

論文の内容の要旨

論文題目：Exact Solutions of Ultradiscrete Integrable Systems (超離散可積分系の厳密解)

氏名 岩尾慎介

周期箱玉系の一般解を解析的な手法で求めた。

一般に超離散可積分系は、可積分な離散方程式に超離散化と呼ばれる極限操作を作用させることによって得られる。本稿では、周期境界条件のついた簡約離散 KP 方程式、およびその超離散化の、初期値問題の一般解を構成する。

本稿の Key Theorem は以下の通り：

- 1) 平面代数曲線上の Abel 積分の超離散極限が、トロピカル曲線理論におけるトロピカル Abel 積分と一致することを証明した。(Chapter 2)
- 2) 逆散乱法を用いて、簡約離散 KP 方程式の初期値問題の一般解を構成した。(Chapter 3)
- 3) この手法は、Fay の恒等式などの関数等式に依存しておらず、構成的に解を求めている。

1) について：非特異複素代数曲線 (Riemann 面) 上の Abel 積分の理論は、古くから可積分方程式の解法に用いられてきた。超離散可積分系の解法を構成するにあたり、Riemann 面の超離散化に対応する幾何学的対象として、トロピカル曲線が用いられる。ここで、トロピカル曲線とは、マックス-プラス代数上の代数曲線である。Riemann 面上の Abel 積分のトロピカル的類似として、トロピカル曲線上の「トロピカル Abel 積分」が定義される。トロピカル Abel 積分は、組み合わせ論的に計算されるトロピカル曲線上の線形形式であり、計算が非常に容易であるという特長がある。ここでは、トロピカル Abel 積分が、複素 Abel 積分の超離散極限と一致することを証明する。実際、以下が成立する：

定理： C_ε をパラメータ $\varepsilon > 0$ を持つ代数曲線族とする。Trop C を C_ε に対応するトロピカル曲線とする。 C_ε がある genericness condition を満たすとき、 B_ε ： C_ε の周期行列、 B_T ：Trop C のトロピカル周期行列とおくと、

$$B_\varepsilon \sim \frac{-1}{2\pi i \varepsilon} B_T \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

が成立する .

2) について : 離散 KP 方程式の一般解が , 代数曲線に付随するテータ関数であらわされることはよく知られている . 離散 KP 方程式の解を考えると , テータ関数に対する Fay の恒等式に立脚する解法が一般的である . しかしながら , 与えられた初期値に対して具体的な解の表示を得るためには , 別の , より構成的な方法が必要となる .

ここでは , 与えられた初期値から簡約離散 KP 方程式の解を構成する . 簡約離散 KP 方程式は Lax 行列による表現を持つ . このとき , 標準的な方法で , スペクトル曲線と呼ばれる , 初期値のみによって定まる代数曲線を構成できる . 同じスペクトル曲線 C を与えるような初期値全体の集合を等位集合 \mathcal{T} と呼ぶと , 簡約離散 KP 方程式の時間発展は , 等位集合から自分自身への全単射と解釈できる .

スペクトル曲線 C の Picard 群を $\text{Pic}(C)$ と書こう . 固有ベクトル写像と呼ばれる単射 $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \text{Pic}(C)$ が存在して , 以下が成り立つ :

\mathcal{T} 上の時間発展は , $\text{Pic}(C)$ 内では定ベクトルによる平行移動である .

この事実を利用して , 簡約離散 KP 方程式の解を構成することができる . 結果として得られる解は , テータ関数 θ を用いて ,

$$\frac{\theta(a) \cdot \theta(b)}{\theta(c) \cdot \theta(d)} \times (\text{定数}) \quad (1)$$

の形で表される .

以上の Key Theorem 1), 2) を基に , 周期箱玉系の初期値問題の一般解を構成した . 手順は以下の通り : $e := e^{-1/\varepsilon}$ とおき , K を \mathbb{C} 上 e に関する Puiseux 収束級数体とする . また , $\text{val} : K \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を , $\text{val}(e) = 1$ なる付値とする . このとき , 超離散化 $-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \log(\bullet)$ と写像 val は , K 上一致することに注意しておく .

- i) 箱玉系の初期値 $\in \mathbb{Z}$ を . 付値 val で K 上に持ちあげる .
- ii) 持ちあげられた初期値に対し , K 上で , 簡約離散 KP 方程式の初期値問題を解く . (Key Theorem 2)

iii) 得られた解を超離散化する . この際 , テータ関数の超離散極限の計算に , Key Theorem 1 を用いる .

結論として得られる解は , 超離散テータ関数 Θ を用いて ,

$$\Theta(A) + \Theta(B) - \Theta(C) - \Theta(D) + (\text{定数})$$

の形で表される . これは , 形式的に離散 KP 方程式の解 (1) の積の演算をを加算に取り替えた形をしている .