

## *Feuilletages Mesurés et Pseudogroupes d'Isométries du Cercle*

By Paulo GUSMÃO

**Abstract.** Let us consider non transversaly orientable measurable foliations of codimension one, on orientable open manifolds  $M^n$ ,  $n \geq 3$ . We calculated the subgroups of finite type of two groups: one is the fundamental group  $\Pi_1(B\Gamma)$  of the Haefliger's classifying space and the other is the quotient of  $\Pi_1(M)$  by the normal subgroup  $\mathcal{L}'$  generated by free homotopy classes of the loops contained in the leaves. We use these groups to extend the result of G. Levitt to a no-orientable case. This result characterize the finite type groups acting freely on a simply connected 1-manifold by  $C^2$ -diffeomorphism which preserves orientation.

We study the pseudogroups of the isometries of the circle and we calculated the variation of the measure of the orbite space when we modified the length of the domain of the generators.

### I. Introduction

De façon générale, si l'on se donne une variété  $M^n$  munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$ , on peut associer au pseudogroupe d'holonomie  $\Gamma$  de  $\mathcal{F}$  son espace classifiant  $B\Gamma$  introduit par Haefliger (cf. [Hae]). Le groupe fondamental de  $B\Gamma$  est susceptible d'une définition directe (cf.[Salem]): il est le quotient de  $\pi_1(M)$  par le sous-groupe distingué  $\mathcal{L}$  engendré par les classes d'homotopie libre des lacets contenus dans des feuilles et à holonomie triviale.

Désignons par  $\mathcal{L}'$  le sous-groupe distingué de  $\pi_1(M)$  engendré par les classes d'homotopie libre des lacets contenus dans des feuilles.

Dans [Gus], on a étudié le groupe fondamental de  $B\Gamma$  et  $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$  pour les variétés  $M^n$  fermées orientables, ( $n \geq 3$ ) munies d'un feuilletage de codimension 1 non transversalement orientable  $\mathcal{F}$ , mesuré à singularités de Morse, c'est-à-dire, dans le revêtement d'orientation, le feuilletage relevé  $\overline{\mathcal{F}}$  est défini par une 1-forme fermée singulière  $\omega$  où les singularités sont de type Morse (des points critiques non dégénérés pour les primitives locales

de  $\omega$ ). Une *composante minimale* de  $\mathcal{F}$  est par définition un ouvert saturé de  $M^* = M - \text{Sing}\mathcal{F}$  où toutes les feuilles sont denses.

Une composante minimale  $U$  sera appelée *complète* si  $\omega|_{\overline{U}}$  est faiblement complète (cf. [Lev 2]) où  $\overline{U}$  est une composante connexe du relevé de  $U$  dans  $\overline{M}$ . En particulier, si  $p^{-1}(U)$  possède deux composantes connexes,  $\mathcal{F}|_U$  est défini par une 1-forme fermée faiblement complète. On dira aussi qu'une composante minimale complète  $U$  est *orientable* (respect. *non orientable*) si  $\mathcal{F}|_U$  est transversalement orientable (respect. non transversalement orientable).

Nous aurons besoin des résultats suivants:

**THÉORÈME 0.1** [Gus]. *Avec les hypothèses ci-dessus,  $\pi_1(M)/\mathcal{L} \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p} * (\mathbb{Z}^{a_{p+1}} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \dots * (\mathbb{Z}^{a_m} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ou  $a_i \geq 2$  et  $F$  est un groupe libre. De plus, on a une correspondance 1-1 entre les facteurs  $\mathbb{Z}^{a_i}$  et les composantes minimales complètes orientables et entre les facteurs  $\mathbb{Z}^{a_j} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et celles qui ne sont pas orientables.*

**THÉORÈME 0.2** [Gus]. *Si  $(M, \mathcal{F})$  est comme ci-dessus, alors  $\pi_1(M)/\mathcal{L}' \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p}$  avec  $a_i \geq 2$  et de sorte que les facteurs  $\mathbb{Z}^{a_i}$  sont en correspondance 1-1 avec les composantes minimales complètes orientables et,  $F$  est un groupe libre.*

Nous dirons qu'un groupe,  $G$  de type fini est un *proligal* (PROduit Libre de Groupes Abéliens Libres) s'il est isomorphe à un produit  $\mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_f}$ ,  $a_1 \geq \dots \geq a_f \geq 1$ . Un tel isomorphisme n'est pas unique, mais  $f$  et les  $a_i$  sont bien déterminés. Notons  $f = f(G)$ .

**LEMME 0.3** ([Lev 2]). *Soit  $\varphi : G \rightarrow G'$  un épimorphisme. On suppose que  $G$  et  $G'$  sont des proligals et que  $\varphi$  est injectif sur chaque facteur de  $G$  de rang  $\geq 2$ . Alors, ou bien  $\varphi$  est un isomorphisme ou bien  $f(G) > f(G')$ .*

Dans la partie I, on étudie les sous-groupes de type fini de  $\pi_1(B\Gamma)$  et de  $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$  pour les feuilletages non singuliers de codimension un mesurés, non transversalement orientables sur les variétés ouvertes, et on montre que ces sous-groupes sont respectivement comme dans les théorèmes ci-dessus. On utilise ces résultats pour étendre au cas non orientable le résultat de Levitt qui caractérise les groupes de type fini qui agissent librement sur une 1-variété connexe et simplement connexe par  $C^2$ -difféomorphisme qui

préservent l'orientation. La partie II est consacrée aux pseudogroupes d'isométries du cercle où on s'intéresse à la variation de la mesure des espaces des orbites quand on modifie la longueur des intervalles de définition des générateurs. J'aimerais préciser ici que les principales idées de cet article sont originaires de [Lev2] respectivement [Lev 3].

**I.A. Sous-groupes de Type Fini de  $\pi_1(M)/\mathcal{L} = \pi_1(B\Gamma)$  e  $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$**

Dans cette partie,  $\mathcal{F}$  est un feuilletage non singulier de codimension un, non transversalement orientable sur une variété orientable  $M^n$ , sans bord, de dimension quelconque (pas nécessairement compacte) telle que, dans le revêtement d'orientation  $p : \bar{M} \rightarrow M$ ,  $p^*(\mathcal{F})$  soit donné par une 1-forme fermée (non singulière).

**THÉORÈME I.A.1.** *Tout sous-groupe de type fini  $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}$  est un produit libre de groupes dont les facteurs sont des groupes abéliens libres,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et groupes diédraux  $\mathbb{Z}^a \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ( $a \geq 2$ )*

**DÉMONSTRATION.** Quitte à faire un produit par un  $\mathbb{R}^p$ , on peut supposer  $n \geq 4$ . Considérons les immersions  $i : (V^{n-1}, v) \rightarrow (M^n, x)$  où  $V$  est une variété fermée orientable de dimension  $n - 1$  et telle que l'image de  $\pi_1(V, v)$  dans  $\pi_1(M, x)/\mathcal{L}$  est égale à  $H$  et  $i^*\mathcal{F}$  est de Morse. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & (\bar{M}, \bar{x}) \\ & & \downarrow p \\ (V, v) & \xrightarrow{i} & (M, x) \end{array}$$

et soit  $W$  la composante connexe de  $p^{-1}(i(V))$  qui contient  $\bar{x}$ . Puisque  $p : \bar{M} \rightarrow M$  est un revêtement fini,  $W$  est compacte et  $W$  est un revêtement de  $i(V)$  à un ou deux feuillets. Dans le premier cas, on peut relever  $i : (V, v) \rightarrow (M, x)$  i.e il existe  $\varphi_i : (V, v) \rightarrow (\bar{M}, \bar{x})$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & (\bar{M}, \bar{x}) \\ & \nearrow \varphi_i & \downarrow p \\ (V, v) & \xrightarrow{i} & (M, x) \end{array}$$

commute.

Puisque  $i^*\mathcal{F} = \varphi_i^*(p^*\mathcal{F})$ , on obtient que  $i^*\mathcal{F}$  est donné par une 1-forme fermée de Morse, et puisque  $n - 1 \geq 3$ , alors  $\pi_1(V, v)/\mathcal{L}(i^*\mathcal{F})$  est un produit libre de groupes abéliens libres [cf. Lev 2]. Dans le deuxième cas, nous avons une immersion  $i' : (\bar{V}, \bar{v}) \rightarrow (\bar{M}, \bar{x})$  où  $p' : \bar{V} \rightarrow V$  est le revêtement d'orientation de  $(V, i^*\mathcal{F})$  tel que  $i'(\bar{V}) = W$  et qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & & (**) \\
 & & \\
 (\bar{V}, \bar{v}) & \xrightarrow{i'} & (\bar{M}, \bar{x}) \\
 p' \downarrow & & p \downarrow \\
 (V, v) & \xrightarrow{i} & (M, x)
 \end{array}$$

Puisque  $(i')^*(p^*\mathcal{F}) = (p')^*(i^*\mathcal{F})$  est donné par une 1-forme de Morse et  $n - 1 \geq 3$ , on peut appliquer le Théorème 0.1, donc  $\pi_1(V)/\mathcal{L}(i^*\mathcal{F})$  est un produit libre de groupes dont les facteurs sont des groupes abéliens libres,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et des groupes diédraux,  $\mathbb{Z}^a \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $a \geq 2$ .

