$$

On choisit $\rho_0 \geq 1$ tel que $c\rho_0^{-1} a \leq R'/2$; alors d'après la proposition 1.3

$$h_{\beta,\gamma}, k_{\beta,\gamma}(t, x, \mathcal{R}u, \mathcal{R}u') \ll M(K+1)^{2n'} \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)} \phi(\tau, \xi).$$

En utilisant le lemme 1.4-*b*, (1.11) et la relation $\phi\Phi \ll \Phi$ (car $\Phi = \sigma\phi$), on obtient

$$\mathcal{T}u - \mathcal{T}u' \ll (r_0 + c\rho^{-1} + c\rho^{-1} a) \| u - u' \| \Phi.$$

Vu que $\mathcal{T}(0) = 0$, il en résulte que les fonctions $\mathcal{T}u$ et $\mathcal{T}u'$ sont bien définies, appartiennent à B_Φ, leur norme étant $\leq (r_0 + c\rho^{-1} + c\rho^{-1} a)a$, et l'application $\mathcal{T}$ vérifie bien l'inégalité $\| \mathcal{T}u - \mathcal{T}u' \| \leq (r_0 + c\rho^{-1} + c\rho^{-1} a) \| u - u' \|$. $\square$

Nous allons en déduire la première conclusion du théorème 1.1. Dans l'espace B_Φ, l'équation (1.9) s'écrit

$$u = \mathcal{T}u + v \text{ où } v(t, x) = f(t, x, 0).$$

En effet, choisissons $0 < R \leq R_0$ tel que la fonction v soit holomorphe et bornée sur le polydisque $D_{\eta R} = \{(t, x) \in \mathbf{C}^q \times \mathbf{C}^n;\ \max_{1 \leq i \leq q} |t_i| < \eta R$ et $\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| < \eta R\}$; de même que pour $\dfrac{\partial f}{\partial y_\beta}$ et d'après le lemme 1.4-*b*, on a

$$v \ll \frac{1}{\eta R} \sup_{D_{\eta R}} |v| \sigma \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)} \ll b(R)\Phi \qquad \text{où} \qquad b(R) = \frac{c(\eta)}{\eta R} \sup_{D_{\eta R}} |v|,$$

autrement dit $v \in B_\Phi$ et $\| v \| \leq b(R)$. Soit $a > b(R)/(1 - r_0)$, pour tout $u \in B'(0, a)$, on a donc

$$\| \mathcal{T}u + v \| \leq \big(r_0 + c\rho^{-1}(1 + a)\big)a + b(R) < a$$

dès que $\rho \geq \rho_0$ est suffisament grand. D'après la proposition 1.6, cela suffit pour que l'application $\mathcal{T}(\bullet) + v : B'(0,a) \to B'(0,a)$ soit une contraction stricte, ce qui prouve le théorème d'existence. On a également l'unicité car, si u et u' sont deux fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q \times \mathbf{C}^n$ vérifiant l'équation (1.9), on peut encore choisir $0 < R \leq R_0$ puis $a > b(R)/(1 - r_0)$ tels que $u, u' \in B'(0,a)$ et $\rho \geq \rho_0$ tel que $\mathcal{T}(\bullet) + v$ soit une contraction stricte dans $B'(0,a)$, ce qui prouve que $u' = u$.

Unicité formelle. Étant donné que $\mathcal{P}(k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^q - \{0\}$, l'opérateur $\mathcal{P}(tD_t)$ est aussi un automorphisme, d'inverse $\mathcal{Q}$, de l'espace vectoriel des séries formelles de $\mathbf{C}[[t,x]]$ qui s'annulent avec t ; l'équation (1.6) est donc équivalente, dans $\mathbf{C}[[t,x]]$, à l'équation (1.9). L'unicité résulte principalement du lemme qui suit. Soit $u \in \mathbf{C}[[t,x]]$ une série formelle, on peut écrire de façon unique u sous la forme $u = \sum_{k \in \mathbf{N}^q} u_k(x) t^k$ où $u_k \in \mathbf{C}[[x]]$.

LEMME 1.7. *Si u vérifie l'équation* (1.9), *alors $u_0 = 0$ et pour tout $k \neq 0$,*

$$u_k = \sum_{\substack{|l|=|h|\leq m \\ l \leq k}} b_{lh}(x) c_{klh} u_{k+h-l} + \frac{1}{k!} \sum_{(\lambda,\mu)\in A_p} D_t^k [t^\lambda \prod_{\beta\in B} (\sum_{\substack{1\leq|k'|<p \\ k'\geq l}} t^{k'} c_{k'\beta} D^\alpha u_{k'+h-l})^{\mu_\beta}]_{|t=0} \times \frac{D_t^\lambda D_y^\mu f(0,x,0)}{\lambda! \mu!} \tag{1.12}$$

où $p = |k|$, $A_p = \{(\lambda, (\mu_\beta)_{\beta\in B}) \in \mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^{n'} ;\ 2 \leq |\lambda| + |\mu| \leq p$ ou $(|\lambda|, |\mu|) = (1,0)\}$, c_{klh} et $c_{k'\beta}$ sont des nombres complexes, le module des c_{klh} étant ≤ 1.

