論文の内容の要旨

論文題目 The Meyer functions for projective varieties and their applications to local signatures for fibered 4-manifolds (射影多様体に対する Meyer 函数と, その局所符号数への応用)

氏名 久野 雄介

本論文の目的は, Meyer 函数と呼ばれる二次不変量の新しい例を与え, ある構造を持つ 4 次元多様体の符号数への応用について論じることである. 特に, Meyer 函数を用いた, 局所符号数へのアプローチを高種数化する, 一つの方向を提示する.

まず研究の背景について述べる. 種数 g の向き付けられた閉曲面の写像類群を Γ_g とする. W. Meyer [9] は, 曲面上の曲面束の符号数を用いて, Γ_g の整係数 2 次元コサイクル τ_g を導入し, 次のことを示した: $g \geq 3$ の場合, コホモロジー類 $[\tau_g]$ は有理係数上非自明であり, 一方, $g = 1, 2$ の場合には τ_g は一意的に定まる有理係数 1-コチェインのコバウンダリとなる. この 1-コチェインを ϕ_g とかき, Meyer 函数と呼ぶ. Atiyah[2] は, ϕ_1 の, $SL(2;\mathbb{Z}) \cong \Gamma_1$ の双曲元における値が清水 L 函数の特殊値, 写像トーラスの η-不変量などの種々の不変量に一致することを示し, Meyer 函数の函数としての興味深い側面を明らかにした. η-不変量との関係は, 森藤孝之 [10], 飯田修一 [4] らにより, 高種数化, 高次元化が研究されている.

Meyer 函数は, 符号数の局所化に応用される. M を向き付けられた閉 4 次元多様体, B を向き付けられた閉曲面とし, $f \colon M \to B$ を B の有限個の点を除いたところでは曲面束となっている様な滑らかな固有写像とする. 楕円曲面や, Lefschetz ファイバー空間などが主な例である. この設定で M の符号数 $\mathrm{Sign}(M)$ が局所化されているとは, 各 $b \in B$ に対して, f の b の周りでの写像芽 $\mathcal{F}_b$ のみに依る有理数 $\sigma(\mathcal{F}_b) \in \mathbb{Q}$ が定義できて, σ は B の有限集合に台を持ち, 等式

$$\mathrm{Sign}(M) = \sum_{b \in B} \sigma(\mathcal{F}_b)$$

が成立することである. σ を局所符号数と呼ぶ.

この様な現象は, 位相幾何学だけでなく, 代数幾何学においても, 代数曲線族の構造を持つ一般型曲面の研究から発見されており, 現在は局所符号数の定義も様々なものがある. 位相幾何学からのアプローチの一つとして, 松本幸夫 [7, 8] により与えられた, Meyer 函数を用いた局所符号数の定義式がある. その式は,

$$\sigma(\mathcal{F}_b) = \phi_g(x_b) + \mathrm{Sign}(N(f^{-1}(b))) \tag{1}$$

である. ここで, x_b は $b \in B$ の周りの曲面束の局所位相的モノドロミー, $N(f^{-1}(b))$ は $f^{-1}(b)$ のファイバー近傍. この式による局所符号数の定義は, 遠藤久顕 [3] により, モノドロミーが超楕円的と呼ばれるものの場合に高種数化されている. これらの状況では, 位相的なデータから局所符号数の値が決まるのである. しかし,

高種数では位相的に非特異であるが, 局所符号数の観点から特異ファイバーと見做した方が良い (すなわち, 非零な局所符号数を持つ) ファイバー芽の存在が一般型曲面の研究から知られており, その場合には位相的データしか含まれていない, 上の定義式を改変する必要が生じる.

本論文では, 局所符号数の観点から, 高種数化, 高次元化の方向で Meyer 函数の新しい例を探し, 研究を行った. 具体的には, 射影空間に埋め込まれた非特異射影多様体から出発して, ある擬射影的多様体の基本群の上の函数として Meyer 函数を得た.

以下, 本論文の内容について説明する. $X \subset \mathbb{P}_N$ を複素射影空間に埋め込まれた, n 次元の非特異射影多様体とする. $k := N - n + 1$ とおく. $G_k(\mathbb{P}_N)$ で, $\mathbb{P}_N$ の k 次元部分射影空間のなす Grassmann 多様体を表し,

$$D_X := \{W \in G_k(\mathbb{P}_N); W \text{ は X と横断的に交わらない } \}$$

とおく. D_X は高次双対多様体と呼ばれる. $U^X := G_k(\mathbb{P}_N) \setminus D_X$ とする. $\mathcal{F}^X := \{(x, W) \in X \times U^X; x \in W\}$ とおくと, 第二成分への射影 $p_X : \mathcal{F}^X \to U^X$ は Riemann 面の族となる. p_X のファイバーの種数を g とし,

$$\rho_X : \pi_1(U^X) \to \Gamma_g$$

をその位相的モノドロミーとする. 次が本論文の主定理である.

定理 (=Theorem 3.1.1). 引き戻し $\rho_X^* \tau_g$ は $\pi_1(U^X)$ 上の一意的に定まる有理係数 1-コチェイン $\phi_X : \pi_1(U^X) \to \mathbb{Q}$ のコバウンダリとしてかける.