Pour chaque immersion  $i$  comme ci-dessus, rappelons que  $\pi_1(\bar{V})/\mathcal{L}((p')^*(i^*\mathcal{F}))$  est un produit libre de  $q_i$  groupes abéliens libres; posons  $\bar{d}_i = \bar{d}((p')^*(i^*\mathcal{F})) = q_i - 1$ . Soit  $\bar{d}_0$  la valeur minimale prise par  $\bar{d}_i$ , pour une telle immersion  $i$ .

LEMME I.A.2. *Si  $\bar{d}_i = \bar{d}_0$ , alors l'épimorphisme  $i_* : \pi_1(V, v)/\mathcal{L}(i^*\mathcal{F}) \rightarrow H$  est un isomorphisme*

DÉMONSTRATION. Modulo ce lemme, le Théorème 0.1 implique le Théorème I.A.1.

Si le lemme est faux, il existe dans  $V$  un lacet  $\lambda$  basé en  $v$ , qui ne représente pas un élément de  $\mathcal{L}(i^*\mathcal{F})$ , alors que  $i(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ . Le lacet  $i(\lambda)$  est donc homotope à un produit  $\gamma_1 \dots \gamma_k$  où chaque  $\gamma_i$  se compose d'un chemin  $c_i$  partant de  $x$ , puis d'un lacet  $\delta_i$  dans une feuille et d'holonomie triviale, puis du retour à  $x$  par  $c_i$  parcouru en sens inverse.

Notons par la commutativité du diagramme (\*\*) que  $\bar{\lambda}$  relevé de  $\lambda$  dans  $(\bar{V}, \bar{v})$  est un lacet où  $i'(\bar{\lambda}) = \bar{i}(\lambda)$  est homotope à  $\bar{\gamma}_1 \dots \bar{\gamma}_k$  dans  $(\bar{M}, \bar{x})$  et où chaque  $\bar{\gamma}_i$  est de la forme  $\bar{c}_i^{-1} \bar{\delta}_i \bar{c}_i$ , les  $\bar{c}_i$  étant des chemins partant de  $\bar{x}$  et les  $\bar{\delta}_i$  des lacets contenus dans des feuilles (donc d'holonomie triviale).

Supposons d'abord  $k = 1$ . Nous pouvons alors par une homotopie régulière (fixant  $v$ ) modifier  $i$  dans un voisinage arbitrairement petit de  $\lambda$ , de façon qu'un lacet proche de  $\lambda$  s'envoie sur  $\gamma_1$ . Cette opération a comme effet de modifier  $i'$  au voisinage de  $\bar{\lambda}$ , de façon qu'un lacet proche de  $\bar{\lambda}$ , s'envoie sur  $\bar{\gamma}_1$ . Après cette opération,  $\mathcal{L}((p')^*(i^*\mathcal{F}))$  a strictement augmenté, donc  $\bar{d}_i$  a strictement diminué (d'après le Lemme 0.3) contradiction.

Dans le cas général, nous allons ajouter à  $V$  le bord d'un voisinage régulier de  $\gamma_k$ , de façon à diminuer  $k$ . De façon précise, retirons de  $V$  une petite boule proche de  $v$  mais disjointe de  $\lambda$  et de  $Sing(i^*\mathcal{F})$ , retirons également de  $S^1 \times S^{n-2}$  une petite boule, et réalisons  $K = V \sharp (S^1 \times S^{n-2})$  en collant entre ces deux variétés un tube  $S^{n-2} \times [0, 1]$ .

Etendons  $i$  en une immersion  $j : K \rightarrow M$  en envoyant le tube près de  $c_k$ , et  $S^1 \times S^{n-2}$  près de  $\delta_k$ ; nous supposons de plus que  $j^*\mathcal{F}$  est de Morse et qu'un cercle  $\{S^1 \times point\}$  s'envoie exactement sur  $\delta_k$ . Nous avons ainsi  $\pi_1(K, v) \simeq \pi_1(V, v) * \mathbb{Z}$ , où le générateur  $z$  du facteur  $\mathbb{Z}$  est contenu dans  $\mathcal{L}(j^*\mathcal{F})$  et s'envoie par  $j$  sur  $\gamma_k$ . Notons que l'image de  $\pi_1(K, v)$  dans  $\pi_1(M)/\mathcal{L}(\mathcal{F})$  est encore égale à  $H$  et que l'application naturelle  $\varphi : \pi_1(V, v)/\mathcal{L}(i^*\mathcal{F}) \rightarrow \pi_1(K, v)/\mathcal{L}(j^*\mathcal{F})$  est surjective. L'immersion  $j$  est encore du type considéré plus haut et  $\bar{d}_j = \bar{d}_0$  car  $\bar{\varphi} : \pi_1(\bar{V}, v)/\mathcal{L}((p')^*(i^*\mathcal{F})) \rightarrow \pi_1(\bar{K}, \bar{v})/\mathcal{L}((p')^*(j^*\mathcal{F}))$  est surjective (en fait bijective).

Considérons maintenant dans  $K$  le lacet  $\lambda.z^{-1}$ . Il ne peut pas être dans  $\mathcal{L}(j^*\mathcal{F})$ , car sinon son relevé  $\overline{\lambda.z^{-1}} = \bar{\lambda}.\bar{z}^{-1}$  dans  $(\bar{K}, \bar{v})$  est dans  $\mathcal{L}((p')^*(j^*\mathcal{F}))$  donc,  $\bar{\varphi}$  n'est pas bijective et  $\bar{d}_j < \bar{d}_0$  d'après le Lemme 0.3. Mais  $j(\lambda.z^{-1})$  est homotope à  $\gamma_1 \dots \gamma_{k-1}$ , nous avons donc réussi à diminuer  $k$ .  $\square$

Essentiellement, la même démonstration nous permet d'obtenir le théorème suivant:

**THÉORÈME I.A.3.** *Tout sous-groupe de type fini  $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}'$  est un produit libre de groupes abéliens libres.*

**DÉMONSTRATION.** De la même façon, on peut supposer, quitte à faire un produit par un  $\mathbb{R}^p$ ,  $n \geq 4$ . Considérons les immersions  $i(V^{n-1}, v) \rightarrow (M, x)$ , où  $V$  est une variété fermée orientable de dimension  $n - 1$  et telle que l'image de  $\pi_1(V, v)$  dans  $\pi_1(M, x)/\mathcal{L}'$  soit égale à  $H$  et  $i^*\mathcal{F}$  est de Morse.

De la même façon que dans la démonstration du théorème précédent, on obtient que  $\pi_1(V)/\mathcal{L}'(i^*\mathcal{F})$  est d'après le théorème 0.2, un produit libre de groupes abéliens libres, donc pour  $i$  immersion comme ci-dessus, on peut définir  $d_i = d(i^*\mathcal{F})$  i.e le nombre des facteurs du produit libre moins 1. Soit  $d_0$  la valeur minimale prise par  $d_i$ , pour  $i$  immersion comme ci-dessus.

La même démonstration du Lemme I.A.2, mais cette fois-ci en appliquant le Lemme 0.3 à l'épimorphisme  $\varphi : \pi_1(V, v)/\mathcal{L}'(i^*\mathcal{F}) \rightarrow \pi_1(K, v)/\mathcal{L}'(j^*\mathcal{F})$ , nous permet de démontrer le

LEMME I.A.4. *Si  $d_i = d_0$ , alors l'épimorphisme  $i_* : \pi_1(V, v)/\mathcal{L}'(i^*\mathcal{F}) \rightarrow H$  est un isomorphisme.*

d'où le théorème.  $\square$

COROLLAIRE I.A.5. *Si  $\mathcal{F}$  est sans holonomie, tout sous-groupe de type fini  $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L} = \pi_1(B\Gamma)$  est un produit libre de groupes abéliens libres.*

### I.B. Cas où le Feuilletage $p^*\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$ est sans Holonomie

Considérons d'abord,  $M^n$  ( $n \geq 3$ ) une variété fermée, orientable, munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension un non transversalement orientable, à singularités de Morse. Nous supposons aussi que le feuilletage non singulier  $\mathcal{F}^*$  induit sur  $M^* = M - \text{Sing}\mathcal{F}$  est de classe  $C^2$  et est tel que, dans le revêtement d'orientation transverse,  $p : \overline{M^*} \rightarrow M^*$ ,  $p^*\mathcal{F}^*$  est sans holonomie.