PREUVE. On a $t^l D_t^h \mathcal{Q} u = \sum_{|k|\geq 1, k\geq h} \frac{k!}{(k-h)!} \frac{1}{\mathcal{P}(k)} u_k t^{k+l-h}$ où $\frac{k!}{(k-h)!} \cdot \frac{1}{|\mathcal{P}(k)|} \leq 1$ pour $|h| \leq m$; autrement dit, $t^l D_t^h \mathcal{Q} u = \sum_{|k|\geq 1, k\geq l} c_{klh} u_{k+h-l} t^k$ où $|c_{klh}| \leq 1$, d'où la première partie de (1.12). Soit U une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_t^q \times \mathbf{C}_x^n$ qui s'annule avec t ; l'autre partie de (1.12) se déduit du développement limité à l'ordre p de la fonction $t \mapsto f\big(t,x,\mathcal{R}U(t,x)\big)$ dans lequel A_p est défini d'après (1.5) et $\sum\limits_{1\le|k'|<p}$ peut être substitué à $\sum\limits_{1\le|k'|\le p}$ de la manière suivante.

Si $|\mu|=0$, le résultat est évident ; on peut donc supposer $2\le|\lambda|+|\mu|\le p$. En notant $\xi=(\xi_\beta)_{\beta\in B}$ et $\theta=(\theta_\beta)_{\beta\in B}$ où $\xi_\beta\equiv\sum\limits_{1\le|k'|<p}\dots$ (resp. $\theta_\beta\equiv\sum\limits_{|k'|=p}\dots$) est un polynôme en t de valuation ≥ 1 (resp. $\ge p$), on a

$$(\xi+\theta)^\mu=\xi^\mu+\sum_{\nu<\mu}\binom{\mu}{\nu}\xi^\nu\theta^{\mu-\nu}$$

où chaque terme $\xi^\nu\theta^{\mu-\nu}$ est un polynôme en t de valuation $\ge|\mu|+p-1$; en effet, on a $|\nu|+|\mu-\nu|p=|\mu|p-|\nu|(p-1)\ge|\mu|p+(1-|\mu|)(p-1)=|\mu|+p-1$ car $\nu<\mu$. Par conséquent la valuation de $t^\lambda\xi^\nu\theta^{\mu-\nu}$ est $\ge|\lambda|+|\mu|+p-1\ge p+1$ et donc $D_t^k[t^\lambda\xi^\nu\theta^{\mu-\nu}]_{|t=0}=0$, ce qui prouve le lemme. $\square$

Nous sommes finalement amenés à étudier dans $\mathbf{C}[[x]]$, pour tout $p\in\mathbf{N}^\star$, le système

$$u_k=\sum_{\substack{|l|=|h|\le m\\ l\le k}}b_{lh}(x)c_{klh}u_{k+h-l}+v_k,\ \ |k|=p,$$

c'est-à-dire, d'après (1.7),

$$\begin{aligned}D^\alpha u_k(0)=&\sum_{\substack{(l,h)\in\mathcal{L}\\ l\le k}}a_{lh}(0)c_{klh}D^\alpha u_{k+h-l}(0)\\&+\sum_{\substack{|l|=|h|\le m\\ l\le k}}c_{klh}\sum_{\gamma<\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^{\alpha-\gamma}b_{lh}(0)D^\gamma u_{k+h-l}(0)\\&+D^\alpha v_k(0),\ \ |k|=p.\end{aligned}$$

Notons $N=\operatorname{card}\{k\in\mathbf{N}^q;\ |k|=p\}$ et $X=(X_k)_{|k|=p}$ un élément quelconque de $\mathbf{C}^N$; en munissant cet espace de la norme $\parallel X\parallel=\max\limits_{|k|=p}|X_k|$, il est clair que l'application $X\mapsto(\sum\limits_{(l,h)\in\mathcal{L},l\le k}a_{lh}(0)c_{klh}X_{k+h-l})_{|k|=p}$ est une application linéaire continue de $\mathbf{C}^N$ dans $\mathbf{C}^N$ de norme $\le\sum\limits_{(l,h)\in\mathcal{L}}|a_{lh}(0)|=$

$r(\zeta) < 1$. Autrement dit, quels que soient $p \in \mathbf{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\big(D^\alpha u_k(0)\big)_{|k|=p}$ s'exprime de façon unique en fonction de $\big(D^\gamma u_k(0)\big)_{\substack{|k|=p\\ \gamma<\alpha}}$ et de $D^\alpha v_k(0)$; de tout ce qui précède, nous déduisons que l'équation (1.9) admet une unique solution dans $\mathbf{C}[[t,x]]$, ce qui prouve le point 1 du théorème 1.1.

LE CAS $\mathbf{p_0} > \mathbf{1}$. On définit un automorphisme $\tilde{\mathcal{P}}$ de l'espace vectoriel des séries formelles $u \in \mathbf{C}[[t,x]]$ qui s'annulent avec t en posant

$$\tilde{\mathcal{P}}u = \sum_{|k|\geq 1} \frac{t^k}{k!}\tilde{\mathcal{P}}(k)D_t^k u(0,x) \text{ et } \tilde{\mathcal{P}}(k) = \begin{cases} \mathcal{P}(k) & \text{si } |k| \geq p_0, \\ |k|^m & \text{si } 1 \leq |k| < p_0. \end{cases}$$

Soit $u \in \mathbf{C}[[t,x]]$ une solution formelle de (1.6) telle que les séries $D_t^k u(0,x)$, $|k| < p_0$, soient des séries entières convergentes. On peut écrire

$$u = U_0 + U \quad \text{où } U_0 = \sum_{1\leq |k| < p_0} \frac{D_t^k u(0,x)}{k!} t^k \text{ et } U = \sum_{|k|\geq p_0} \frac{D_t^k u(0,x)}{k!} t^k \ ;$$

la série $U_0 \in \mathbf{C}\{t,x\}$ est une série entière convergente et il s'agit de montrer qu'il en est de même de U. On remarque que $\mathcal{P}(tD_t)U = \tilde{\mathcal{P}}U$ et donc

