論文の内容の要旨

論文題目：**On the generalized suspension theorem for directed Fukaya categories**
（和訳：有向深谷圏の懸垂定理の一般化について）

氏　名：　二木　昌宏

本論文においては、有向深谷圏に対する Seidel の懸垂定理を、次数が一般の多項式の場合に一般化することが目的である．これは筆者と植田一石氏による最近の仕事を部分的に一般化するほか、Auroux-Katzarkov-Orlov の積の有向深谷圏に対する予想の特殊な場合となっている．

有向深谷圏はホモロジー的ミラー対称性予想を Fano 多様体に拡張する文脈で、Kontsevich により導入された．Fano 多様体のミラーは Landau-Ginzburg 模型だと考えられており、トーリック Fano 多様体に限定すれば、ミラーの Landau-Ginzburg 模型を複素トーラス上の Laurent 多項式として構成する方法が知られている（深谷-Oh-太田-小野．一般の場合には巾級数）．有向深谷圏は、この Landau-Ginzburg 模型の非特異ファイバーにおいて、消滅サイクルで生成される有向 A_∞ 圏である．

Seidel は有向深谷圏を Lefschetz ファイブレーションの Milnor 格子の

圏化と捉え、数学的な基礎付けを行うと共にその「Picard-Lefschetz 理論」を確立した．彼の目的は準射影多様体（この場合は射影多様体の超平面切断の補集合）に付随する Lefschetz ファイブレーションの構造を用い、K3 曲面に対するホモロジー的ミラー対称性を証明することにあり、有向深谷圏はその過程で現れる中間的な対象として扱われた．この時点で、有向深谷圏に対する興味は当初の Fano 多様体のホモロジー的ミラー対称性の文脈を離れ、純粋に数学的なものになったと考えて良い．

有向深谷圏 $\mathsf{Fuk}W$ は任意の exact Lefschetz ファイブレーション（全空間に擬 Kähler 構造 Ω が与えられており、この 2 形式が完全形式である）$W : X \to \mathbb{C}$ に対して定義され、その導来圏がシンプレクティック不変量である．Seidel の定式化では、全空間 X の非特異ファイバーに沿った分岐被覆の、自然な involution に関して考えた $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同変深谷圏が有向深谷圏である．消滅サイクルの基底 $\mathbb{V}$ で生成される有向 A_∞ 圏 $\mathsf{Fuk}^{\to}\mathbb{V}$ という素朴な定義とは双方の導来圏（A_∞ 圏の意味の；これは、元の圏 $\mathcal{A}$ の加法拡大の対象に「捻れ複体」の構造を入れた圏 $\mathsf{Tw}\mathcal{A}$ のホモロジー圏として定義される、三角圏である）を取ることで関係づけられ、両者が同値になることも Seidel による一般論の主張の内である．

有向深谷圏は、主に次元の低い場合に計算されてきた：$\mathbb{CP}^2$ のミラーの場合（Kontsevich）、$\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ のミラー（Seidel）、重み付き 2 次元射影空間のミラー（Auroux-Katzarkov-Orlov）、トーリック del Pezzo 曲面とその軌道体のミラー（植田-山崎）、$\mathbb{CP}^n$ のミラー（二木-植田；未出版）などである．最後の例を除き、これらはいずれも Landau-Ginzburg 模型の消滅サイクルの具体的な計算に依存しており、高次元の場合の計算は興味ある問題である．

Lefschetz ファイブレーションの次元を上げる最も基本的な操作は、その懸垂を取ること $W \rightsquigarrow W + u^2$ である．この操作で Lefschetz ファ

イブレーションの臨界点の集合は不変であることに注意する．Seidel が有向深谷圏を定式化する際に用いた「branched double cover の trick」は本質的にこの状況の計算を行っており、彼はそれを用いて昨年、有向深谷圏は懸垂で不変であることを示した．

そこでこの次に簡単な状況、すなわち Lefschetz ファイブレーションに 3 次以上の多項式を足す操作を考える：$W \rightsquigarrow W + u^d$．あとで述べるように、この状況には元々Fermat 型多項式の場合からも興味があった．このとき、単に u^d を足したのでは $W + u^d$ は Lefschetz ファイブレーションにならないので、適当にこの項を摂動して考えることにする．一般論から、有向深谷圏の導来圏は摂動には依らないので、どの摂動を考えるかは本質的ではない．

本論文では、u^d の特定の摂動 f^δ（δ は摂動のパラメータ）を考えた時の有向深谷圏 $\mathsf{Fuk}(W + f^\delta)$ について考察している．特に、消滅サイクルの取り方などの適切な設定の上で、有向深谷圏 $\mathsf{Fuk}(W + f^\delta)$ は双方の深谷圏のテンソルになる事を示した：