Dans le cas où  $\mathcal{F}$  est transversalement orientable, il existe des exemples où le feuilletage possède des feuilles exceptionnelles, donc il n'est pas conjugué à un feuilletage défini par une 1-forme fermée de Morse. Par contre, G.Levitt a montré [Corollaire IV.4 Lev 1] que si  $\mathcal{F} = i^{-1}(\mathfrak{S})$  où  $i : M^n \rightarrow N^{n+1}$  est une immersion de  $M$  dans une variété ouverte munie d'un feuilletage (non singulier)  $\mathfrak{S}$  de classe  $C^2$  sans holonomie, alors  $\mathcal{F}$  est conjugué à une 1-forme fermée.

Comme conséquence directe de ce résultat, nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION I.B.1. *Supposons que  $\mathcal{F}$  (comme au début de cette section) est de la forme  $i^{-1}(\mathfrak{S})$ , où  $i : M^n \rightarrow N^{n+1}$  est une immersion de  $M$  dans une variété ouverte munie d'un feuilletage  $\mathfrak{S}$  (non singulier), non transversalement orientable de classe  $C^2$  tel que dans le revêtement*

d'orientation  $p : \bar{N} \rightarrow N$ ,  $p^*\mathfrak{S}$  est sans holonomie. Alors, il existe un revêtement de  $(M, \mathcal{F})$  isomorphe à  $(\bar{M}, \bar{\mathcal{F}})$  tel que le feuilletage relevé soit défini par une 1-forme fermée de Morse. En particulier,  $\pi_1(M)/\mathcal{L}$  est comme dans le Théorème 0.1.

DÉMONSTRATION. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & (\bar{N}, \bar{n}) \\ & & \downarrow p' \\ (M, x) & \xrightarrow{i} & (N, n) \end{array}$$

et soit  $W$  la composante connexe de  $(p')^{-1}(i(M))$  qui contient  $\bar{n}$ . Puisque  $\mathcal{F}$  n'est pas transversalement orientable,  $W$  est un revêtement à deux feuillets de  $i(M)$ , donc il existe  $i' : (\bar{M}, \bar{x}) \rightarrow (\bar{N}, \bar{n})$  avec  $i'(\bar{M}) = W$  qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\bar{M}, \bar{x}) & \xrightarrow{i'} & (\bar{N}, \bar{n}) \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ (M, x) & \xrightarrow{i} & (N, n) \end{array}$$

Notons que  $p^*\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}} = (i')^{-1}(p^*\mathfrak{S})$  est comme dans les hypothèses du corollaire cité ci-dessus, donc  $\bar{\mathcal{F}}$  est topologiquement conjugué à un feuilletage  $\mathcal{F}_\omega$  de  $\bar{M}$  défini par une 1-forme fermée i.e il existe un homéomorphisme  $f : (\bar{M}, \bar{x}, \bar{\mathcal{F}}) \rightarrow (f(\bar{M}), f(\bar{x}), \mathcal{F}_\omega)$  qui envoie feuille sur feuille. Ainsi du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (f(\bar{M}), f(\bar{x}), \mathcal{F}_\omega) & \xrightarrow{f^{-1}} & (\bar{M}, \bar{x}, \bar{\mathcal{F}}) \\ & & \downarrow p \\ & & (M, x, \mathcal{F}) \end{array}$$

on obtient que  $((f\bar{M}), f(\bar{x}), \rho)$ ,  $\rho = p.f^{-1}$ , est le revêtement cherché.  $\square$

Supposons maintenant que  $M$  soit une variété orientable quelconque, munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  non singulier de codimension un, non transversalement orientable, de classe  $C^2$ , tel que dans le revêtement d'orientation  $p : \bar{M} \rightarrow M$ ,  $p^*\mathcal{F}$  est sans holonomie.

En raisonnant exactement comme dans le Théorème I.A.1 (resp. Théorème I.A.3), la proposition ci-dessus a comme conséquence les théorèmes suivants:

**THÉORÈME I.B.2.** *Tout sous-groupe de type fini  $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}$  est un produit libre de groupes dont les facteurs sont des groupes abéliens libres,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et des groupes diédraux  $\mathbb{Z}^a \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ( $a \geq 2$ ). Si aucune feuille de  $\mathcal{F}$  n'est localement dense, alors  $H$  est un produit libre dont les facteurs sont des groupes abéliens libres de rang 1 et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

**THÉORÈME I.B.3.** *Tout sous-groupe de type fini  $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}'$  est un produit libre de groupes abéliens libres. Si aucune feuille de  $\mathcal{F}$  n'est localement dense, alors  $H$  est un groupe libre.*

**COROLLAIRE I.B.4.** *Si  $\mathcal{F}$  est sans holonomie, tout sous-groupe de type fini  $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}$  est un produit libre de groupes abéliens libres et, si aucune feuille de  $\mathcal{F}$  n'est localement dense, alors  $H$  est un groupe libre.*

### I.C. Application aux Variétés non Séparées de Dimension 1

Dans cette partie, on montre que la démonstration du théorème V.1 de [Lev 2] s'étend au cas général.

**THÉORÈME I.C.1.** *Soit  $V$  une 1-variété connexe et simplement connexe. Soit  $G$ , un groupe de type fini, agissant librement sur  $V$  par  $C^2$ -difféomorphismes. Alors,  $G$  est un produit libre de groupes abéliens libres. Si aucune orbite n'est localement dense dans  $V$ , alors  $G$  est libre.*

**DÉMONSTRATION.** Si  $G$  préserve l'orientation de  $V$ , c'est exactement le théorème V.1 de [Lev 1]. Nous allons donc traiter le cas où  $G$  ne préserve pas l'orientation de  $V$ .

Fixons sur  $V$  une orientation. Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $r$ -différentiable,  $r \geq 2$  partout de rang 1 (i.e pour tout  $x \in V$   $f'(x) \neq 0$ ) et préservant l'orientation; une telle fonction  $f$  existe toujours (cf. [H.R.]). Soit  $U_i$  une famille dénombrable d'intervalles ouverts recouvrant  $V$ , soit  $U$  l'union disjointe des  $U_i$ , et soit  $\pi : U \rightarrow V$  l'application naturelle. Considérons la variété (non connexe)  $U \times \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ), munie de la forme exacte  $d(f \circ \pi \circ p)$ , où  $p$  est la projection de  $U \times \mathbb{R}^n$  sur  $U$ .



Soit  $(i, j)$  un couple tel que  $U_i$  et  $U_j$  se rencontrent dans  $V$ . Leur intersection est alors un intervalle (car  $V$  est simplement connexe), qui se relève en deux intervalles ouverts  $I_{ij} \subset U_i$  et  $J_{ij} \subset U_j$ . Fixons dans  $\mathbb{R}^n$  une petite boule fermée  $B_{ij}$ , et ôtons de  $U \times \mathbb{R}^n$  les ouverts  $I_{ij} \times \text{int}B_{ij}$  et  $J_{ij} \times \text{int}B_{ij}$ , ainsi que les compacts (peut-être vides)  $\delta I_{ij} \times B_{ij}$  et  $\delta J_{ij} \times B_{ij}$ . La variété obtenue a deux composantes de bord  $I_{ij} \times \delta B_{ij}$  et  $J_{ij} \times \delta B_{ij}$ , que nous recollons par l'identification naturelle.

Effectuons cette chirurgie pour chaque couple  $(i, j)$ , en choisissant des  $B_{ij}$  éloignées les unes des autres dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous obtenons une variété  $N$ , munie d'une forme exacte  $\theta$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  n'appartenant à aucune  $B_{ij}$ . Alors,  $U \times \{x\}$  définit un plongement de  $U$  dans  $N$  transverse à  $\theta$ . La construction a été faite pour que  $U$  rencontre toute feuille de  $\theta$ , et que deux points de  $U$  appartiennent à la même feuille si, et seulement s'ils ont la même image dans  $V$ . Puisque dans  $V$  tout point sépare, toute feuille de  $\theta$  sépare  $N$ , ce qui entraîne que  $\pi_1(N) \simeq \mathcal{L}$ .

Faisons maintenant intervenir l'action de  $G$ . Pour chaque  $g \in G$ , choisissons une famille dénombrable d'applications  $\gamma(g, k) : I(g, k) \rightarrow J(g, k)$  entre intervalles ouverts de  $U$ , de sorte que, étant donnés  $a$  et  $b$  dans  $U$ , il existe un  $k$  avec  $b = \gamma(g, k)(a)$  si et seulement si  $\pi(b) = g.\pi(a)$ .

Pour chaque  $(g, k)$ , la donnée de  $\gamma(g, k)$  nous permet d'effectuer une chirurgie sur  $N$ , comme ci-dessus. Puisque  $G$  ne préserve pas l'orientation de  $V$ , la variété  $M$  obtenue après chirurgie est munie d'un feuilletage non transversalement orienté  $\mathcal{F}$ . L'action de  $G$  étant libre et  $C^2$ ,  $\mathcal{F}$  est sans holonomie et  $C^2$ .