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{P}}U = \sum\limits_{|l|=|h|\leq m} b_{lh}(x) t^l D_t^h U + \tilde{f}\big(t,x,\mathcal{D}U\big), \\ U = 0 \text{ pour } t = 0, \end{cases}$$

où $\tilde{f}(t,x,y) = -\mathcal{P}(tD_t)U_0(t,x) + \sum\limits_{|l|=|h|\leq m} b_{lh}(x)t^l D_t^h U_0(t,x) + f\big(t,x,\mathcal{D}U_0(t,x)+y\big)$. Il est clair que l'opérateur $\tilde{\mathcal{P}}$ vérifie (1.1) pour $p_0 = 1$ et que cette fonction $\tilde{f}$ vérifie la même hypothèse (1.5) que f. D'après le point 1 du théorème 1.1, on en déduit que U est une série entière convergente, ce qui achève la démonstration du théorème 1.1. □

2. Équation Holomorphe-Gevrey

On se propose d'étendre le théorème 1.1 lorsque les hypothèses d'holomorphie par rapport à x sont remplacées par des hypothèses de régularité Gevrey.

Dans ce paragraphe, x sera une variable de $\mathbf{R}^n$. On se donne une fois pour toutes un réel $d \geq 1$. Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on note $G^d(\Omega)$ l'algèbre des fonctions $a : \Omega \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que, pour une constante $c \geq 0$,

$$\sup_{\Omega} |D^\alpha a| \leq c^{|\alpha|+1} \alpha!^d, \ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n.$$

Si O est un ouvert de $\mathbf{C}_z^p \times \mathbf{R}_x^n$, on note $\mathcal{C}^{\omega,\infty}(O)$ l'algèbre des fonctions $u : O \to \mathbf{C}$ admettant pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ des dérivées partielles $D^\alpha u$ continues sur O et holomorphes en z. Enfin, on note $G^{\omega,d}(O)$ la sous-algèbre des fonctions $u \in \mathcal{C}^{\omega,\infty}(O)$ telles que, pour une constante $c \geq 0$,

$$\sup_{O} |D^\alpha u| \leq c^{|\alpha|+1} \alpha!^d, \ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n.$$

On considère l'équation (1.2) avec les hypothèses suivantes. Les fonctions a_l, a_{lh} sont de classe $G^{\omega,d}$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q \times \mathbf{R}^n$, l'ensemble B vérifie

$$B \subset \{(l,h,\alpha) \in \mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^n;\ |l| \geq |h| \text{ et } |h| + d|\alpha| \leq m\} \ ;$$

la fonction $f(t,x,y)$ est de classe $G^{\omega,d}$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_t^q \times \mathbf{C}_y^{n'} \times \mathbf{R}_x^n$ et les hypothèses $(1.1), (1.3), (1.4)$ sont conservées. On obtient alors le

Théorème 2.1 1. *Si $p_0 = 1$, l'équation* (1.2) *admet une unique solution de classe $G^{\omega,d}$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q \times \mathbf{R}^n$; il s'agit, en outre, de son unique solution formelle de la forme*

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \sum_{k \in \mathbf{N}^q} u_k(x) t^k \ \textit{où les fonctions } u_k \textit{ sont de classe } \mathcal{C}^\infty \\ \textit{dans un même voisinage ouvert de l'origine de } \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

2. *Si $p_0 > 1$ et si u est une solution formelle de l'équation* (1.2) *de la forme* (2.1) *telle que les fonctions u_k, $|k| < p_0$, sont de classe G^d au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$, alors u est une série convergente et sa somme est de classe $G^{\omega,d}$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q \times \mathbf{R}^n$.*

La réduction précédente est encore possible ; elle conduit au cas

$$B \subset \{(l,h,\alpha) \in \mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^n;\ |l| = |h| \le m - d|\alpha|\},\ f \text{ vérifie (1.5)},$$
$$c_0 = 1,\ \zeta = (1,\ldots,1),\ r(\zeta) < 1$$

et ramène l'équation (1.2) à la forme (1.6) où les fonctions b_{lh}, qui vérifient toujours (1.7), sont de classe G^d au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$.

LE CAS $\mathbf{p_0 = 1}$. Pour tout $R > 0$, nous noterons $\mathcal{D}_R$ le polydisque ouvert centré à l'origine de $\mathbf{C}^q$

$$\mathcal{D}_R = \{t \in \mathbf{C}^q; \max_{1\le i\le q} |t_i| < R\}.$$

Étant donné $R > 0$ et Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on désigne par $G^{\omega,d}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}_R \times \Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{D}_R \times \Omega)$ qui sont de classe $G^{\omega,d}$ sur $\mathcal{D}_r \times \Omega$ pour tout $r \in]0, R[$. Le lemme 1.2 prend la forme suivante.

LEMME 2.2. *L'opérateur $\mathcal{P}(tD_t)$ est un automorphisme de l'espace vectoriel des fonctions de $G^{\omega,d}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}_R \times \Omega)$ qui s'annulent avec t ; son inverse $\mathcal{Q}$ est défini par* (1.8).