D_X が超曲面となる場合には, $\pi_1(U^X)$ の典型的な元である, なげなわと呼ばれる元の上での ϕ_X の値を X の種々の不変量から計算する公式が得られる (Proposition 3.5.2). 副産物として, X がある緩い条件を満たせば, $\pi_1(U^X)$ の 2 次元有界コホモロジーが非自明であることが得られる (Proposition 3.6.1). 定理の, ϕ_X の存在部分に関しては, D_X が超曲面のとき U^X がアファイン多様体であることと, 類 $3[\tau_g]$ が第 1 森田-Mumford 類 e_1 に等しいことと, Grothendieck-Riemann-Roch の公式を用いれば証明することができる. しかし, 本論文ではそうはせず, 位相幾何的な証明を与えた. 論文第 2 節, および第 3 節の後半では, 定理の証明, および, なげなわ上での ϕ_X の値の公式を得るために, 古典的な双対多様体の場合の, Lefschetz ペンシルの理論を位相幾何的に記述した Lamtoke [6] の議論を高次双対多様体の場合へ拡張している (Theorem 2.3.4, および Theorem 3.4.2). なお, 参考論文 1([5]) では, X が $\mathbb{P}_2$ の d 次 Veronese 写像による像の場合が扱われている.

局所符号数の公式 (1) を高種数化するためには, $[\tau_g]$ が非自明であるという障害を克服しなければならない. 本論文では, 冒頭の $f : M \to B$ のファイバーに, パラメータに関して連続な複素構造が与えられている状況を扱う. Riemann 面のモジュライ空間の部分集合 $\mathcal{A}$ を固定し, f の一般ファイバーの複素構造が $\mathcal{A}$ に入るとき, f を $\mathcal{A}$-ファイブレーションと呼ぶことにする. $\mathcal{A}$ は何でも良いが, 応用上はモジュライ空間の Zariski 開集合であることが望ましい.

本論文で与える, 局所符号数の高種数化に対する一つの解答は, $\mathcal{A}$ に対する"普遍族"が存在し, かつその普遍族の底空間の基本群上に Meyer 函数が存在すれば, $\mathcal{A}$-ファイブレーションに対する局所符号数が定義できるというものである (Proposition 4.1.7). その局所符号数は, 公式 (1) の第一項における位相的モノドロミーを, 普遍族への分類写像からできる"持ち上げられたモノドロミー"(Definition 4.1.8) に置き換えることでなされる. この新しい公式により, 位相的に非特異なファイバー芽が非自明な局所符号数をとることが, 持ち上げられたモノドロミーの複雑さとして説明される.

ある場合には, X を適当なものにとり, p_X から出発して, $\mathcal{A}$ に対する普遍族を実際に構成できる. この場合, ϕ_X の存在から, 普遍族に対する Meyer 函数の存在が容易に従う. 本論文ではこのアプローチに沿って, 種数 $4, 5$ の場合に $\mathcal{A}$ を一般の非超楕円的な曲線から成る, ある Zariski 開集合にとり, 対応する $\mathcal{A}$-ファイブレーションの局所符号数を定義した (Theorem 4.2.1, および Theorem 4.4.1). 本論文で扱った $\mathcal{A}$ は足利正, 吉川謙一による [1] で扱われているものに一致する. また, 種数 4 の場合には, 局所符合数の計算をいくつかの具体的なファイバー芽に対して実行し, [1] で計算されているものとの一致を観察した (Proposition 4.3.3-6).

謝辞. 指導教員である河澄響矢先生には, 修士課程の頃から温かい励ましと適切なアドバイスを常に頂いて

きました．ここに, 感謝致します．また, 本論文を書くにあたって, 東北学院大学の足利正先生は Meyer 函数に関する私の研究に興味を持って下さり, 具体例の構成法など, 数多くの貴重なアドバイスをして下さいました．ここに, 感謝致します.

参考文献

[1] T. Ashikaga and K. Yoshikawa, A divisor on the moduli space of curves associated to the signature of fibered surfaces, Adv. St. Pure Math. **56**, 2009, 1-34.

[2] M. F. Atiyah, The logarithm of the Dedekind η-function, Math. Ann. **278** (1987), 335-380.

[3] H. Endo, Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations, Math. Ann. **316**, 2000, 237-257.

[4] S. Iida, Adiabatic limits of η-invariants and the Meyer functions, to appear in Math. Ann. DOI: 10.1007/s00208-009-0412-y

[5] Y. Kuno, The mapping class group and the Meyer function for plane curves, Math. Ann. **342**, 2008, 923-949.

[6] K. Lamotke, The topology of complex projective varieties after S.Lefschetz, Topology, Vol. **20**, 1981, 15-51.

[7] Y. Matsumoto, On 4-manifolds fibered by tori, I, Proc. Japan Acad. **58** (1982), 298-301; II, ibid. **59** (1983), 100-103.

[8] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two -a topological approach, In: Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on "Topology and Teichmüller Spaces", World Scientific, Singapore, 1996, 123-148.

[9] W. Meyer, Die Signatur von Flächenbündeln, Math. Ann. **201**, 1973, 239-264.

[10] T.Morifuji, On Meyer's function of hyperelliptic mapping class groups, J.Math.Soc.Japan **55** (2003), 117-129.