Il y a encore un plongement de  $U$  dans  $M$  transverse à  $\mathcal{F}$  rencontrant toute feuille, mais maintenant deux points de  $U$  sont sur la même feuille si et seulement si leurs images par  $\pi$  sont dans la même orbite de  $G$ .

Nous affirmons que  $\pi_1(M)/\mathcal{L} \simeq G$ . Remarquons d'abord que  $\pi_1(M)$  peut être vu comme le produit libre de  $\pi_1(N)$  avec le groupe libre engendré par les lettres  $\gamma(g, k)$ . On définit alors un épimorphisme  $\lambda$  de  $\pi_1(M)$  dans  $G$  en envoyant  $\pi_1(N)$  sur 1 et  $\gamma(g, k)$  sur  $g$ . Compte tenu du fait que  $\pi_1(N) \simeq \mathcal{L}$ , on voit que le noyau de  $\lambda$  est contenu dans  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ . D'autre part, un élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  s'envoie dans  $G$  sur un élément dont l'action a un point fixe, c'est-à-dire 1, puisque l'action est libre. Le groupe  $G$  est donc un produit libre de groupes abéliens libres, d'après le corollaire I.B.4. Si

aucune orbite n'est localement dense, aucune feuille de  $\mathcal{F}$  n'est localement dense et  $G$  est libre.  $\square$

## II. Pseudogroupe d'Isométries du Cercle

On se donne ici  $k$  applications  $\gamma_i : I_i \rightarrow J_i$  où les  $I_i$  et  $J_i$  sont des intervalles ouverts du cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = C$  et les  $\gamma_i$  sont soit des rotations (partiellement définies), soit des symétries (partiellement définies).

Les orbites du système sont les classes de la relation d'équivalence qui est engendrée par " $y = \gamma_i(x)$  pour  $x \in I_i$ ": deux points sont dans la même orbite si on peut passer de l'un à l'autre en appliquant (un nombre fini de fois) les  $\gamma_i$  et leurs inverses.

Désignons par  $\mathcal{P}(k)$  l'espace des pseudogroupes  $\Gamma$  définis par  $k$  générateurs comme ci-dessus, et si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, s_{p+1}, \dots, s_k)$  où  $\alpha_i|_{I_i} = \gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , sont des pseudorotations, et  $s_j|_{I_j} = \gamma_j$ ,  $j > p$ , sont des pseudosymétries, désignons  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  l'espace des pseudogroupes définis par  $k$  générateurs avec  $\alpha$  fixé.

Etant donné  $\Gamma', \Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$ , posons  $\Gamma \leq \Gamma'$  si  $I_i \subset I_i'$  pour tout  $i$ . Nous avons ainsi un ordre partiel sur chaque  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ .

Si  $I_i = (a_i, b_i)$  avec  $l_i = \text{longueur de } I_i$ , appelons  $\varphi_t \Gamma$  le pseudogroupe défini, pour  $-\min l_i < t < 1 - \max l_i$ , par  $I_i^t = (a_i - t, b_i + t)$  et  $J_i^t = \gamma_i(I_i^t)$ . On obtient ainsi sur  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  un flot partiellement défini et pour  $t \geq 0$   $\varphi_t$  est croissant pour l'ordre ci-dessus.

Dans [Lev 3], G. Levitt a étudié profondément ces systèmes, en considérant uniquement des pseudorotations. Ici, nous proposons, en utilisant certains résultats de [Gus], de dégager essentiellement des propriétés en ce qui concerne la variation de la mesure des espaces des orbites pour des pseudogroupes voisins d'un pseudogroupe  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$ . Le résultat principal est le Théorème II.E.4, fait en collaboration avec D. Gaboriau, qui précise le théorème 2 de [Lev 3] et le généralise au cas non orientable.

### II.A. Structure des Orbites et Interprétation en Terme de Feuilletage

Pour  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  nous noterons  $S^-$  l'ensemble des extrémités gauches (par rapport à l'orientation canonique du cercle) des intervalles  $I_i, J_i$ , et  $S^+$  l'ensemble des extrémités droites. On dira qu'une orbite de  $\Gamma$  est *singulière* si elle contient au moins un point de  $S^-$  ou  $S^+$ , et *régulière* si non.

Soit  $V$  le complémentaire de l'union des orbites singulières finies et  $I$  une composante de l'ouvert  $V$ . Si l'orbite d'un point  $p \in I$  est finie, alors il en est de même pour tout point de  $I$ . L'union de ces orbites sera appelée une *famille d'orbites finies*. S'il existe  $p \in I$  et un mot  $m$  tel que  $m(p) = p$  et  $sign(m) = -1$  (pour tout mot  $m$ ,  $sign(m) \in \{+1, -1\}$ ,  $+1$  si  $m$  préserve l'orientation de  $C$  et  $-1$  si non), on appellera la famille en question *famille d'orbites finies non orientables*; si n'est pas le cas, on l'appellera *famille d'orbites finies orientables*.

Remarquons que le fait de l'appeler orientable ne signifie pas que tous les mots définis sur les points de la famille préservent l'orientation de  $C$ . Notons aussi qu'une telle famille se compose d'un nombre fini d'intervalles ouverts, dont, dans le cas orientable (respectivement non orientable), la longueur commune (respectivement la moitié de cette longueur), est l'*épaisseur* de la famille.

Soit  $I$  une composante de  $V$  ne rencontrant aucune orbite finie. On montre que le saturé  $U$  de  $I$  est une réunion de composantes de  $V$ , et que toute orbite contenue dans  $U$  y est dense; pour cette raison, nous appellerons  $U$  une *composante minimale*.

Pour cela, on utilise la construction de somme connexe dans [A.L] pour représenter  $\Gamma$  comme pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage mesuré  $\mathcal{F}$  non transversalement orientable à singularités de Morse sur une variété fermée  $M^n$ , ( $n \geq 3$ ) et dont  $C$  est une transversale fermée rencontrant toute les feuilles de  $\mathcal{F}$ .

Rappelons cette construction: Sur  $S^1 \times S^{n-1}$ ,  $n \geq 3$ , considérons des relevés disjoints  $I_i' = I_i \times \{p_i\}$  et  $J_i' = J_i \times \{q_i\}$  des  $I_i, J_i$  et munissons  $S^1 \times S^{n-1}$  de la forme non singulière  $dt$  définie par le facteur  $S^1$ . Pour chaque couple  $(I_i', J_i')$ , faisons la chirurgie suivante: Soit  $B \subset \mathbb{R}^n$  la boule de rayon  $T + 2\epsilon$  centrée à l'origine (avec  $\epsilon > 0$  petit), où  $T = longueur I_i' = longueur J_i'$ , et  $\varphi_{I_i'}$  un difféomorphisme de  $B$  sur un voisinage  $B_{I_i'}$  de  $I_i'$  tel que  $\varphi_{I_i'}^{-1}(I_i') = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 = \dots = x_{n-1} = 0; |x_n| \leq T\}$  et  $\varphi_{I_i'}^*(dt) = dx_n$ . Choisissons de même  $\varphi_{J_i'} : B \rightarrow B_{J_i'}$ , sauf si  $p < i \leq k$ , dont le cas on choisit  $\varphi_{J_i'}$  tel que  $\varphi_{J_i'}^*(dt) = -dx_n$ . Prenons tous ces voisinages disjoints.

Soit  $h : [T, T + \epsilon] \rightarrow [0, \epsilon]$  une fonction concave  $C^\infty$ , telle que  $h(r) = 2(r - T)$  pour  $r$  voisin de  $T$  et  $h(r) = \epsilon$  pour  $r$  voisin de  $T + \epsilon$ . On considère dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  l'ensemble  $Z = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \epsilon t^2 = h(\|x\|); T \leq \|x\| \leq T + \epsilon\}$  (voir Fig.1). C'est une hypersurface difféomorphe à  $S^{n-1} \times [0, 1]$ , et la

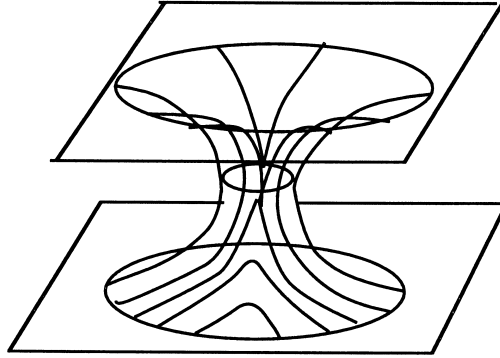


Fig. 1

restriction à  $Z$  de la fonction coordonnée  $x_n$  est une fonction de Morse possédant deux points critiques, l'un d'indice 1 en  $(0, \dots, -T, 0)$ , l'autre d'indice  $n - 1$  en  $(0, \dots, T, 0)$ .