PREUVE. Montrons d'abord que $\mathcal{P}(tD_t)$ est un endomorphisme. Soit $u \in \mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{D}_R \times \Omega)$, alors $D_t u$ et par conséquent $\mathcal{P}(tD_t)u$ appartiennent à $\mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{D}_R \times \Omega)$; supposons que $u \in G^{\omega,d}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}_R \times \Omega)$ et $u(0,x) = 0$, puis montrons qu'il en est de même de $\mathcal{P}(tD_t)u$. On a

$$D^\alpha \mathcal{P}(tD_t)u(t,x) = \mathcal{P}(tD_t)D^\alpha u(t,x) = \sum_{|k|\ge 1} \frac{t^k}{k!}\mathcal{P}(k)D_t^k D^\alpha u(0,x).$$

Soient $0 < r < s < R$, on a $\sup_{\mathcal{D}_s\times\Omega} |D^\alpha u| \le c^{|\alpha|+1}\alpha!^d$ pour un $c = c(s) \ge 0$ et d'après les inégalités de Cauchy

$$(2.2) \qquad |\frac{t^k}{k!}D_t^k D^\alpha u(0,x)| \le \left(\frac{r}{s}\right)^{|k|} c^{|\alpha|+1}\alpha!^d \text{ pour tout } (t,x) \in \mathcal{D}_r \times \Omega.$$

On note ensuite qu'il existe $c_1 \geq 0$ tel que, pour tout $1 < c_2 < \frac{R}{r}$, on ait $|\mathcal{P}(k)| \leq c_1 c_2^{|k|}$ pour $|k|$ suffisamment grand. Ces considérations prouvent que $\mathcal{P}(tD_t)u \in G^{\omega,d}(\mathcal{D}_r \times \Omega)$, d'où le résultat voulu. Comme dans le lemme 1.2, l'opérateur $\mathcal{P}(tD_t)$ est injectif. Quant à la surjectivité, l'espace $\mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{D}_R \times \Omega)$ est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes $\| u \|_{\alpha,r,K} = \sup\limits_{\mathcal{D}_r \times K} |D^\alpha u|$ où α décrit $\mathbf{N}^n$, r l'intervalle $]0, R[$ et K l'ensemble des parties compactes de Ω ; d'après (2.2) et vu que $|1/\mathcal{P}(k)| \leq 1$, on constate que la série (1.8) converge dans $\mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{D}_R \times \Omega)$ et sa somme appartient à $G^{\omega,d}_{\text{loc}}(\mathcal{D}_R \times \Omega)$. $\square$

Comme précédemment, on en déduit que l'équation (1.6) est équivalente à l'équation (1.9).

L'étude de cette nouvelle équation (1.9) utilise des résultats que nous déduirons du cas précédent ($d = 1$) grâce au lemme qui suit.

Soit $\varphi \in \mathbf{C}[[\tau, \xi]]$ une série formelle, φ s'écrit de façon unique $\varphi = \sum\limits_{p\in\mathbf{N}} \varphi_p \xi^p$ où $\varphi_p \in \mathbf{C}[[\tau]]$; nous noterons indifféremment φ^d ou $(\varphi)^d$ la série formelle

$$\varphi^d = \sum_{p\in\mathbf{N}} \varphi_p p!^{d-1} \xi^p.$$

Lemme 2.3. *Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{R}_+[[\tau, \xi]]$, on a*

a. $$\varphi \ll \psi \Leftrightarrow \varphi^d \ll \psi^d.$$

b. $$\varphi^d \psi^d \ll (\varphi\psi)^d.$$

Preuve. La relation a est évidente. Étant donnés $\varphi_j, \psi_j \in \mathbf{R}_+[[\tau]]$, l'inégalité b qui s'écrit $\sum\limits_{j=0}^{p} \varphi_j \psi_{p-j} (j!(p-j)!)^{d-1} \ll \sum\limits_{j=0}^{p} \varphi_j \psi_{p-j} p!^{d-1}$ est vraie car $j!(p-j)! \leq p!$ et $d \geq 1$. $\square$

Le point a permet par exemple de déduire du lemme 1.4 le

Corollaire 2.4. *Soit $\eta > 1$, il existe $c = c(\eta) > 0$ tel que, pour tout $0 < R \leq L$,*

$$\Big(\frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}\Big)^d \ll c\phi^d(\tau, \xi).$$

Précisons ensuite l'espace de Banach utilisé.

Soient $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C}^q$ et Φ une série formelle

$$\Phi = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \Phi_\alpha(t) \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

où chaque Φ_α est une série entière $\gg 0$ qui converge dans $\mathcal{U}$; soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$, la relation $u \ll \Phi$ est définie ([8]) par

$$u \ll \Phi \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{N}^n,\ \forall x \in \Omega,\ D^\alpha u(t,x) \ll \Phi_\alpha(t). \tag{2.3}$$

En particulier, lorsque u et Φ ne dépendent pas de t,

$$u \ll \Phi \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{N}^n,\ \forall x \in \Omega,\ |D^\alpha u(x)| \leq D^\alpha \Phi(0).$$

On en déduit une autre écriture de (2.3) :

$$u \ll \Phi \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{N}^q,\ D_t^k u(0,x) \ll D_t^k \Phi(0,x).$$

Note. Si Ψ est une série formelle ayant les mêmes propriétés que Φ et si $\Phi \ll \Psi$ (au sens des séries majorantes) alors $u \ll \Phi \Rightarrow u \ll \Psi$.