定理（二木）

十分小さい $\delta > 0$ に対し、有向 A_∞ 圏の同値

$$\mathsf{Fuk}(W + f^\delta) \cong \mathsf{Fuk}W \otimes \mathcal{A}_{d-1}. \tag{1}$$

が構成できる．

ただしここで、$\mathcal{A}_{d-1}$ は A_n 型 quiver に付随する、$d-1$ 個の対象を持つ圏であり、多項式 f^δ の深谷圏がこれと同型になることを（示した上で）補助的に使っている．（なお、一般に任意の d 次多項式で二重分岐しかもたないもの f に対し $D^b\mathsf{Fuk}f \simeq D^b\mathcal{A}_{d-1}$ であるが、我々の状況では、特に導来圏を取る前に同型 $\mathsf{Fuk}f^\delta \cong \mathcal{A}_{d-1}$ が成立する．）また、右辺のテンソルは、$\mathcal{A}_{d-1}$ の高次 A_∞ 構造が自明であることを利用し個別的に定義したものである．（A_∞ 圏同士のテンソルの、dg モデルを経

由しない定義は今のところ存在せず、「妥当な」定義は A_∞ 構造まで書き下すとかなり煩雑になると考えられるが、この場合それを避けることができる.）さらに、上記の議論を matching cycle の概念を用いた計算と比較し、導来圏レベルで同じ主張が得られることも見る.

幾つか注意を述べる．まず、本論文では上記の定理は $d \geq 2$ に対して示しているが、特に $d = 2$ のとき、これは Seidel の懸垂定理の有向深谷圏に対する主張そのものになる（$\mathcal{A}_1$ が自明な A_∞ 圏であるため）．この意味で、主定理は有向深谷圏に対する Seidel の懸垂定理の一般化である（なお、Seidel は有向でない full の深谷圏に対する主張も示しているが、我々の定理はそこまではカヴァーしていない）．次に、我々の証明は $\mathbb{Z}$ 上で機能し、特に標数 2 の体 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上で正しい．Seidel の定理はごく技術的な理由から標数 2 以外で定式化されており（「branched double cover trick」のため）、$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ でも正しいであろうという注意が行われているが、それを実際に確かめたことになる.

次に、Auroux-Katzarkov-Orlov は前述重み付き射影平面のミラーの論文において「積の有向深谷圏は、導来圏を取った後では有向深谷圏のテンソルと同値になる」：

$$D^b\mathsf{Fuk}(W_1 + W_2) \simeq D^b(\mathsf{Fuk}W_1 \otimes \mathsf{Fuk}W_2)$$

という予想を述べており、我々の定理はこの予想で W_2 が多項式の場合に肯定的な答えを与えている．なお、先に述べた通り A_∞ 圏のテンソルの定義をひとつ確定することも予想の一部分であるとみなして良いが、彼らが現在までのところこの予想を解決していない理由は高次の A_∞ 構造に寄与する擬正則円盤の数え上げの適切な定式化が難しいことにあり、これはテンソルの定義の煩雑さと表裏の問題であると考えられている.

また、植田は特異点のミラー対称性の観点から、Fermat 型多項式の有向深谷圏に興味を持っていた．植田と筆者は昨年、Seidel の方法を

応用することにより標数2以外で三角圏の擬同型

$$D^b\mathsf{Fuk}(f_1+\cdots+f_n)\simeq D^b(\mathsf{Fuk}f_1\otimes\cdots\otimes\mathsf{Fuk}f_n)$$

を示したが（参考論文)、本論文の主定理（1）はこの主張を f_1 が多項式に限らない一般の exact Lefschetz ファイブレーションの場合に、拡張したものとみなすこともできる．

証明の方法について簡単に述べる．要点は、Lefschetz ファイブレーションの積

$$W+f^\delta\colon W\times\Sigma\to\mathbb{C}$$

に対し、消滅サイクルを W と f^δ の消滅サイクルを用いて記述し、$W^{-1}(0)$ の擬正則円盤のモジュライから直接 $(W+f^\delta)^{-1}(0)$ の擬正則円盤のモジュライを構成することである．その際、射影 $(W+f^\delta)^{-1}(0)\to\Sigma$ による消滅サイクルの像は本質的には Seidel の matching path と言われるものであるが、ホモロジー代数に移行することにより他の状況に一般化可能な議論を行うのではなく、特殊事情を用い擬正則円盤の状況を詳しく見ることで証明を行う．なお、証明の過程で擬正則円盤のモジュライの regularity がどのようにして確保されるかが具体的に分かることも、この方法から得られる知見のひとつであろうと思われる．