Enlevons de  $B_{I'_i}$  l'image par  $\varphi_{I'_i}$  de la boule ouverte de rayon  $T + \epsilon$ , et à la place recollons-y  $Z$  par son bord inférieur en identifiant, pour  $\|x\| = T + \epsilon$ , le point  $(x, -1) \in Z$  avec le point  $\varphi_{I'_i}(x) \in B_{I'_i}$ . Effectuons la même opération sur  $B_{J'_i}$ , en recollant cette fois le bord supérieur de  $Z$ .

Cette opération a eu pour effet (localement) sur les feuilles, de faire la somme connexe de la feuille passant par un point de  $I'_i$  avec celle passant par le point correspondant de  $J'_i$ ; les feuilles passant par les extrémités de  $I'_i$  et  $J'_i$  ont acquis une singularité conique et ont été attachées deux à deux à la singularité. Nous avons obtenu, ainsi, une variété fermée  $M$  munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  mesuré non transversalement orientable, avec  $2k$  singularités coniques, et sur une courbe transverse  $S^1 \times \{p\}$  deux points  $(x, p), (y, p)$  appartenant à des feuilles régulières sont sur la même feuille si et seulement si  $x$  et  $y$  sont dans la même orbite pour  $\Gamma$ , en particulier, feuille compacte=orbite régulière finie et feuille presque compacte=orbite singulière finie. Les composantes minimales de  $\Gamma$ , au sens ci-dessus, correspondent aux composantes minimales de  $\mathcal{F}$  au sens  $U$ , ouvert saturé où toute feuille est dense.

Réciproquement, si  $M^n$  ( $n \geq 3$ ) est une variété fermée et si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de classe  $C^2$  non transversalement orientable, mesuré à singularités de

Morse qui contient un cercle plongé transverse à toutes les feuilles, le pseudogroupe d'holonomie induit sur le cercle est un pseudogroupe d'isométries.

Pour chaque singularité conique  $s$ , il existe un voisinage  $U_s$  de  $s$  tel que  $\mathcal{F}|_{U_s}$  est défini par une 1-forme de Morse exacte  $df_s$  et tel que  $s$  est un point critique de  $f_s$  d'indice  $n-1$ . Pour chaque  $s$ , choisissons une fonction "bosse"  $g_s : M \rightarrow [0,1]$  de classe  $C^\infty$ , égale à 1 sur un petit voisinage  $U'_s \subset U_s$  de  $s$  et à zéro en dehors d'un voisinage un peu plus grand. Pour  $\epsilon > 0$ , perturbons  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{F}_\epsilon$  en approchant chaque  $df_s$  par  $df_s(\epsilon) = df_s \pm \epsilon dg_s$ . Cette perturbation a pour effet de diminuer ou d'agrandir la longueur des domaines de définition des générateurs du pseudogroupe selon qu'on perturbe par  $\epsilon$  ou  $-\epsilon$ .

On peut ainsi interpréter le Théorème II.E.4 comme la variation de la mesure de l'espace des feuilles d'un tel feuilletage par perturbations, comme ci-dessus.

**II.B. Définition de  $e(\Gamma)$**

La structure décrite ci-dessus rend évidente l'égalité des nombres suivants:

- la somme des épaisseurs des familles d'orbites finies de  $\Gamma$
- la borne inférieure de  $\mu(W)$  où  $W$  est un ouvert rencontrant toute orbite et  $\mu$  est la mesure de Lebesgue.

Leur valeur commune sera notée  $e(\Gamma)$ . Bien sûr,  $0 \leq e(\Gamma) \leq 1$ , avec  $e(\Gamma) = 0$  si et seulement si les orbites finies sont en nombre fini, ou encore si et seulement s'il n'y a pas d'orbite régulière finie.

**II.C. Composantes Minimales Complètes**

Supposons d'abord que  $C$  soit une composante minimale; dans ce cas, on dit que  $\Gamma$  est minimal. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- $\Gamma(x) = P(x)$  pour tout  $x \in C$  ( $P$  est le sousgroupe de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  engendré par  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, s_{p+1}, \dots, s_k)$ ).
- $y \in \Gamma(x) \Rightarrow$  soit a)  $y + t \in \Gamma(x + t) \forall t$ , soit b)  $y - t \in \Gamma(x + t) \forall t$ .

Si elles sont satisfaites, nous dirons que  $\Gamma$  est engendré par l'action de  $P$ , ou encore que  $\Gamma$  est équivalent à un groupe .

Si  $\Gamma$  est minimal mais non équivalent à un groupe, alors toutes les orbites de  $\varphi_t \Gamma$  (cf. début du chapitre) sont finies pour  $t < 0$ , tandis que  $\varphi_t \Gamma$  est équivalent à un groupe pour  $t > 0$ ; c'est une conséquence immédiate du lemme suivant:

LEMME II.C.1. Soit  $\Gamma$  un pseudogroupe d'isométries de  $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et  $\Gamma' \subset \Gamma$  un sous-pseudogroupe. On suppose qu'il existe  $\delta > 0$  tel que si  $x, y$  sont dans la même orbite de  $\Gamma'$ , alors soit  $y+t \in \Gamma(x+t)$ , soit  $y-t \in \Gamma(x+t)$  pour tout  $t \in [0, \delta]$ . Si  $\Gamma$  agit minimalement et si  $\Gamma'$  possède une orbite localement dense (en particulier, si  $\Gamma'$  agit minimalement), alors  $\Gamma$  est un groupe d'isométries.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que  $\Gamma'$  possède une orbite dense et que si  $x, y$  sont dans la même orbite pour  $\Gamma'$  alors soit  $y+t \in \Gamma(x+t)$ , soit  $y-t \in \Gamma(x+t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Il existe alors dans le groupe d'isométries de  $C$  un sous-groupe dense  $G_0$  tel que  $x \in C$  et  $g_0 \in G_0 \Rightarrow g_0x \in \Gamma(x)$ .

Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma$  défini sur un intervalle ouvert  $I \subset C$ , et appelons  $R$  l'isométrie dont  $\gamma$  est la restriction. Etant donné  $y \in C$ , il existe  $g_0 \in G_0$  tel que  $g_0$  préserve l'orientation et  $g_0y \in I$ . On a alors  $g_0y \in \Gamma(y)$ , d'où  $Rg_0y \in \Gamma(y)$ . Si  $R$  est une symétrie, nous avons  $Ry = g_0Rg_0y \in \Gamma(y)$ , et si  $R$  est une rotation, nous avons  $Ry = g_0^{-1}Rg_0y \in \Gamma(y)$ , ce qui montre que  $\Gamma$  est un groupe d'isométries.

Dans le cas général, soit  $J \subset C$  un intervalle dans lequel une orbite  $\Gamma'(p)$  est dense, et soient  $a, b$ , deux points de  $J \cap \Gamma'(p)$  dont la distance est plus petite que  $\delta$ . On vérifie que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  induisent sur le cercle  $\overline{C} = [a, b]/a \sim b$  des pseudogroupes  $\overline{\Gamma}$  et  $\overline{\Gamma}'$ .

Le choix de  $a$  et  $b$  entraîne de plus que  $\overline{\Gamma}$  et  $\overline{\Gamma}'$  vérifient sur  $\overline{C}$  les hypothèses du cas particulier ci-dessus, donc  $\overline{\Gamma}$  est un groupe d'isométries. De la minimalité de  $\Gamma$ , on déduit que  $\Gamma$  est aussi un groupe d'isométries.  $\square$

Disons maintenant qu'une composante minimale  $U$  est *complète* si la propriété suivante est vérifiée: étant donnés deux intervalles  $[x-t, x+t]$  et  $[y-t, y+t]$  contenus dans  $U$ , on a  $y \in \Gamma(x)$  si, et seulement si, soit  $y-t \in \Gamma(x+t)$ , soit  $y+t \in \Gamma(x+t)$ . De plus, si la première condition (respectivement la deuxième) est vérifiée, on dira que  $U$  est une *composante minimale complète non orientable* (respectivement *complète orientable*).

Si  $x$  est contenu dans une composante minimale non complète, alors pour  $t < 0$  l'orbite de  $x$  pour  $\varphi_t\Gamma$  est finie; pour  $t > 0$ , le point  $x$  appartient à une composante complète de  $\varphi_t\Gamma$ .

## II.D. Le Groupe $\pi_1(C/\Gamma)$ et l'Entier $c = 2d$

On peut associer à un pseudogroupe  $\Gamma$  quelconque son espace classifiant

$B\Gamma$  (cf.[section 0]), donc son groupe fondamental  $\pi_1(B\Gamma)$ . On a vu que si  $\Gamma$  est le pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété  $M$ , on obtient  $\pi_1(B\Gamma)$  en quotientant  $\pi_1(M)$  par le sous-groupe distingué  $\mathcal{L} \subset \pi_1(M)$ , engendré par les classes d'homotopie libre des lacets contenus dans des feuilles et d'holonomie triviale (cf.[Salem]).