Rappelons ([8]) que le sous-espace

$$\left\{u \in \mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega);\ \exists c \geq 0,\ u \ll c\Phi\right\}$$

est un espace de Banach pour la norme

$$\min\{c \geq 0;\ u \ll c\Phi\}.$$

Nous utiliserons la série formelle

$$\Phi^d = \sigma \phi^d(\tau, \xi)$$

où $\sigma = t_1 + \cdots + t_q$, $\phi \in \mathbf{R}_+\{\tau, \xi\}$ est défini par (1.10), $\tau = \rho\sigma$, ρ est un paramètre ≥ 1 et $\xi = x_1 + \cdots + x_n$. Étant donné que ϕ converge pour $|\tau|^{1/s} + |\xi| < R$, il en résulte que chaque coefficient $D^\alpha \Phi^d{}_{|x=0} = \sigma D_\xi^{|\alpha|}\phi(\tau,0)|\alpha|!^{d-1}$ de Φ^d est une série entière $\gg 0$ qui converge dans

$$\mathcal{U}_R = \{t \in \mathbf{C}^q;\ \rho(|t_1| + \cdots + |t_q|) < R^s\}.$$

L'espace et la norme associés à la série formelle Φ^d seront notés $\mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\Phi^d}(\mathcal{U}_R \times \Omega)$ et $\|\ \|$. En outre, l'espace $\mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\phi^d}(\mathcal{U}_R \times \Omega), \|\ \|_{\phi^d}$, associé à $\phi^d(\tau,\xi)$ est une algèbre de Banach car $(\phi^d)^2 \ll \phi^d$ d'après (1.11) et le lemme 2.3. Vu que $\phi^d(0) = K^{-1}$, on peut ensuite énoncer la proposition 9.4 de [8] :

Proposition 2.5. *Soient $u \in \mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\phi^d}(\mathcal{U}_R \times \Omega)$ et $R' > 0$ tels que $\| u \|_{\phi^d} < R'$, alors la fonction $R'/(R'-u)$ appartient à l'espace $\mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\phi^d}(\mathcal{U}_R \times \Omega)$ et*

$$\frac{R'}{R'-u} \ll \Big(K + \frac{\| u \|_{\phi^d}}{R' - \| u \|_{\phi^d}}\Big)\phi^d(\tau,\xi).$$

Le lemme suivant permettra de contrôler les dérivations D^α.

Lemme 2.6. *Soit $p \in \mathbf{N}$ et soit ν le plus petit entier $\geq dp$, il existe $c = c(p) > 0$ tel que*

$$D^p(D^j\varphi_R)^d \ll cR^{\nu-p}(D^{j+\nu}\varphi_R)^d \text{ pour tout } j \in \mathbf{N}.$$

Preuve. Cette inégalité s'écrit $D^{j+n+p}\theta(0)(n+p)!^{d-1} \leq cD^{j+n+\nu}\theta(0)n!^{d-1}$, soit

$$\frac{(j+n+p)!}{(j+n+p+1)^2}(n+p)!^{d-1} \leq c\frac{(j+n+\nu)!}{(j+n+\nu+1)^2}n!^{d-1}\ ;$$

vu que $p \leq \nu$, on remarque que

$$\begin{aligned}&\frac{(j+n+p)!}{(j+n+\nu)!}\left(\frac{(n+p)!}{n!}\right)^{d-1}\left(\frac{j+n+\nu+1}{j+n+p+1}\right)^2\\ &\qquad\leq \left(\frac{1}{n+p}\right)^{\nu-p}(n+p)^{p(d-1)}\left(\frac{\nu+1}{p+1}\right)^2\end{aligned}$$

et, vu que $dp \leq \nu$, il suffit de prendre $c = \left(\frac{\nu+1}{p+1}\right)^2$. $\square$

Nous allons déduire du lemme 1.5 le

COROLLAIRE 2.7. *Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $a, a' > 0$, tout $0 < R \leq L$ et tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, la propriété suivante soit vérifiée : soient $u, u' \in \mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{U}_R \times \Omega)$ tels que $u \ll a\Phi^d$ et $u' \ll a'\Phi^d$, alors les fonctions $\mathcal{R}_\beta u, \mathcal{R}_\beta u \mathcal{R}_\gamma u'$ appartiennent à $\mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{U}_R \times \Omega)$ et vérifient*

$$\begin{cases} \mathcal{R}_\beta u & \ll c\rho^{-1} a\phi^d, \\ \mathcal{R}_\beta u \mathcal{R}_\gamma u' & \ll c\rho^{-1} aa'\Phi^d. \end{cases}$$

PREUVE. Rappelons que $\mathcal{R}_\beta u = \sum_{|k|\geq 1, k\geq h} \frac{t^{k+l-h}}{(k-h)!} \frac{D^\alpha D_t^k u(0,x)}{\mathcal{P}(k)}$ et $|l| = |h| \leq m - d|\alpha|$. En notant $U(t,\xi) = a\sigma\phi(\rho\sigma,\xi)$, on a $D_t^k u(0,x) \ll D_t^k(U^d)(0,\xi) = a\rho^{|k|-1}|k|! \frac{(D^{s(|k|-1)}\varphi_R)^d(\xi)}{(s(|k|-1))!}$. Soit ν le plus petit entier $\geq d|\alpha|$, vu que $R^{\nu-|\alpha|} \leq L^{\nu-|\alpha|} = c$, on a d'après le lemme 2.6

$$D^\alpha D_t^k u(0,x) \ll ca\rho^{|k|-1}|k|! \frac{(D^{s(|k|-1)+\nu}\varphi_R)^d(\xi)}{(s(|k|-1))!} = c(D_\xi^\nu D_t^k U(0,\xi))^d,$$

c'est-à-dire $\mathcal{R}_\beta u \ll c(\mathcal{S}_{(l,h,\nu)}U)^d$ où $\mathcal{S}_{(l,h,\nu)}U = \sum_{|k|\geq 1, k\geq h} \frac{t^{k+l-h}}{(k-h)!} \frac{D_\xi^\nu D_t^k U(0,\xi)}{|\mathcal{P}(k)|}$ et $|l| = |h| \leq m - \nu$. D'après le lemme 1.5 et vu le lemme 2.3, on en déduit les résultats voulus. $\square$