Pour un pseudogroupe d'isométries  $\Gamma$  sur  $C$ , nous désignerons  $\pi_1(C/\Gamma) = \pi_1(B\Gamma)$ . D'après la *section 0*, si  $\Gamma$  est donné par des générateurs  $\gamma_i$ , ( $1 \leq i \leq k$ ), la formule  $\pi_1(B\Gamma) = \pi_1(M)/\mathcal{L}$  conduit à la présentation suivante par générateurs et relations: sur le revêtement universel  $\mathbb{R}$  de  $C$ , on relève chaque  $\gamma_i$ ,  $i \leq p$  en une translation que nous appellerons aussi  $\gamma_i : I'_i \rightarrow J'_i$  avec  $longueur(I'_i) = longueur(J'_i) = longueur(I_i)$ , et pour  $p + 1 \leq i \leq k$  en une symétrie (aussi appelé  $\gamma_i : I'_i \rightarrow J'_i$  et avec les mêmes propriétés par rapport aux longueurs des intervalles de définition) par rapport à un point  $q'_i \in \mathbb{R}$ , relevé d'un point fixe  $q_i \in C$  pour la symétrie  $s_i$  dont la restriction définit  $\gamma_i$ . Soit, d'autre part,  $\gamma_0$  la translation  $x \mapsto x + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

Comme générateurs de  $\pi_1(C/\Gamma)$ , on prend  $k + 1$  lettres  $t_0, t_1, \dots, t_k$ . Les relations sont les mots en  $t_i$  et  $t_i^{-1}$  tels que l'élément correspondant de  $\Gamma'$  (pseudogroupe ainsi obtenu après relèvement) soit défini et égal à l'identité sur un ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ .

Traduisons maintenant en termes de  $\pi_1(C/\Gamma)$  certains résultats de [Gus]. D'après le théorème I.1 de [Gus] et du fait que  $\Gamma$  peut être réalisé comme pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage mesuré non transversalement orientable à singularités de Morse sur une variété fermée  $M^n$ , ( $n \geq 3$ ), nous avons  $\pi_1(C/\Gamma) \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p} * (\mathbb{Z}^{a_{p+1}} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \dots * (\mathbb{Z}^{a_m} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , où  $a_i \geq 2$ , les facteurs  $\mathbb{Z}^{a_i}$  correspondent bijectivement aux composantes minimales complètes orientables de  $\Gamma$  et les facteurs  $\mathbb{Z}^{a_i} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  aux composantes minimales complètes non orientables de  $\Gamma$ .

Définissons maintenant un 1-complexe  $K$  de la façon suivante: Soit  $S^-$  (resp.  $S^+$ ) l'ensemble des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles  $I_i, J_i$ . Considérons le 1-complexe  $T$  dont les sommets sont les points de  $S^- \amalg S^+$  (union disjointe) et les arêtes au nombre de  $2k$  reliant un point de  $S^- \amalg S^+$  à son correspondant par le générateur qui lui est associé; chaque composante connexe de  $T$  est constituée de deux sommets et d'une arête. Introduisons sur les *somT* la relation d'équivalence suivante: Si  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{+1, -1\}$ , nous allons identifier deux sommets  $s_1^{\epsilon_1}, s_2^{\epsilon_2}$  s'ils sont

dans la même orbite pour  $\Gamma$ , et en plus, s'il existe un mot  $m$  (dans les  $\gamma_i, \gamma_i^{-1}$ ) avec  $m(s_1^{\epsilon_1}) = s_2^{\epsilon_2}$  tel que  $sign(m) = \epsilon_1 \epsilon_2$  où  $sign(m) = +1$  si  $m$  préserve l'orientation canonique de  $C$ , et  $-1$ , si non. On définit alors  $K = T / \sim$  et  $c = s - \beta_0$  où  $s = \text{nombre de sommets de } K$  et  $\beta_0 = \text{nombre de composantes connexes de } K$ .

Voici une autre définition de  $c$  (cf. Théorème I.5 de [Gus]); dans  $\pi_1(C/\Gamma)$  soit  $k = \text{rang}(F)$  et  $\ell = \text{nombre de facteurs } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Si  $d = k + m + \frac{\ell}{2} - 1$ , alors  $c = 2d$ .

Si  $\Gamma$  est minimal et équivalent à un groupe, alors  $c = 0 = d$  car  $\pi_1(C/\Gamma) \simeq \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

En restriction à un  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  fixé, la fonction  $c$  est clairement décroissante, donc la fonction  $c_\Gamma : t \mapsto c(\varphi_t \Gamma)$  est décroissante; on peut, en fait, montrer qu'elle est aussi continue à gauche: en effet, si on regarde en terme de feuilletage, pour  $t > 0$  petit, faire  $\varphi_t \Gamma$  correspond à perturber le feuilletage associé à  $\gamma$ , au voisinage des singularités coniques comme dans la démonstration du théorème 0.1 [Gus], donc  $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}$  pour  $t$  petit et  $\pi_1(M)/\mathcal{L}_t = \pi_1(M)/\mathcal{L}$ . En particulier l'ensemble  $A = \{t; c_\Gamma(t) \text{ change de valeur}\}$  est fini. On sait, en plus, que si  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  est tel qu'il existe un voisinage de  $\Gamma$  où  $c$  est constant, alors toutes les composantes minimales de  $\Gamma$  sont complètes (Lemme I.4 [Gus 0]).

## II.E. La Fonction $e$

Soient  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ ,  $T$  et  $K$  les 1-complexes définis ci-dessus. Nous allons montrer que le lemme II.1 et le corollaire II.2 de [Lev 3] s'étendent au cas général.

Nous allons dire qu'un point  $p \in C$  est un point de *flip* s'il existe un mot  $m$  tel que  $m(p) = p$  et  $m$  réinverse l'orientation de  $C$ . Comme conséquence du théorème I.3 de [Gus], nous avons la proposition suivante:

**PROPOSITION II.E.1.** *Le nombre d'orbites qui contient un flip est égal à  $\ell + 2^{p+1} + \dots + 2^m$ .*

**LEMME II.E.2.** *Supposons que à chaque fois que deux sommets  $s_1, s_2$  de  $T$  sont dans la même orbite pour  $\Gamma$ , dans  $K$  ils sont dans la même classe; en plus, supposons que toutes les composantes minimales de  $\Gamma$  soient complètes. Alors  $e(\varphi_t \Gamma) = e(\Gamma) - tc(\Gamma) = e(\Gamma) - 2td(\Gamma)$  pour  $t > 0$  assez petit.*



DÉMONSTRATION. Prenons  $t > 0$  assez petit pour que les intervalles  $[a-t, a[$  et  $]b, b+t]$ ,  $a \in S^-$  et  $b \in S^+$  ne rencontrent aucune orbite singulière finie.

La première hypothèse du lemme a la conséquence suivante: Si  $b \in S^+$  avec  $\Gamma(b)$  finie, alors pour  $0 \leq \delta \leq t$ , nous avons: soit la cardinalité  $\sharp\Gamma(b+\delta) = 2\sharp\Gamma(b)$ , soit  $\sharp\Gamma(b+\delta) = \sharp\Gamma(b)$ , selon que  $b$  est un point de *flip* ou non; de plus, si  $x \in \Gamma(b+\delta)$  alors, soit  $x = y + \delta$ , soit  $x = y - \delta$  ( $y \in \Gamma(b)$ ), selon que le mot qui envoie  $b$  sur  $y$  préserve ou réinverse l'orientation de  $C$ . De façon analogue, si  $a \in S^-$  avec  $\Gamma(a)$  finie, nous avons la même chose en remplaçant  $b + \delta$  par  $a - \delta$ . Ainsi, à chaque  $s \in S^- \amalg S^+$  avec  $\Gamma(s)$  finie, on peut associer la famille  $f_s$  d'orbites finies qui contient soit  $]s, s+t]$ , soit  $[s-t, s[$ , selon que  $s \in S^+$  ou  $s \in S^-$ .

Soit maintenant  $b \in S^+$  avec  $\Gamma(b)$  infinie. Dans ce cas,  $]b, b+t]$  est contenu dans une composante minimale  $U(b)$ . Si  $b$  et  $s$  sont deux sommets dans une même composante de  $K$  avec  $\Gamma(s)$  infinie, on a soit  $s - \epsilon \in \Gamma(b - \epsilon)$ , soit  $s + \epsilon \in \Gamma(b - \epsilon)$ , selon que  $s \in S^+$  ou  $s \in S^-$ ,  $\epsilon > 0$  assez petit. On en déduit que  $U(b) = U(s)$ ; en fait,  $\Gamma(b) = \Gamma(s)$  car par hypothèse,  $U(b)$  est complète. Evidemment, il y a un résultat analogue pour  $a \in S^-$  avec  $\Gamma(a)$  infinie.

Il est maintenant clair que, quand on passe de  $\Gamma$  à  $\varphi_t\Gamma$ , la diminution de  $e$  est exactement  $tc(\Gamma)$ .  $\square$

Notons  $c_\Gamma(t) = c(\varphi_t\Gamma)$ , et  $e_\Gamma(t) = e(\varphi_t\Gamma)$ . Rappelons que  $c_\Gamma$  est décroissante et continue à gauche.