Comme précédemment, on peut écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon_{lh} &= b_{lh} - b_{lh}(0), \\ f(t,x,y) &= f(t,x,0) + \sum_{\beta\in B} \frac{\partial f}{\partial y_\beta}(t,x,0) y_\beta + g(t,x,y), \\ g(t,x,y) - g(t,x,y') &= \sum_{\beta,\gamma\in B} \big(h_{\beta,\gamma}(t,x,y,y') y_\beta (y_\gamma - y'_\gamma) \\ &\qquad + k_{\beta,\gamma}(t,x,y,y') y'_\gamma (y_\beta - y'_\beta)\big), \end{aligned}$$

où les fonctions $h_{\beta,\gamma}, k_{\beta,\gamma}$ sont de classe $G^{\omega,d}$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_t^q \times \mathbf{C}_y^{n'} \times \mathbf{C}_{y'}^{n'} \times \mathbf{R}_x^n$. On fixe une fois pour toutes $\eta > 1$, $r_0 \in]r(\zeta), 1[$,

Ω_0 un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{R}^n$, $R_1 \in]0, L]$ et $R' > 0$ tels que les fonctions ε_{lh} appartiennent à $G^d(\Omega_0)$, vérifient

$$r(\zeta) + c(\eta) \sum_{|l|=|h|\leq m} \sup_{\Omega_0} |\varepsilon_{lh}| \leq r_0$$

et tels que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial y_\beta}(t, x, 0), h_{\beta,\gamma}, k_{\beta,\gamma}$ soient de classe $G^{\omega,d}$ et bornées par M dans l'ouvert O défini par

$$t \in \mathcal{D}_{\eta R_1},\ x \in \Omega_0,\ \max_{\beta\in B} |y_\beta| < R',\ \max_{\beta\in B} |y'_\beta| < R'.$$

Remarque 2.8. Toute fonction u de l'espace $G^{\omega,d}(O)$ vérifie, pour une constante $S > 0$, $\sup_O |D^\alpha u| \leq \sup_O |u| S^{-|\alpha|} |\alpha|!^d$, $\forall \alpha \in \mathbf{N}^n$. En effet, il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\sup_O |D^\alpha u| \leq c^{|\alpha|+1} \alpha!^d$ quel que soit $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et il suffit de choisir $S > 0$ indépendant de α tel que $c(cS)^{|\alpha|} \leq \sup_O |u|$ ce qui est toujours possible lorsque $\sup_O |u| > 0$, le cas $u \equiv 0$ étant évident. L'interprétation de cette remarque en série majorante est la suivante. D'après les inégalités de Cauchy, $D^\alpha u \ll \sup_O |u| S^{-|\alpha|} |\alpha|!^d \frac{\eta R_1}{\eta R_1 - \sigma} \prod_{\beta\in B} \cdot \frac{R'}{R' - y_\beta} \frac{R'}{R' - y'_\beta}, \forall \alpha \in \mathbf{N}^n$; ce qui signifie précisement

$$u \ll \sup_O |u| \frac{\eta R_1}{\eta R_1 - \sigma} \Big(\frac{S}{S - \xi}\Big)^d \prod_{\beta\in B} \frac{R'}{R' - y_\beta} \frac{R'}{R' - y'_\beta}.$$

On se donne un $S > 0$ tel que la majoration précédente soit vérifiée pour les fonctions ε_{lh}, $\dfrac{\partial f}{\partial y_\beta}(t, x, 0), h_{\beta,\gamma}, k_{\beta,\gamma} \in G^{\omega,d}(O)$. On choisit ensuite $R_0 \in]0, R_1]$ tel que $\eta R_0 \leq S$.

Dans les majorations qui vont suivre, toute constante qui dépend des paramètres η, r_0, R_0, R', M déjà fixés, sera notée c, sauf mention expresse du contraire.

Pour tout $0 < R \leq R_0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\eta R_1}{\eta R_1 - \sigma} \Big(\frac{S}{S - \xi}\Big)^d &\ll \frac{\eta R}{\eta R - \sigma} \Big(\frac{\eta R}{\eta R - \xi}\Big)^d \\
&\ll \Big(\frac{\eta R}{\eta R - (\sigma + \xi)}\Big)^d \text{ (lemme 2.3-}a\text{)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\varepsilon_{lh} \ll \sup_{\Omega_0} |\varepsilon_{lh}| \Big(\frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)} \Big)^d,$$
$$h_{\beta,\gamma}, k_{\beta,\gamma} \ll M \Big(\frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)} \Big)^d \prod_{\beta \in B} \frac{R'}{R' - y_\beta} \frac{R'}{R' - y'_\beta}$$

et, compte tenu de l'hypothèse (1.5),

$$\frac{\partial f}{\partial y_\beta}(t, x, 0) \ll M \Big(\frac{\eta R_1}{\eta R_1 - \sigma} - 1 \Big) \Big(\frac{S}{S - \xi} \Big)^d = c\sigma \frac{\eta R_1}{\eta R_1 - \sigma} \Big(\frac{S}{S - \xi} \Big)^d,$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial y_\beta}(t, x, 0) \ll c\sigma \Big(\frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)} \Big)^d.$$

Pour tout $a > 0$, on note $B'(0, a)$ la boule fermée de l'espace de Banach $\mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\Phi^d}(\mathcal{U}_R \times \Omega)$, $B'(0, a) = \{u \in \mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\Phi^d}(\mathcal{U}_R \times \Omega);\ \| u \| \leq a\}$.

Proposition 2.9. *Soit $a > 0$, il existe $\rho_0 \geq 1$ tel que pour tout $\rho \geq \rho_0$, tout $0 < R \leq R_0$ et tout ouvert $\Omega \subset \Omega_0$ de $\mathbf{R}^n$, l'application $\mathcal{T}$, de $B'(0, a)$ dans $\mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\Phi^d}(\mathcal{U}_R \times \Omega)$, soit lipschitzienne de rapport $r_0 + c\rho^{-1} + c\rho^{-1}a$.*

Preuve. Soient u et u' deux éléments de $B'(0, a)$, la fonction $\mathcal{T}u - \mathcal{T}u'$ appartient à $\mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{U}_R \times \Omega)$ et il s'agit de la majorer ; on procède alors comme pour la proposition 1.6 en remplaçant dans sa preuve Φ et ϕ par Φ^d et ϕ^d, le lemme 1.5 par le corollaire 2.7, la proposition 1.3 par la proposition 2.5, le lemme 1.4-*b* par le corollaire 2.4 et l'espace B_Φ par l'espace $\mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\Phi^d}(\mathcal{U}_R \times \Omega)$. □

Nous allons en déduire la première conclusion du théorème 2.1. L'équation (1.9) s'écrit

$$u = \mathcal{T}u + v \text{ où } v(t, x) = f(t, x, 0).$$

Comme il a été expliqué pour $\dfrac{\partial f}{\partial y_\beta}$, on choisit un voisinage ouvert $\Omega \subset \Omega_0$ de l'origine de $\mathbf{R}^n$ puis un réel $0 < R \leq R_0$ suffisamment petit tels que v

appartienne à $G^{\omega,d}(\mathcal{D}_{\eta R}\times\Omega)$ et

$$
\begin{aligned}
v &\ll \frac{1}{\eta R}\sup_{\mathcal{D}_{\eta R}\times\Omega}|v|\sigma\Big(\frac{\eta R}{\eta R-(\tau+\xi)}\Big)^d \\
&\ll \frac{c(\eta)}{\eta R}\sup_{\mathcal{D}_{\eta R}\times\Omega}|v|\sigma\phi^d(\tau,\xi)\quad\text{(corollaire 2.4).}
\end{aligned}
$$

Remarquons que $\mathcal{U}_R\subset\mathcal{D}_{\eta R}$; en effet, on a $\rho^{-1}R^s\le R^s\le R\le\eta R$ car $\rho\ge 1$, $s\ge 1$, $R\le R_0\le L\le 1$ et $\eta>1$. Autrement dit, la fonction v appartient à l'espace $\mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\Phi^d}(\mathcal{U}_R\times\Omega)$ et $\| v \|\le b(R)$ où $b(R)=\dfrac{c(\eta)}{\eta R}\sup\limits_{\mathcal{D}_{\eta R}\times\Omega}|v|$. Soit $a>b(R)/(1-r_0)$, comme dans la première partie, $\mathcal{T}(\bullet)+v : B'(0,a)\to B'(0,a)$ est une contraction stricte dès que $\rho\ge\rho_0$ est suffisament grand ; l'équation (1.9) admet donc une solution u dans $B'(0,a)$ c'est-à-dire une solution $u\in\mathcal{C}^{\omega,\infty}(\mathcal{U}_R\times\Omega)$ telle que

$$\forall x\in\Omega,\ D^\alpha u(t,x)\ll a\sigma D_\xi^{|\alpha|}\phi(\tau,0)|\alpha|!^{d-1}.$$

Soit $0<r<R$, étant donné que ϕ converge sur un voisinage de $\{\tau\in\mathbf{C};\ |\tau|\le r^s\}\times\{0\}$, on a

$$|D_\xi^{|\alpha|}\phi(\tau,0)|\le c^{|\alpha|+1}|\alpha|!\text{ pour }|\tau|\le r^s,$$

ce qui entraine que $u\in G^{\omega,d}(\mathcal{U}_r\times\Omega)$, d'où le théorème d'existence. On a également l'unicité ; en effet, si u et u' sont deux fonctions de classe $G^{\omega,d}$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^q\times\mathbf{R}^n$ vérifiant l'équation (1.9), de même il existe un voisinage ouvert $\Omega\subset\Omega_0$ de l'origine de $\mathbf{R}^n$, $0<R\le R_0$, $a>b(R)/(1-r_0)$ tels que $u,u'\in B'(0,a)\subset\mathcal{C}^{\omega,\infty}_{\Phi^d}(\mathcal{U}_R\times\Omega)$ et $\rho\ge\rho_0$ tel que $\mathcal{T}(\bullet)+v$ soit une contraction stricte dans $B'(0,a)$, ce qui prouve que $u'=u$ dans $\mathcal{U}_R\times\Omega$.

Fin de la preuve du théorème 2.1. Soit $\Omega\subset\Omega_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{R}^n$ et soit $p\in\mathbf{N}^\star$. Notons $N=\text{card}\{k\in\mathbf{N}^q;\ |k|=p\}$, $U=(U_k)_{|k|=p}$ un élément quelconque de $\big(\mathcal{C}^\infty(\Omega)\big)^N$, $\mathcal{I}$ l'application identique de cet espace et $\mathcal{B}$ l'application $U\mapsto\big(\sum\limits_{|l|=|h|\le m,l\le k} b_{lh}(x)c_{klh}U_{k+h-l}\big)_{|k|=p}$.