COROLLAIRE II.E.3. *Pour  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , la fonction  $e_\gamma$  est linéaire par morceaux, de dérivée à gauche  $-c_\gamma$ . Elle est donc convexe.*

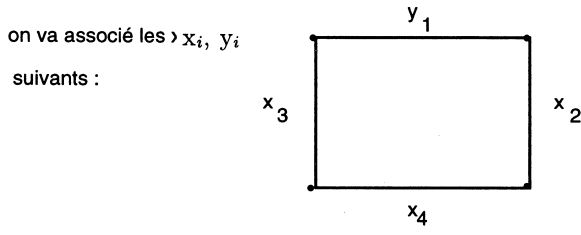
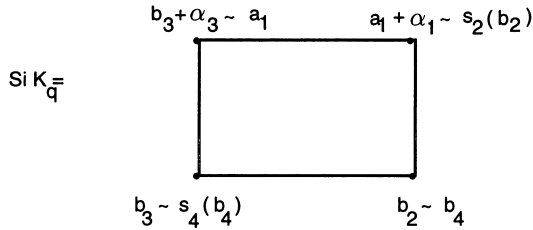
DÉMONSTRATION. En prenant  $C$  de mesure 1, soit  $\overline{P}$  le groupe engendré par  $(\alpha_0 = 1, \dots, \alpha_k)$  où pour  $i > 0$ ,  $\alpha_i |_{I_i} = \gamma_i$ . L'ensemble des  $t$  tels que  $\varphi_t\Gamma$  ne vérifie pas les hypothèses du lemme II.E.2 est, au plus, dénombrable: en effet, la première condition est automatiquement vérifiée en dehors d'un nombre fini de classes modulo  $\overline{P}$ . Une autre façon de dire est: si  $(M^n, \mathcal{F})$  est une variété feuilletée dont le pseudogroupe d'holonomie est  $\Gamma$  (cf. II.E.2) et  $(\overline{M}, \overline{\mathcal{F}})$  le revêtement d'orientation, le feuilletage relevé  $\overline{\mathcal{F}}$  est défini par une 1-forme fermée de Morse  $\omega$ ; le passage de  $\Gamma$  à  $\varphi_t\Gamma$  correspond à perturber  $\overline{\mathcal{F}}$  défini par  $\omega$  à un feuilletage  $\overline{\mathcal{F}}_t$  défini par

$\omega_t = \omega - \sum_{s_{n-1}} tdf_{s_{n-1}} + \sum_{s_1} tdf_{s_1}$  où  $s_1$  (resp.  $s_{n-1}$ ) parcourent l'ensemble des singularités d'indice 1 (resp.  $n-1$ ) (cf; démonstration du théorème 0.1). L'ensemble des  $t$  tels que  $\varphi_t\Gamma$  ne vérifie pas la première condition du lemme II.E.2 est contenu dans ce cas, dans l'ensemble des  $t$  tels que  $\overline{\mathcal{F}_t}$  possède des liaisons entre singularités d'indice 1 et  $n-1$ . On peut donc voir que cette première condition est automatiquement vérifiée en dehors d'un nombre fini de classes modulo le groupe des périodes de  $\omega$ ,  $P(\omega)$ .

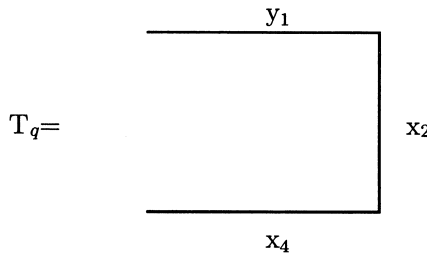
La deuxième condition est vérifiée, pourvu que  $t \notin A$  (cf. II.D). Dans chaque intervalle où  $c_\Gamma$  est constant, la fonction continue  $e_\Gamma + tc_\Gamma$  ne prend ainsi qu'un ensemble dénombrable de valeurs. Elle est donc constante.  $\square$

Considérons maintenant un pseudogroupe  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  tel que  $c(\Gamma) = 2d(\Gamma)$  est constant sur un voisinage de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ ; soient  $x = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_k)$  proches de zéro. Si  $\Gamma$  est défini par les  $I_i = (a_i, b_i)$ ,  $J_i = \gamma_i(a_i, b_i)$ , soit  $\Gamma(x, y)$  le pseudogroupe défini par  $I_i(x, y) = (a_i - y_i, b_i + x_i)$ ,  $J_i(x, y) = \gamma_i(I_i(x, y))$ . Notons que si  $\gamma_i$  est une symétrie, alors  $\gamma_i(a_i - y_i, b_i + x_i) = (\gamma_i(b_i) - x_i, \gamma_i(a_i) + y_i)$  (par abus de notation car les  $\gamma_i$  ne sont pas définis sur les extrémités des intervalles).

Fixons un ordre sur les  $x_i$  et  $y_i$ ; maintenant, pour chaque composante connexe  $K_q$  de  $K$ , on associe à chaque arête  $z$  de  $K_q$  correspondant à un générateur  $\gamma_i$ , soit un  $x_i$ , soit un  $y_i$ , selon que les sommets de  $z$  sont soit  $b_i, \gamma_i(b_i)$ , soit  $a_i, \gamma_i(a_i)$ . Par exemple:



Ensuite, regardons l'ordre des  $x_i$  et  $y_i$  en question (dans l'exemple supposons  $x_1 < x_4 < x_2 < y_1$ ), et choisissons l'arbre maximal  $T_q$  de  $K_q$  de la façon suivante: pour simplifier on suppose qu'on n'a que des  $x_i$  associés à  $K_q$  avec, par exemple, l'ordre suivant:  $x_{i_p} < x_{i_{p-1}} < \dots < x_{i_1}$ . Par ordre décroissant des valeurs, on prend l'arête  $z_1$  qui porte  $x_{i_1}$ ; ensuite si l'arête  $z_2$  qui porte  $x_{i_2}$  est telle que  $z_1 z_2$  ne forme pas un lacet, on la garde, sinon, on ne la garde pas; on fait pareil pour  $z_3$ , c'est-à-dire on ne la garde que si  $z_1 z_2 z_3$  ne forme pas un lacet, et ainsi de suite. Dans l'exemple ci-dessus,



THÉORÈME II.E.4. Avec les hypothèses ci-dessus,  $e(\Gamma(x, y)) = e(\Gamma) - \sum_{j=1}^p x_{i_j} - \sum_{j=1}^q y_{k_j}$  où chaque  $x_{i_j}$  (resp.  $y_{k_j}$ ) est associé à une arête appartenant à un certain  $T_q \subset K_q$  pour toute composante  $K_q$  de  $K$ . En particulier, la variation de  $e$  ne dépend pas des  $x_i$  et  $y_i$  choisis mais seulement des ordres fixés, en plus  $p + q = c(\Gamma)$ .

DÉMONSTRATION. Le corollaire II.E.3 nous permet de supposer que les  $x_i$  et  $y_i$  sont strictement positifs.

La remarque essentielle est la suivante: Soit  $1 \leq i \leq k$  et  $\delta > 0$  tels que pour  $b_i \in S^+$ ,  $]b_i, b_i + \delta[$  et  $\gamma_i(]b_i, b_i + \delta[)$  ne rencontre aucune orbite singulière finie de  $\Gamma$ . Soit  $\Gamma'$  obtenu à partir de  $\Gamma$  en remplaçant  $]a_i, b_i[$  par  $]a_i, b_i + \delta[$  (et  $\gamma_i(]a_i, b_i[)$  par  $\gamma_i(]a_i, b_i + \delta[)$ ). Alors  $e(\Gamma') = e(\Gamma)$  si  $]b_i, b_i + \delta[$  et  $\gamma_i(]b_i, b_i + \delta[)$  sont tous deux contenus dans des composantes minimales de  $\Gamma$ , s'ils sont contenus dans la même famille d'orbites finies, et  $e(\Gamma') = e(\Gamma) - \delta$  si non. Il y a bien sûr un résultat analogue quand on remplace  $]a_i, b_i[$  par  $]a_i - \delta, b_i[$ ,  $a_i \in S^-$ .

Maintenant, si  $s$  est un sommet de  $K$ , il représente des extrémités d'intervalles qui sont en relation par un mot  $m_s \in \Gamma$ . Appelons  $Def(m_s)$  l'intervalle de définition de  $m_s$  et  $|Def(m_s)|$  sa longueur.

Soit maintenant  $\epsilon > 0$  assez petit, pour que les intervalles  $]a_i - \epsilon, a_i[$ ,  $]b_i, b_i + \epsilon[$ ,  $\gamma_i(]a_i - \epsilon, a_i[)$  et  $\gamma_i(]b_i, b_i + \epsilon[)$  ne rencontrent aucune orbite singulière finie de  $\Gamma$  et tel que  $2\epsilon < \inf |Def(m_s)|$  où l'inf est pris sur tous les sommets de  $K$ . Nous supposons que les  $x_i, y_i$  sont dans  $]0, \epsilon[$  et tous distincts.