Proposition 2.10. *L'application linéaire $\mathcal{I}-\mathcal{B}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\big(G^d(\Omega)\big)^N$.*

Rappelons (proposition 6.1 de [5]) que si $\varphi \in \mathbf{R}_+\{\xi\}$ vérifie $0 \ll (R-\xi)\varphi(\xi)$, alors

$$\frac{\eta R}{\eta R-\xi}\varphi \ll \frac{\eta}{\eta-1}\varphi. \tag{2.4}$$

On peut bien entendu supposer que les fonctions ε_{lh} vérifient

$$r(\zeta)+c'(\eta)\sum_{|l|=|h|\leq m}\sup_{\Omega_0}|\varepsilon_{lh}| \leq r_0 \text{ pour } c'(\eta)=\frac{\eta}{\eta-1}. \tag{2.5}$$

Étant donné $R \in]0,R_0]$, nous prendrons

$$\varphi(\xi)=\frac{R}{R-\xi} \text{ avec } \xi = x_1+\cdots+x_n.$$

Vu que l'espace

$$\mathcal{C}^\infty_{\varphi^d}(\Omega)=\big\{u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega);\ \exists c\geq 0,\ u\ll c\varphi^d\big\},\ \parallel u\parallel_{\varphi^d}=\min\,\{c\geq 0;\ u\ll c\varphi^d\}$$

est un espace de Banach, il en est de même de l'espace

$$\big(\mathcal{C}^\infty_{\varphi^d}(\Omega)\big)^N=\prod_{|k|=p}\mathcal{C}^\infty_{\varphi^d}(\Omega),\ \parallel U\parallel=\max_{|k|=p}\parallel U_k\parallel_{\varphi^d}.$$

Lemme 2.11. *L'application $\mathcal{B}$: $\big(\mathcal{C}^\infty_{\varphi^d}(\Omega)\big)^N \to \big(\mathcal{C}^\infty_{\varphi^d}(\Omega)\big)^N$ est linéaire continue de norme $\leq r_0 < 1$.*

Preuve. On a $\mathcal{B}U = \sum_{(l,h)\in\mathcal{L},l\leq k} a_{lh}(0)c_{klh}U_{k+h-l} + \sum_{|l|=|h|\leq m,l\leq k}\varepsilon_{lh}(x)c_{klh}U_{k+h-l}$ où $|c_{klh}|\leq 1$, $U_{k+h-l}\ll\parallel U\parallel\varphi^d$ et $\varepsilon_{lh}(x)\ll \sup_{\Omega_0}|\varepsilon_{lh}|\big(\frac{\eta R}{\eta R-\xi}\big)^d$; d'après le lemme 2.3 et la relation (2.4), on constate que la norme de $\mathcal{B}$ se majore par l'expression (2.5), d'où le lemme. □

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.10. Si $V = (V_k)_{|k|=p} \in \big(G^d(\Omega)\big)^N$, il existe $R = R(N) \in]0, R_0]$ tel que $V_k \ll c\big(\frac{R}{R-\xi}\big)^d$, pour tout $k \in \mathbf{N}^q, |k| = p$. Autrement dit, $V \in \big(\mathcal{C}^\infty_{\varphi^d}(\Omega)\big)^N$ et $(\mathcal{I} - \mathcal{B})^{-1}V \in \big(\mathcal{C}^\infty_{\varphi^d}(\Omega)\big)^N \subset \big(G^d(\Omega)\big)^N$, ce qui montre la surjectivité. Si $U \in \big(G^d(\Omega)\big)^N$ vérifie $(\mathcal{I} - \mathcal{B})U = 0$, de même il existe $R \in]0, R_0]$ tel que $U \in \big(\mathcal{C}^\infty_{\varphi^d}(\Omega)\big)^N$; donc $U = 0$ dans Ω, ce qui prouve la proposition. $\Box$

Nous allons en déduire le théorème 2.1. Soit $u = \sum\limits_{k \in \mathbf{N}^q} u_k(x)t^k$ une série formelle à coefficients u_k de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage ouvert $\Omega \subset \Omega_0$ de l'origine de $\mathbf{R}^n$. Si u vérifie (1.6), comme $\mathcal{P}(k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^q - \{0\}$, on peut supposer que u vérifie (1.9). D'après la formule (1.12) et vu que $D_t^\lambda D_y^\mu f(0, x, 0) \in G^d(\Omega)$ pour tout (λ, μ), on déduit de la proposition précédente, par récurrence sur $p \geq 0$, que les $(u_k)_{|k|=p}$ sont déterminés de façon unique dans Ω et appartiennent en fait à l'espace $G^d(\Omega)$; on prouve ainsi l'unicité de la solution formelle de type (2.1) et par conséquent le point 1 du théorème 2.1.

Le point 2 s'en déduit, comme dans la première partie, ce qui termine la démonstration du théorème 2.1. $\Box$

Bibliographie

[1] Baouendi, M. S. and C. Goulaouic, Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. on Pure and Appl. Math. **26** (1973), 455–475.

[2] Baouendi, M. S. and C. Goulaouic, Singular nonlinear Cauchy problems, J. of Diff. Eq. **22** (1976), 268–291.

[3] Gérard, R. et H. Tahara, Solutions holomorphes et singulières d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **29** (1993), 121–151..

[4] Gérard, R. et H. Tahara, Singular nonlinear partial differential equations, Vieweg, Wiesbaden, 1996.

[5] Hamada, Y., Leray, J. et C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle, J. Math. Pures et Appl. **55** (1976), 297–352.

[6] Madi, N. S. and M. Yoshino, Uniqueness and solvability of nonlinear Fuchsian equations, Bull. Sci. Math., 2e Série **114** (1990), 41–60.

[7] Miyake, M., Singular nonlinear partial differential equations of the first order in a complex domain, Séminaire Adjamagbo, Paris 6, Décembre 1997.

[8] Wagschal, C., Le problème de Goursat non linéaire, J. Math. Pures et Appl. **58** (1979), 309–337.

(Received July 1, 1999)

23 allée des rubis
97400 Saint-Denis
La Réunion, France
E-mail: mpongera@univ-reunion.fr