On va démontrer le théorème en passant de  $\Gamma$  à  $\Gamma(x, y)$  par étapes, sur chaque composante connexe  $K_q$  de  $K$ , en travaillant sur les  $x_i, y_i$  associés à  $K_q$  par ordre décroissant. Choisissons une composante  $K_q$  de  $K$  avec, par exemple, l'ordre  $x_{i_p} < x_{i_{p-1}} < \dots < x_{i_4} < y_{k_3} < x_{i_2} < y_{k_1}$  sur les  $x_i, y_k$  associés à  $K_q$ . On passe de  $\Gamma$  à  $\Gamma_q$  en remplaçant d'abord  $I_{k_1} = ]a_{k_1}, b_{k_1}[$  par  $]a_{k_1} - y_{k_1}, b_{k_1}[$  et  $\gamma_{i_{k_1}}(I_{k_1})$  par  $\gamma_{i_{k_1}}(]a_{k_1} - y_{k_1}, b_{k_1}[)$ ; ensuite on agrandit  $I_{i_2}$  vers la droite de la valeur  $x_{i_2}$  (en modifiant simultanément  $J_{i_2}$ ),  $I_{k_3}$  (et  $J_{k_3}$ ) vers la gauche de la valeur  $y_{k_3}$ , et  $I_{i_4}, \dots, I_{i_p}$  (resp.  $J_{i_4}, \dots, J_{i_p}$ ) vers la droite des valeurs respectives. Choisissons une autre composante  $K_{q'}$  de  $K$  et répétons le processus pour passer de  $\Gamma_q$  à  $\Gamma_{q'}$ , et ainsi de suite jusqu'à arriver à  $\Gamma(x, y)$ .

Le choix de  $\epsilon$  et de l'ordre dans chaque  $K_q$  garantit qu'à chaque étape on se trouve dans la situation de la remarque ci-dessus.

On va montrer que, dans chaque étape, les valeurs associées aux arêtes de  $K_q - T_q$  ne comptent pas pour la variation de  $e(\Gamma)$ .

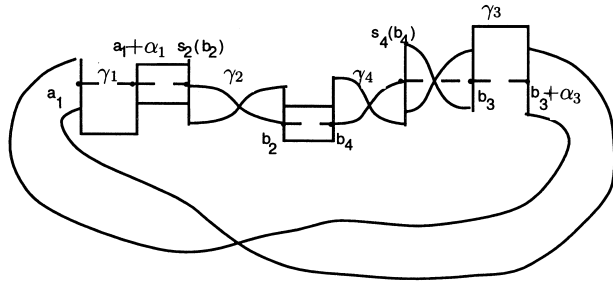
Soit  $z_q$  une arête de  $K_q - T_q$  avec pour sommets  $u_1, u_2 \in S^- \amalg S^+$  et  $\alpha$  le chemin dans  $T_q$  joignant  $u_1$  et  $u_2$ . Soit  $\Gamma'$  le pseudogroupe obtenu à partir de  $\Gamma$  en agrandissant les générateurs associés aux arêtes de  $\alpha$ , de leurs respectives valeurs. Associé à  $\alpha$ , nous avons un mot de  $\Gamma$  de la forme  $m = m_n \gamma_{i_{n-1}}^{\pm 1} m_{n-1} \dots m_1 \gamma_{i_1}^{\pm 1}$  (avec abus de notation car les  $\gamma_{i_j}$  qui constituent le mot  $m$  ne sont pas tous forcément distincts), où  $n = \text{nombre d'arêtes de } \alpha$  et  $m_i$  est le mot associé au sommet  $i + 1$  de  $\alpha$ .

Appelons  $\bar{\gamma}_{i_j} \in \Gamma'$  les générateurs  $\gamma_{i_j} \in \Gamma$  après agrandissement. Etant donné le choix de  $\epsilon$ , on voit que l'intervalle de définition du mot  $m' = m_n \bar{\gamma}_{i_{n-1}}^{\pm 1} m_{n-1} \dots m_1 \bar{\gamma}_{i_1}^{\pm 1} \in \Gamma'$  contient  $]u_1 - \delta, u_1 + \delta[$ , où  $\delta$  est la plus petite valeur parmi celles associées aux arêtes de  $\alpha$ . Donc,  $]u_1 - t, u_1 + t[$  est en relation par  $m'$  avec  $]u_2 - t, u_2 + t[$  pour tout  $t \in ]0, \delta[$ .

Pour simplifier la notation, on va supposer que le générateur  $\gamma_q \in \gamma$  associé à l'arête  $z_q$  est une pseudorotation. Etant donné l'ordre choisi pour passer de  $\Gamma$  à  $\Gamma_q$ , et le fait que  $\Gamma' < \Gamma$ , il suffit de montrer que la valeur  $x_q$  (resp.  $y_q$ ) qui porte l'arête  $z_q$  ne compte pas pour la variation de  $e$ , quand

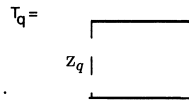
on passe de  $\Gamma$  à  $\Gamma'$  obtenu à partir de  $\Gamma'$  en agrandissant le générateur  $\gamma_q$  de  $x_q$  (resp.  $y_q$ ).

Or, par constuction de  $T_q$ ,  $x_q$  (resp.  $y_q$ ) est plus petit que  $\delta$ , donc on voit bien que  $[u_2, u_2 + x_q[$  (resp.  $]u_2 - y_q, u_2]$ ) et  $[u_2 + \alpha_q, u_2 + \alpha_q + x_q[$  (resp.  $]u_2 + \alpha_q - y_q, u_2 + \alpha_q]$ ) sont déjà mis en relation par le mot  $m' = m_{n+1}\gamma_q m' \in \Gamma'$  où  $m_{n+1}$  est le mot qui envoie  $u_2 + \alpha_2$  sur  $u_1$ , d'où le théorème.  $\square$



$$K_q = \begin{matrix} b_3 + \alpha_3 \sim a_1 & ; & a_1 + \alpha_1 \sim s_2(b_2) \\ \begin{matrix} y_1 \\ x_3 & & x_2 \\ & x_4 & \end{matrix} \\ b_3 \sim s_4(b_4) & & b_2 \sim b_4 \end{matrix}$$

En modifiant  $\Gamma$  de  $y_1$  en suite de  $x_2$  et  $x_4$ ,  $[b_3, b_3+t]$  et  $[b_3+\alpha_3, b_3+\alpha_3+t]$  sont mise en relation pour tout  $t \in (0, x_4]$ .



### Bibliographie

- [A.L.] Arnoux, P. et G. Levitt, Sur l'unique ergodicité des 1-formes fermées singulières, *Inv. Math.* **84** (1986), 141–156.
- [C.G.] Godbillon, C., Feuilletages étude géométrique, *Progress in Mathematics* Birkhäuser (1991).
- [Gus 0] Gusmão, P. H. C., Groupes et feuilletages de codimension un, Thèse (1993).
- [Gus] Gusmão, P. H. C., Groupes fondamentales associés aux feuilletages de codimension un mesures, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **1** (1994), 393–422.
- [Hae] Haefliger, A. et Groupoïde d'holonomie et Classifiant, *Structure transverse des feuilletages*, *Astérisque* **116** (1984), 70–97.
- [H.R.] Haefliger, A. et G. Reeb, Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, *Enseign. Math.* **3** (1957), 107–126.

- [Im] Imanishi, H., On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities, *J. Math. Kyoto Univ.* **19** (1979), 285–291.
- [Lev 1] Levitt, G., 1-formes fermées singulières et groupe fondamental, *Inv. Math.* **88** (1987), 635–667.
- [Lev 2] Levitt, G., Groupe fondamental de l'espace des feuilles dans les feuilletages sans holonomie, *Jour. Diff. Geom.* **31** (1990), 711–761.
- [Lev 3] Levitt, G., La Dynamique des Pseudogroupes de Rotation, *Invent. Math.* **113** (1993), 633–670.
- [Sac-Sh] Sacksteder, R. et A. Schwartz, Limits sets for foliations, *Ann. Inst. Fourier* **15** (1965), 201–214.
- [Sac 1] Sacksteder, R., Foliations and pseudogroups, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 79–102.
- [Salem] Salem, E., Riemannian foliations and pseudogroups of isometries appendix D. in P. Molino *Riemannian foliations*, *Progress in Mathematics* **73**, Birkhäuser (1988).

(Received July 5, 1999)

Universidade Federal Fluminense  
Instituto de Matemática - Departamento de Análise  
Rua Mario dos Santos Braga  
s/n-Valonguinho  
CEP - 24020-005 Niterói RJ - Brasil  
E-mail: gusmao@mat.uff.br